

1. Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 telle que $f(0) = 0$. On pose $g(t) = f(t)/t$ pour $t \neq 0$ et $g(0) = f'(0)$.
 Montrer que g est dérivable à l'origine et calculer $g'(0)$.
 Si f est de classe \mathcal{C}^3 , montrer que g est de classe \mathcal{C}^2 et déterminer $g''(0)$.
 Généraliser si possible.
2. Soient $a < 0 < b$ deux réels et f une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur $[a, b]$. On suppose que pour tout entier n , $f^{(n)}(0) = 0$ et que $\sup_{x \in [a, b]} |f^{(n)}(x)| \leq n!k^n$ où k est un réel strictement positif donné. Montrer que f est nulle dans $] -1/k, 1/k[\cap [a, b]$ puis que f est nulle sur $[a, b]$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n - x - n$.
 - a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0, +\infty[$, que l'on notera u_n , pour $n > 2$.
 - b) Montrer que $\forall n > 2 : 0 < u_n < 2$.
 - c) Montrer que $u_n^n \sim n$.
 - d) En déduire que $\ln u_n \sim \frac{\ln n}{n}$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.
 - e) Justifier que $u_n - 1 \sim \frac{\ln n}{n}$ et apprécier la rapidité de convergence de (u_n) vers 1.
4. Soit $\phi(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.
 - a) Donner le domaine de définition de ϕ .
 - b) Montrer que $t - 1 - \ln t \sim \frac{1}{2}(t - 1)^2$ en 1, et en déduire la limite en 1 de $t \mapsto \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t - 1}$. Montrer alors que $\lim_1 \phi = \ln 2$.
 - c) Montrer que
 - α) Si f et g sont des fonctions continues sur un intervalle I , avec $g \geq 0$ et $a \in I$ et si $f = o(g)$ en a , alors $\int_a^x f(t) dt = o(\int_a^x g(t) dt)$.
 - β) Si $f(x) = P(x) + o((x - a)^n)$, où P est un polynôme de degré au plus n , alors pour toute primitive F de f sur I : $F(x) = F(a) + \int_a^x P(t) dt + o((x - a)^{n+1})$.
 - d) Donner le développement limité d'ordre 3 en 1 de ϕ .
5. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $I \subset]0, \infty[$ et soit a un point à l'intérieur de I . On suppose que $f \simeq g$ au point a .
 - (a) On suppose que f et g tendent vers $l \neq 1$ au point a . Montrer alors que $\ln f \simeq \ln g$ au point a . Que peut-on dire lorsque $l = 1$?
 - (b) Montrer que $e^f \simeq e^g$ au point a si et seulement si $\lim_a f - g = 0$.
6. (a) Soit (u_n) une suite réelle telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1} - u_n) = a$ avec $a \neq 0$. Montrer que $u_n \simeq na$ lorsque n tend vers l'infini.
 (b) Soit (u_n) une suite réelle définie par $u_0 \in]0, 1[$ et $u_{n+1} = u_n - (u_n)^2$. Montrer que $u_n \simeq \frac{1}{n}$ (Indication : on pourra considérer la suite $v_n = 1/u_n$).
7. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution a_n dans l'intervalle $]n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$. Chercher un équivalent de a_n puis de $d_n = \frac{\pi}{2} + n\pi - a_n$ lorsque n tend vers l'infini.
8. Déterminer un équivalent simple de $\int_0^1 (\ln(1+x))^n dx$ lorsque n tend vers l'infini.