

Arithmétique : Problème 1.

*Définition:* on dira qu'un entier  $n$  est positif si  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Exercice 1.** (1) Démontrer par récurrence que  $u_n = n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$  est un multiple de 3 pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ .

(2) On considère  $v_n = an^3 + bn^2 + cn$  pour  $n \in \mathbb{N}$  avec  $a \in \mathbb{N}^*$ ,  $b, c \in \mathbb{R}$  et  $2b \in \mathbb{N}$ .

*Dans cette partie, on suppose que 3 divise  $v_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .*

(a) Montrer alors que 3 divise  $v_{k+1} - v_k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

(b) En déduire que 3 divise  $3a(n^2 + n) + 2bn + (a + b + c)$ , puis 3 divise  $2bn + (a + b + c)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

(c) En conclure que 3 divise  $(a + b + c)$  puis que 3 divise  $2b$ .

(d) Réciproquement, on suppose que 3 divise  $(a + b + c)$  et 3 divise  $2b$ . En déduire que 3 divise  $v_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

(e) Retrouver le résultat du (1).

**Exercice 2.** (1) Montrer que si  $n$  est entier impair alors  $\frac{n^2-1}{2}$  est un entier.

(2) Montrer que si  $n$  est entier pair et non nul alors  $\frac{n^2-4}{4}$  est un entier.

(3) Vérifier pour tout entier  $n$  impair la relation

$$n^2 + \left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2.$$

(4) De même, vérifier pour tout entier  $n$  pair non nul, la relation

$$n^2 + \left(\frac{n^2-4}{4}\right)^2 = \left(\frac{n^2+4}{4}\right)^2.$$

(5) On se donne un entier positif  $x$ . Montrer que l'on peut toujours trouver deux entiers positifs  $y$  et  $z$  tels que  $x^2 + y^2 = z^2$ .

(6) Donner des triplets solutions  $(x, y, z)$  pour  $x = 3$ ,  $x = 6$ ,  $x = 7$  et  $x = 19$ .

**Tourner la page S.V.P.**

- (7) Un maçon considère deux murs plans qui forment un angle d'un maison. Il veut vérifier que ses murs forment un angle droit en utilisant pour ses mesures des multiples entiers de 10 cm pour se simplifier la tâche. Les deux murs font respectivement moins de 160cm et 250cm et son mètre mesureur est de 200 cm. Quelles solutions pouvez-vous lui proposer avec la méthode ci-dessus?
- (8) Quelle solution pensez-vous qu'il va retenir?

△