UNIVERSITE D'ORLEANS **CAPES 2008-2009**
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES **S. Grellier**

Semaine 18 - Fonctions complexes .

(1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On dit que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une similitude de rapport λ si, pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, $|f(z) - f(z')| = \lambda |z - z'|$.

(a) Montrer que f est injective, et que $f(0) \neq f(1)$.
On pose $g(z) = \frac{f(z)-f(0)}{f(1)-f(0)}$.

(b) Montrer que g est une isométrie.

(c) En déduire que g est soit l'identité, soit la conjugaison.

(d) Quelle est la forme générale d'une similitude ?

(2) Démontrer que deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables si et seulement si

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{c'-a'}{b'-a'}.$$

Ici a, b, c et a', b', c' désignent les affixes respectives des points A, B, C et A', B', C'. En déduire une construction du point M' d'affixe

$$z' = \frac{z-a}{z-b}$$

en fonction des points $A(a)$,$B(b)$ et $M(z)$, $z \neq b$.

(3) On identifie $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$.

(a) Donner l'équation générale d'une droite de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$.

(b) Donner l'équation générale d'un cercle dans $\mathbb{C}$.

(c) On note E l'union de l'ensemble des droites avec celui des cercles. Donner l'equation générale dans $\mathbb{C}$ d'un élément de E. On précisera selon les paramètres de cette équation les éléments géométriques de l'élément de E associé.
On dit que f est une homographie, s'il existe des réels a, b, c, d tels que $ad - bc \neq 0$, et tels que l'on ait

$$f : \begin{cases} \mathbb{C} \cup \{\infty\} & \to & \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ z & \mapsto & \frac{az+b}{cz+d} \quad z \neq -d/c \\ \infty & \mapsto & a/c \\ -d/c & \mapsto & \infty \end{cases}$$

(d) Montrer que les homographies forment un groupe.

(e) Montrer que ce groupe est engendré par les similitudes directes et $z \mapsto 1/z$.

(f) En déduire que les homographies laissent E globalement invariant au sens suivant : Pour toute homographie h, l'image de l'intersection d'un élément quelconque de E avec l'ensemble de définition de h, est l'intersection d'un élément de E avec l'image de h.

(4) Soient A, B, C, M quatre points distincts de $\mathbb{R}$ d'affixe a, b, c, z. On note $< A, B, C >$ l'unique cercle ou droite contenant les points A, B, C.

(a) Montrer que $M \in < A, B, C >$ si et seulement si le birapport : $[a, b, c, z] = \frac{\frac{c-a}{c-b}}{\frac{z-a}{z-b}}$ est réel.

(b) Montrer que les homographies conservent le birapport.