UNIVERSITÉ d'ORLÉANS SCL1 MA02
Département de mathématiques 2008-9

Arithmétique : Feuille 2: révisions de la Toussaint.
(Rappels: pas de cours-td la semaine du 3 au 7 novembre 2008).
Devoir sur table la semaine suivante.

Exercice 1. (1) Utilisez l'algorithme d'Euclide pour trouver un couple (x, y) d'entiers relatifs tels que $(E_1) : 89x + 41y = 1$.
Même question avec $(E_2) : 59x + 27y = 1$.
(2) Trouver tous les couples solutions de l'équation (E_1) puis de l'équation (E_2).

Exercice 2. (1) Calculer $pgcd(47, 35)$.
(2) Trouver toutes les solutions entières de $47x+35y = 1$. Puis les solutions entières de $141x + 105y = 3$.
(3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Peut-on résoudre $47x + 35y = n$? Si oui, donner les solutions.

Exercice 3. Calculer $pgcd(33\,810; 4\,146)$.

Exercice 4. Soit n un entier naturel. On pose $a = 3n + 4$ par $b = 2n + 3$. Prouver que si d divise a et b alors d divise 1.
Que pouvez-vous en déduire pour a et b?

Exercice 5. Soit n un entier naturel. On pose $a = 2n + 1$ par $b = 3n + 2$. Trouver une relation entre a et b indépendante de n. Déduisez-en que a et b sont premiers entre eux (On justifiera la réponse).

Exercice 6. (1) Trouver tous les diviseurs de 21.
(2) Trouver tous les couples (a, b) d'entiers naturels tels que $a^2 - b^2 = 21$.
(3) De même, trouver tous les couples (a, b) d'entiers naturels tels que $a^2 - b^2 = 15$.

Exercice 7. Calculer le pgcd et le ppcm de $a = 105$ et $b = 231$.

Exercice 8. Montrer que $2^{2n} - 1$ est divisible par $2^n - 1$. De même $2^{3n} - 1$ est divisible par $2^n - 1$.

Exercice 9. On cherche les couples (x, y) d'entiers naturels tels que :
$xy = 1512$ et $ppcm(x, y) = 252$. (Méthode: calculer $d = pgcd(x, y)$ et écrire $x = dx'$, $y = dy'$ où x', y' sont premiers entre eux dans la première équation puis résoudre en (x', y').

Exercice 10. Expliquez pourquoi il est impossible de trouver u v dans $\mathbb{Z}$ tels que $6u - 9v = 2$.