Feuille d'exercices de probabilités

variables aléatoires à densité

Exercice 1
Soit X une variable aléatoire réelle dont la fonction de répartition F_X est définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{5^{-x}}{2} & \text{si } x > 0 \\ \frac{5^x}{2} & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Montrer que X est une variable aléatoire réelle à densité et déterminer une densité f_X de X.

Exercice 2
Soit n un entier > 1. Soit X une v.a. de densité f définie par:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^{n-1} \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ & \quad 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

où a est une constante réelle.
(1) Calculer a.
(2) Calculer l'espérance et la variance de X.
(3) Déterminer la fonction de répartition de X.

Exercice 3
Soit X une v.a. de densité

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\theta x e^{-\theta x^2} \quad \text{si } x > 0, \\ &= 0 \quad \text{sinon,} \end{aligned}$$

où θ est un paramètre strictement positif.

1. Vérifier que f est une densité.
2. Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire X.
3. Calculer l'espérance et la variance de X.
4. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = \theta X^2$. Quelle est la loi de Y ?

Exercice 4
On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes et suivant la même loi uniforme sur $[0, 1]$.
On pose $Z = X + Y$.

1. (a) Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(Z)$ de Z.
   (b) Déterminer une densité de Z.
   (c) Montrer que, pour tout x de $]0, 1[$, les événements $(Z > 1)$ et $(1 - x < Z \leq 1 + x)$ sont indépendants.
2. On pose $T = \max(X, Y)$.
   (a) Déterminer une densité de T.
   (b) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(T)$ de T.
   (c) On pose $U = |X - Y|$. Montrer que U est une combinaison linéaire de Z et T, puis en déduire $\mathbb{E}(U)$.

Exercice 5

Paul et Valérie ont un rendez-vous chez Robert entre 12h et 14h. On suppose que les instants d'arrivée de Paul et Valérie sont des variables aléatoires X et Y indépendantes et de loi uniforme sur [0,2] (l'instant 0 correspondant à midi et l'unité de temps étant l'heure).

1. Soit U la variable aléatoire représentant le temps d'attente de Robert jusqu'à la première arrivée. Déterminez la densité de probabilité de U.

2. Soit V la variable aléatoire représentant le temps d'attente de Robert jusqu'à ce que ses deux amis soient arrivés. Déterminez la densité de probabilité de V.

3. Soit W la variable aléatoire représentant le temps d'attente de Robert entre les deux arrivées. Déterminez la densité de probabilité de W.

Exercice 6

λ et p désignent deux réels tels que $\lambda > 0$ et $0 < p < 1$. On considère le couple (X, Y) à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ de loi définie par:

$$\begin{aligned} P(X = n \cap Y = k) &= \frac{\lambda^n e^{-\lambda} p^k (1-p)^{n-k}}{k!(n-k)!} \quad \text{si } 0 \leq k \leq n, \\ P(X = n \cap Y = k) &= 0 \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

1. Vérifier que la relation ci-dessus définit bien une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^2$.

2. Déterminer la loi de la variable X, puis celle de Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

3. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $X = n$.

4. Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = X - Y$. Déterminer la loi de Z.

5. Les variables Y et Z sont-elles indépendantes ?

Application : Pour une certaine race de mammifères, à chaque portée, le nombre X de petits suit une loi de Poisson de paramètre 5. La probabilité pour qu'un petit soit une femelle est 0,6. On note Y le nombre de femelles par portée.

1. Quelle est la loi de Y conditionnellement à $X = n$? En déduire la loi de (X, Y).
2. Sachant qu'une portée est constituée de 7 petits, quelle est la probabilité qu'il y ait 4 mâles et 3 femelles ?
3. Quelle est la probabilité pour qu'une mère donne naissance dans une même portée à 3 mâles exactement ?

