

1. A une série entière $\sum a_n z^n$, on associe

$$\begin{aligned} R_1 &= \sup\{r > 0; \sum |a_n| r^n \text{ converge}\} \\ R_2 &= \sup\{r > 0; \sum a_n r^n \text{ converge}\} \\ R_3 &= \sup\{r > 0; \lim_{n \rightarrow \infty} a_n r^n = 0\} \\ R_4 &= \sup\{r > 0; a_n r^n \text{ est borné}\}. \end{aligned}$$

Montrer que $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 =$ Rayon de convergence de la série entière (on pourra remarquer que $R_1 \leq R_2 \leq R_3 \leq R_4$).

2. Déterminer le rayon de convergence des séries suivantes :

$$(2^n + n)z^n, (\log n)z^n, n^n z^n, n^{\log n} z^n, n!z^n, a^{n^2} z^n, a^n z^{n^2}.$$

3. Soit $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.
 Montrer que la série $g(x) = \sum_{n \geq 0} n a_n x^n$ a le même rayon de convergence et exprimer g en fonction de f' .

4. Calculer les sommes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n!} x^n, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 4^n} x^{n-1}, \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{2n+1}.$$

5. Donner le rayon de convergence et précisez le comportement sur le cercle des séries suivantes :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} z^n, \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{n}, \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{n^2}, \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^{3n}}{8^n (n+1)}, \sum_{n \in \mathbb{N}} n^p z^n, p \in \mathbb{N}^*, \sum_{n \in \mathbb{N}} q^{n^2} z^n \text{ où } |q| < 1.$$

6. Étude de la convergence simple, absolue, normale, uniforme de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$.

7. Soient R_a et R_b les rayons de convergence des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.

- (a) Montrer que le rayon de convergence R de $\sum (a_n + b_n)z^n$ est supérieur ou égal à $\min(R_a, R_b)$. Peut-on avoir égalité? Inégalité stricte?
- (b) Montrer que le rayon de convergence R' de $\sum a_n b_n z^n$ est supérieur ou égal à $R_a R_b$. Peut-on avoir égalité? Inégalité stricte?

8. Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$$

En déduire que le prolongement par continuité de $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x-1}$ sur $]0, +\infty[$ est de classe \mathcal{C}^∞ .

9. Théorème radial d'Abel. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1. On suppose que $\sum a_n$ converge.

- (a) Montrer que $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[0, 1]$. (on pourra utiliser la transformation d'Abel pour majorer les restes).
- (b) En déduire que $\lim_{x \rightarrow 1} \sum a_n x^n = \sum a_n$. Montrer en particulier que $\log 2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

10. Donner un exemple de fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et qui n'admet pas de développement en série entière.