

SUITES DÉFINIES PAR RÉCCURENCE

- (1) Montrer qu'il n'est pas possible de construire une suite qui satisfasse

$$u_0 \in ]0, +\infty[, \quad u_{n+1} = \ln(u_n).$$

- (2) Etudier la suite définie par  $u_0 = 0$  et, pour tout entier  $n \geq 0$ ,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}.$$

- (3) Soient  $a$  et  $b$  des réels tels que  $0 < a < b$ . Montrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, & u_0 = a \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n), & v_0 = b \end{cases}$$

sont convergentes et ont même limite  $l \in ]\sqrt{ab}, \frac{1}{2}(a+b)[$ .

- (4) Etudier les suites définies par :

$$(1) \begin{cases} u_n &= \frac{u_{n-1}+1}{2u_{n-1}+3} \\ u_0 &= 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} u_n &= \frac{u_{n-1}+1}{u_{n-1}+2} \\ u_0 &= 0. \end{cases}$$

- (5) Soit  $f$  la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{2x + 2}.$$

- (a) Montrer qu'il existe  $x_0 > 0$  et  $k \in ]0, 1[$  tels que pour  $x > x_0$ , on ait  $|f'(x)| \leq k$ .  
(b) En déduire que la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 2$  et, pour tout  $n \geq 1$  :  $u_n = f(u_{n-1})$  est convergente.

- (6) On considère les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  définies par :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{3}(2a_n + b_n), & a_1 = 4 \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 2b_n), & b_1 = 1 \end{cases}$$

- (a) Montrer que les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont adjacentes.  
(b) Calculer  $b_n$  en fonction de  $n$  et en déduire la limite commune de ces deux suites.