Exercice 7

Soit $Z = (X, Y)$ un couple de v.a.r.. On suppose que Z admet une densité f définie par

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{c}{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-y} \quad \text{si } x > 0,\ y > 0,\ x < y^2, \\ &= 0 \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

1. Calculer c.

2. Déterminer les lois marginales de X et Y. X et Y sont-elles indépendantes ?

Approximation de la loi $\mathcal{B}(n,p)$ par la loi $\mathcal{N}(np, np(1-p))$

Exercice 8
On veut transporter rapidement entre deux villes A et B, dans des conditions de confort acceptables, 1600 voyageurs se présentant pratiquement en même temps à la gare. On met à leur disposition deux trains identiques. On suppose que chaque individu choisit au hasard l'un des deux trains et qu'il n'a pas le temps d'en changer. Combien faut-il prévoir de places assises dans chaque train si l'on veut que la probabilité pour que des voyageurs soient obligés de rester debout soit inférieure à 3.10^{-3} ?

Exercice 9
Un laboratoire produit un vaccin destiné à une population de 100000 personnes. On considère que la proportion P de personnes achetant le vaccin suit une loi gaussienne de moyenne 0.24 et d'écart-type 0.03.

1. Combien de doses le laboratoire doit-il produire pour que le risque de rupture de stock soit de l'ordre de 2% ?

2. Quelle doit être la marge bénéficiaire réalisée sur chaque dose vendue pour que le risque de perte soit de l'ordre de 3% ?

Indications pour la correction de l'exercice 4:

1. (a) $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$ par linéarité de l'espérance. Comme X et $Y \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$, $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2}$. Et donc $\mathbb{E}(Z) = 1$.

   (b) **Remarque:** Pour montrer qu'une fonction f est une densité, il faut vérifier les 3 points suivants:

   - f est continue par morceaux
   - f est positive ou nulle
   - $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

   Ici on vous demandait de montrer que f_Z est une densité **de Z**. Pour cela, on peut (comme vu dans un exo donné en cours) avoir recours à la fonction de répartition $F_Z(t) = \mathbb{P}(Z \leq t)$.
   Pour $t < 0$, $F_Z(t) = 0$.
   Pour $t > 2$, $F_Z(t) = 1$.
   Pour $t \in [0, 2]$, $F_Z(t) = \int\int_{D_t} dxdy$ où $D_t = \{(x, y) \in [0, 1]^2;\ x + y \leq t\}$, (car X et $Y \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$).
   si $t \in [0, 1]$, on obtient $F_Z(t) = \int_0^t \left(\int_0^{t-y} dx\right) dy = \ldots = \frac{t^2}{2}$.
   si $t \in [1, 2]$, on obtient $F_Z(t) = \int_0^1 \left(\int_0^{min(1,t-y)} dx\right) dy = \int_0^{t-1} \left(\int_0^1 dx\right) dy + \int_{t-1}^1 \left(\int_0^{t-y} dx\right) dy = \ldots = 2t - \frac{t^2}{2} - 1$.
   Puis on conclut grâce à la **propriété** suivante: **En tout point t où F_Z est dérivable, on a $F_Z'(t) = f_Z(t)$.**

   (c) Calculez les probabilités des différents événements grâce à la définition de f_Z. On obtient:

   $$\mathbb{P}(Z > 1 \text{ et } 1 - x < Z \leq 1 + x) = \mathbb{P}(Z > 1) * \mathbb{P}(1 - x < Z \leq 1 + x)$$

   D'où l'indépendance.

2. (a) Si $t \in [0, 1]$, $F_T(t) = \mathbb{P}(T \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t \text{ et } Y \leq t) = t^2$ car X et Y sont indépendantes et de même loi uniforme sur $[0, 1]$.
   Si $t < 0$, $F_T(t) = 0$. Et si $t > 1$, $F_T(t) = 1$.
   Donc par la propriété citée ci-dessus, $f_T(t) = 2t$ si $t \in [0, 1]$ et 0 sinon.

   (b) $\mathbb{E}(T) = \frac{2}{3}$.

