1 Deux caractérisations de la fonction exponentielle

Exercice 1

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle: $y' = ay$.

2. En déduire que la fonction exponentielle est l'unique solution de $y' = y$ vérifiant $y(0) = 1$.

Exercice 2

1. Déterminer toutes les fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues vérifiant:

$$\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x + y) = g(x) + g(y)$$

2. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues vérifiant:

$$\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x)f(y) \quad (\star)$$

3. En déduire que la fonction exponentielle est l'unique fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant $(\star)$ et $f(1) > 0$ avec $\ln(f(1)) = 1$.

2 Exercices

Exercice 3

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt$$

En déduire que $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$

Exercice 4

1. Calculer $\lim_{x \to O^+} \{\ [(1 + x^2)^{\frac{1}{x}} - 1](1 + x)^{\frac{1}{x^2}}\ \}$

2. Calculer $\lim_{x \to O^+} \{\ \frac{e^{\sin x} - e^{\tan s}}{\sin x - \tan x}\ \}$

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x \leq 0$, et $f(x) = e^{-1/x}$ si $x > 0$.

1. Montrer par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\exists P_n \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } \forall x > 0 \quad f^{(n)}(x) = e^{-1/x} P_n \left(\frac{1}{x}\right)$$

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f est n fois dérivable en 0 et $f^{(n)}(0) = 0$.

3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

3 Un exercice un peu plus long pour réviser aussi les équations différentielles du premier ordre et les suites définies par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 6

1. On considère l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et l'application g de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définies par :
$$f(x) = e^{-x}\ln(1+e^x) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x)$$
   (a) Déterminer le signe de $g(x)$, selon les valeurs de x.
   (b) Étudier les variations de la fonction f.
   (*indication: Montrer que* $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = e^{-x}g(e^x)$.)
   (c) Déterminer toutes les fonctions φ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient la relation:
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(x) + \varphi(x) = \frac{1}{1+e^x}$$
   (*indication: Commencer par vérifier que f est une solution particulière.*)

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = a \in \mathbb{R}$ et la relation: $\forall\, n \geq 0, u_{n+1} = f(u_n)$
   (a) Montrer qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = \alpha$, et vérifier que α appartient à l'intervalle $]0, 1[$.
   (*indication: Considérer la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) - x$.*)
   (b) Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a : $-\ln 2 \leq f'(x) \leq 0$.
   (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.