UNIVERSITÉ d'ORLÉANS SCL1 MA02
Département de mathématiques 2008-9

Arithmétique : Feuille 4 (Congruences).

Exercice 1. Calculer le reste de 7^8 modulo 6 puis celui de 3^{15} modulo 11 (On ne calculera pas explicitement la puissance).

Exercice 2. Montrer que $2x + 9y \equiv 0$ [8] implique $10x - 3y \equiv 0$ [8].

Exercice 3. Trouver tous les entiers y tels que $2y \equiv 5$ [7].

Exercice 4. Trouver tous les entiers y tels que $3y \equiv 12$ [33].

Exercice 5. Trouver tous les entiers x tels que

$$\begin{cases} x \equiv 3 \ [11] \\ x \equiv 5 \ [7]. \end{cases}$$

Exercice 6. a) Montrer que 223 est un nombre premier.

b) Calculer 1998^{1998} modulo 223.

Exercice 7. Trouver tous les entiers x tels que

$$\begin{cases} x \equiv -1 \ [8] \\ x \equiv 7 \ [13]. \end{cases}$$

Exercice 8. a) Factoriser 455 en produit de nombres premiers.

b) Soient a et n des entiers naturels. Montrer que l'on a $a^n \equiv 1$ [455] si et seulement si $a^n \equiv 1$ [5], $a^n \equiv 1$ [7] et $a^n \equiv 1$ [13].

c) Soit a un entier tel que $pgcd(a, 455) = 1$. Montrer que l'on a $a^{12} \equiv 1$ [455].

Exercice 9. Soient p un nombre premier et a un entier positif non multiple de p.

a) Montrer qu'il existe un plus petit entier positif k tel que $a^k \equiv 1$ [p].

Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons r le reste de la division euclidienne de n par k.

b) Montrer que l'on a $a^n \equiv 1$ [p] si et seulement si n est multiple de k.

c) Soit $p = 5$ et $a = 4$. Vérifiez que $a^{p-1} \equiv 1$ [5]. Chercher le plus petit entier k tel que $a^k \equiv 1$ [5].

Exercice 10. a) Soit $a \in \mathbb{Z}$. Montrer que a^2 est congru à 0, 1 ou 4 modulo 8.

b) Soit n un entier positif. Montrer que $a^2 + b^2 + c^2 \neq 8n - 1$, pour tous $a, b, c \in \mathbb{Z}$. (On interprétera cette dernière équation dans le language de la congruence).

Exercice 11. a) Factoriser 1729 en produit de nombres premiers.

b) Soient a et n des entiers positifs. Montrer que l'on a $a^n \equiv 1\ [1729]$ si et seulement si $a^n \equiv 1\ [7]$, $a^n \equiv 1\ [13]$ et $a^n \equiv 1\ [19]$.

c) Soit a un entier positif tel que $pgcd(a, 1729) = 1$. Démontrer que l'on a $a^{1728} \equiv 1\ [1729]$.

Exercice 12. Trouver tous les entiers x tels que

$$\begin{cases} 7x \equiv 5\ [19] \\ 3x \equiv 1\ [11]. \end{cases}$$

△