Université d'Orléans.
Département de mathématiques

CAPES 2008-2009
Semaine 20

Formes quadratiques

Exercice 1 *Soit E un espace vectoriel sur un corps K de caractéristique différente de 2. Soit q une application de E dans K. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) q est une forme quadratique;

(ii) pour tout $(\lambda, x) \in K \times E$, on a $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$ et l'application f définie de E^2 dans K par $f(x, y) = q(x + y) - q(x - y)$ est une forme bilinaire symétrique;

(iii) pour tout $(\lambda, x) \in K \times E$, on a $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$ et l'application g définie de E^2 dans K par $g(x, y) = q(x + y) - q(x) - q(y)$ est linaire par rapport à x.

Exercice 2 *Soit $E = \mathbb{R}[X]$ considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Déterminer pour chacune des applications suivantes, définies sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$, si elle est ou non une forme quadratique :*

$q_1(P) = P(0).P(1)$

$q_2(P) = P(0).P(1).P(2)$

$q_3(P) = P(0).P(1) + P(0)$

$q_4(P) = |P(0).P(1)|$

Exercice 3 *Soit E un espace vectoriel sur un corps K de caractéristique différente de 2. Soit $\phi \in E^*$. Démontrer que $q : x \mapsto [\phi(x)]^2$ est une forme quadratique sur E en précisant la forme bilinéaire symétrique qui lui est associée (on l'appelle forme polaire associée).*

Exercice 4 *Soit $E = \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$ où $a < b$. Démontrer que $q : f \mapsto \int_a^b f^2(t)dt$ est une forme quadratique sur E en précisant la forme polaire qui lui est associée.*

Exercice 5 *Soient $E = \mathbb{Q}^2$ et $F = \mathbb{Q}^3$ considérés comme $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels.*

1) Déterminer les matrices symétriques associées à chacune des formes quadratiques suivantes :

$q_1(x, y) = 2x^2 + 3xy + 6y^2$, $q_2(x, y) = 8xy + 4y^2$, $q_3(x, y) = 4xy$ *sur* E.

$q_4(x, y, z) = x^2 + 2xy + 4xz + 3y^2 + yz + 7z^2$ *sur* F.

2) Appliquer à ces quatre formes quadratiques la méthode de Gauss (dite parfois d'orthogonalisation ou de diagonalisation) qui fournit une décomposition en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.

3) Quelle est la signature de chacune de ces formes quadratiques.

4) Dire si chacune de ces formes quadratiques est définie ? positive ? négative ?

Exercice 6 *On définit l'équivalence de deux formes quadratiques q et q', sur un même $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie, par l'existence d'un isomorphisme u de E, tel que $q'(u(x)) = q(x)$ pour tout $x \in E$. Démontrer que deux formes quadratiques, sur un espace vectoriel reél E, sont équivalentes si et seuleument si elles ont même signature.*

Exercice 7 *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 rapporté à une base (e_1, e_2, e_3). Déterminer une base (e'_1, e'_2, e'_3) orthogonale relativement à la forme quadratique q_i dans chacun des cas suivnts, spécifiés pour $X = xe_1 + ye_2 + ze_3$:*
$q_1(X) = x^2 + 3y^2 + 9z^2 + 2xy - 8yz - 4xz$; $\quad q_2(X) = 4x^2 - 3y^2 + 8z^2 + 4xy - 2yz - 12xz$;
$q_3(X) = xy + 2yz + 3xz$;

Exercice 8 *Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$ et q la forme quadratique définie par $q(P) = P(0).P(1)$.*
1) *Donner la forme polaire de q.*
2) *Donner la matrice de q dans la base $(1, X, X^2)$.*
3) *Appliquer la méthode de Gauss à q. Quels sont la signature et le rang de q ?*
4) *Déterminer une base de E orthogonale pour q. Quel est le noyau de q.*
5) *Pour $P = 1 + X + X^2$, déterminer $P^\perp$ et $P^{\perp\perp}$.*

Exercice 9 *Généralisation : Soit q' une forme quadratique sur un espace euclidien (E, q). Démontrer qu'il existe alors une base $(u_1, u_2, ..., u_n)$ orthonormale pour q et orthogonale pour q'.*

Exercice 10 *On se place dans $\mathbb{R}^4$.*
1) *Diagonaliser la matrice symétrique suivante à l'aide d'une matrice orthogonale P :*

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

2) *Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ ayant A pour matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Calculer :*

$$\sup_{x \in (\mathbb{R}^4)^*} \frac{q(x)}{< x, x >}$$

où $< .,. >$ désigne le produit scalaire euclidien usuel sur $\mathbb{R}^4$.