   (c) $U = |X - Y| = max(X, Y) - min(X, Y)$ et $Z = max(X, Y) + min(X, Y)$.
   Donc $U + Z = 2max(X, Y) = 2T$. D'où $U = 2T - Z$ et $\mathbb{E}(U) = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$

Indications pour la correction de l'exercice 5:

1. $U = \min(X, Y)$ donc $P(U > t) = P(X > t \text{ et } Y > t)$.
   Comme X et Y sont indépendantes et de même loi uniforme sur $[0, 2]$,
   $P(X > t \text{ et } Y > t) = P(X > t)P(Y > t) = (1 - F(t))^2$
   où F est la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[0, 2]$, cad $F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t/2 & \text{si } t \in [0, 2] \\ 1 & \text{si } t > 2 \end{cases}$
   Donc $P(U > t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < 0 \\ (1 - t/2)^2 & \text{si } t \in [0, 2] \\ 0 & \text{si } t > 2 \end{cases}$ Donc la fonction de répartition F_U de U

est définie par:
$F_U(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1-(1-t/2)^2 & \text{si } t \in [0,2] \\ 1 & \text{si } t > 2 \end{cases}$ Comme F_U est continue et C^1PM sur $\mathbb{R}$, U est une v.a. à densité et une densité de U est: $f_U(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1-t/2 & \text{si } t \in [0,2] \\ 0 & \text{si } t > 2 \end{cases}$

2. $V = \max(X,Y)$ et X et Y sont indépendantes et de même loi uniforme sur $[0,2]$, donc $P(V \leq t) = P(X \leq t \text{ et } Y \leq t) = P(X \leq t)P(Y \leq t) = F(t)^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t^2/4 & \text{si } t \in [0,2] \\ 1 & \text{si } t > 2 \end{cases}$
   Donc V est une v.a. à densité et une densité de V est: $f_V(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t/2 & \text{si } t \in [0,2] \\ 0 & \text{si } t > 2 \end{cases}$

3. $W = V - U$ donc $P(W \leq t) = \int\int_{D_t} f_U(u)f_V(v)dudv$
   où $D_t = \{(u,v) \in [0,2]^2;\ v - u \leq t\} = \{(u,v);\ 0 \leq v \leq \min(2, u+t) \text{ et } 0 \leq u \leq 2\}$.
   Donc pour $t \in [0,2]$
$$\begin{aligned} P(W \leq t) &= \int_0^2 \left(\int_0^{\min(2,u+t)} f_V(v)dv \right) f_U(u)du \\ &= \int_0^{2-t} \left(\int_0^{u+t} f_V(v)dv \right) f_U(u)du + \int_{2-t}^2 \left(\int_0^2 f_V(v)dv \right) f_U(u)du \\ &= \int_0^{2-t} \left(\int_0^{u+t} \frac{v}{2}dv \right) \left(1 - \frac{u}{2}\right) du + \int_{2-t}^2 \left(\int_0^2 \frac{v}{2}dv \right) \left(1 - \frac{u}{2}\right) du \\ &= \ldots \end{aligned}$$
   Pour $t < 0$, $P(W \leq t) = 0$, et pour $t > 2$, $P(W \leq t) = 1$.
   Comme la fonction de répartition de W est continue et C^1PM sur $\mathbb{R}$, W est une v.a. à densité et on obtient une densité de W en dérivant la fonction de répartition là où elle dérivable et en prenant des valeurs quelconques aux points où la fonction de répartition n'est pas dérivable.

Indications pour la correction de l'exercice 6:

1. Vérifier que
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^n e^{-\lambda} p^k (1-p)^{n-k}}{k!(n-k)!} = 1$$
2. Montrer que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\lambda p)$, puis en déduire que X et Y ne sont pas indépendantes.
3. Montrer que la loi conditionnelle de Y sachant $X = n$ est la loi $\mathcal{B}(n,p)$.
4. Montrer que $Z \sim \mathcal{P}(\lambda(1-p))$
5. Montrer que Y et Z sont indépendantes.

Application: Ici $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda = 5$, et la loi conditionnelle de Y sachant $X = n$ est la loi $\mathcal{B}(n, p)$ avec $p = 0.6$.
(Rappel: la loi $\mathcal{B}(n, p)$ est la loi du nombre de succès lorsque l'on répète de façon indépendante n expériences avec à chaque expérience une probabilité p de succès)
Nous sommes donc bien dans la situation traitée de façon générale au-dessus avec ici $\lambda = 5$ et $p = 0.6$.
La loi de (X, Y) est donc définie par:

$$\begin{aligned} P(X = n \cap Y = k) &= \frac{\lambda^n e^{-\lambda} p^k (1-p)^{n-k}}{k!(n-k)!} \quad \text{si } 0 \leq k \leq n, \\ P(X = n \cap Y = k) &= 0 \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$