

## Feuille d'exercices de probabilité correspondant aux leçons 6 et 7

### Exercice 1 (Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson)

Soit  $(X_n)$  une suite de variables aléatoires de loi binomiale  $\mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ .

Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$   $P(X_n = k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

### Exercice 2

On dispose d'une pièce truquée qui tombe sur la face pile avec probabilité  $p \in ]0, 1[$ . On lance cette pièce jusqu'à obtenir la face pile et on note  $T$  le nombre de lancers effectués. Déterminer la loi de  $T$ .

### Exercice 3

On tire  $n$  boules dans une urne qui en contient  $N$  numérotées de 1 à  $N$  ( $n \leq N$ ).

On considère  $X$  et  $Y$  le plus petit et le plus grand nombre obtenu. Déterminer les lois de  $X$  et  $Y$  lorsque:

- 1) les tirages se font avec remise,
- 2) les tirages se font sans remise.

### Exercice 4

Soient  $X_0$  et  $X_1$  deux variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , indépendantes et de même loi.

Pour tout  $\omega$  de  $\Omega$ , on considère le polynôme  $Q_\omega$  d'indéterminée  $y$  défini par:

$$Q_\omega(y) = y^2 + X_1(\omega)y + X_0(\omega).$$

On désigne par  $M(\omega)$  le nombre de racines réelles de  $Q_\omega$ .

1. Montrer que l'application  $M$  qui, à tout  $\omega$  de  $\Omega$  associe  $M(\omega)$ , est une variable aléatoire définie sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .
2. Soit  $Z$  une variable aléatoire définie sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  qui suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p$  (avec  $p \in ]0, 1[$ ). On suppose dans cette question que  $X_0$  et  $X_1$  suivent la même loi que  $2Z - 1$ .
  - (a) Déterminer la loi de  $X_0$ .
  - (b) Déterminer la loi de  $M$  et calculer son espérance  $E(M)$ .

### Exercice 5

Soit  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$  un espace probabilisé et soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une variable aléatoire réelle vérifiant  $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ .

1. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\sum_{k=0}^n kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n).$$

2. On suppose que la variable aléatoire  $X$  admet une espérance notée  $E(X)$ .

Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq nP(X > n) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X = k)$ .

En déduire que la série de terme général  $P(X > n)$  converge et que:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n) = E(X).$$

3. On suppose que la série de terme général  $P(X > n)$  converge. Montrer que la série de terme général  $kP(X = k)$  converge et que  $X$  admet une espérance.
4. Énoncer le théorème qui vient d'être établi.

**Exercice 6**

Dans tout l'exercice,  $X$  est une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ .

1. Une première inégalité.

(a) Montrer que  $P(|X - \lambda| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}$ .

(b) En déduire l'inégalité (\*) :  $P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{\lambda}$ .

2. Première amélioration de l'inégalité (\*).

(a) Soit  $Y$  une variable aléatoire discrète, à valeurs positives et ayant une espérance. On note  $Y(\Omega) = \{y_0, y_1, \dots, y_n, \dots\}$ .

Montrer, en minorant  $E(Y)$ , que :  $\forall a > 0, P(Y \geq a) \leq \frac{E(Y)}{a}$ .

(b) On considère une variable aléatoire discrète  $Z$ , d'espérance nulle et de variance  $\sigma^2$ . Montrer que, pour tout couple  $(a, x)$  de  $]0, +\infty[ \times \mathbb{R}_+$  :

$$P(Z \geq a) \leq P((Z + x)^2 \geq (a + x)^2)$$

(c) En appliquant l'inégalité obtenue en **2.a** à la variable aléatoire  $(Z + x)^2$ , montrer que :

$$\forall a > 0, \quad \forall x \geq 0, \quad P(Z \geq a) \leq \frac{\sigma^2 + x^2}{(a + x)^2}$$

(d) En déduire que :  $\forall a > 0, P(Z \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$ .

(On pourra étudier la fonction  $f$  qui, à tout  $x$  de  $\mathbb{R}_+$ , associe  $\frac{\sigma^2 + x^2}{(a + x)^2}$ ).

(e) Utiliser cette dernière inégalité pour montrer que :  $P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{\lambda + 1}$ .

3. Deuxième amélioration de l'inégalité (\*).

Pour tout réel  $t$ , on pose  $G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)t^k$ .

(a) Justifier l'existence de  $G_X(t)$  et montrer que :  $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$ .

(b) Montrer que :  $\forall t \in [1, +\infty[, \quad \forall a > 0, \quad P(X \geq a) \leq \frac{G_X(t)}{t^a}$

(c) Déterminer le minimum sur  $[1, +\infty[$  de la fonction  $g : t \mapsto \frac{e^{t-1}}{t^2}$ .

(d) En déduire que :  $P(X \geq 2\lambda) \leq \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda$ .

(e) Montrer que cette dernière amélioration est meilleure que celle obtenue à la question **2.e** dès que  $\lambda$  prend des valeur assez grandes.

### Corrigé de l'exercice 3

- 1) Expérience: On tire  $n$  boules avec remise dans une urne qui en contient  $N$  numérotées de 1 à  $N$ .

Modélisation:  $\Omega = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n); \omega_i \in \{1, \dots, N\} \forall 1 \leq i \leq n\} = \{1, \dots, N\}^n$  ( $\text{card}(\Omega) = N^n$ ).

On muni  $\Omega$  de la tribu  $\mathcal{P}(\Omega)$  et de l'équiprobabilité  $P$ .

$Y : \Omega \mapsto \mathbb{R}, \omega \rightarrow \max\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ .

$Y$  est une variable aléatoire réelle discrète sur  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$  et  $Y(\Omega) = \{1, \dots, N\}$ .

Pour tout  $k \in \{1, \dots, N\}$ ,  $[Y \leq k] = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n); \omega_i \in \{1, \dots, k\} \forall i\} = \{1, \dots, k\}^n$ , qui est de cardinal  $k^n$ , donc  $P(Y \leq k) = \frac{k^n}{N^n} = \left(\frac{k}{N}\right)^n$ .

D'où, pour tout  $k \in \{2, \dots, N\}$ ,  $P(Y = k) = P(Y \leq k) - P(Y \leq k-1) = \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n$ .  
Et  $P(Y = 1) = P(Y \leq 1) = \left(\frac{1}{N}\right)^n$ .

$X : \Omega \mapsto \mathbb{R}, \omega \rightarrow \min\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ .

$X$  est une variable aléatoire réelle discrète sur  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$  et  $X(\Omega) = \{1, \dots, N\}$ .

Pour tout  $k \in \{1, \dots, N\}$ ,  $[X \geq k] = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n); \omega_i \in \{k, k+1, \dots, N\} \forall i\} = \{k, k+1, \dots, N\}^n$ , qui est de cardinal  $(N-k+1)^n$ , donc  $P(X \geq k) = \frac{(N-k+1)^n}{N^n} = \left(\frac{N-k+1}{N}\right)^n$ .

D'où, pour tout  $k \in \{1, \dots, N-1\}$ ,  $P(X = k) = P(X \geq k) - P(X \geq k+1) = \left(\frac{N-k+1}{N}\right)^n - \left(\frac{N-k}{N}\right)^n$ .  
Et  $P(X = N) = P(X \geq N) = \left(\frac{1}{N}\right)^n$ .

- 2) Expérience: On tire  $n$  boules sans remise dans une urne qui en contient  $N$  numérotées de 1 à  $N$ .

Modélisation:  $\Omega$  est l'ensemble des combinaisons de  $n$  éléments pris parmi  $\{1, \dots, N\}$ ,

$\text{cad } \Omega = \{\omega = \{x_1, \dots, x_n\}; 1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq N\}$ . On a  $\text{card}(\Omega) = \binom{N}{n}$ .

On muni  $\Omega$  de la tribu  $\mathcal{P}(\Omega)$  et de l'équiprobabilité  $P$ .

$Y : \Omega \mapsto \mathbb{R}, \omega \rightarrow \max\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ .

$Y$  est une variable aléatoire réelle discrète sur  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$  et  $Y(\Omega) = \{n, \dots, N\}$ .

Pour tout  $k \in \{n, \dots, N\}$ ,  $[Y \leq k] = \{\omega = \{x_1, \dots, x_n\}; 1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq k\}$ , qui

est de cardinal  $\binom{k}{n}$ , donc  $P(Y \leq k) = \frac{\binom{k}{n}}{\binom{N}{n}}$ .

D'où, pour tout  $k \in \{n+1, \dots, N\}$ ,  $P(Y = k) = P(Y \leq k) - P(Y \leq k-1) = \frac{\binom{k}{n}}{\binom{N}{n}} - \frac{\binom{k-1}{n}}{\binom{N}{n}}$ .

Et  $P(Y = n) = P(Y \leq n) = \frac{1}{\binom{N}{n}}$ .

$X : \Omega \mapsto \mathbb{R}, \omega \rightarrow \min\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ .

$X$  est une variable aléatoire réelle discrète sur  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$  et  $X(\Omega) = \{1, \dots, N-n+1\}$ .

Pour tout  $k \in \{1, \dots, N-n+1\}$ ,  $[X \geq k] = \{\omega = \{x_1, \dots, x_n\}; k \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq N\}$ ,

qui est de cardinal  $\binom{N-k+1}{n}$ , donc  $P(X \geq k) = \frac{\binom{N-k+1}{n}}{\binom{N}{n}}$ .

D'où, pour tout  $k \in \{1, \dots, N-n\}$ ,

$$P(X = k) = P(X \geq k) - P(X \geq k+1) = \frac{\binom{N-k+1}{n}}{\binom{N}{n}} - \frac{\binom{N-k}{n}}{\binom{N}{n}}.$$

$$\text{Et } P(X = N-n+1) = P(X \geq N-n+1) = \frac{1}{\binom{N}{n}}.$$