

Feuille 1 bis.

Exercice 1. Une société multinationale impose l'anglais comme langue interne à toutes ses filiales. Le siège social de Bruxelles emploie p Flamands et q Wallons. Chaque matin, les employés se saluent deux par deux:

- en français lorsque les deux employés sont wallons,
- en néerlandais lorsque les deux employés sont flamands,
- en anglais lorsqu'il y a un Flamand et un Wallon.

- (1) Combien y-t-il d'échanges de politesses en français?
- (2) Combien y-t-il d'échanges de politesses en néerlandais?
- (3) Combien y-t-il d'échanges de politesses en anglais?
- (4) En déduire la relation

$$C_{p+q}^2 = C_p^2 + pq + C_q^2.$$

Exercice 2. Le sultan de Bagdad décide de partager équitablement ses np chameaux entre ses n fils.

- (1) Il donne p chameaux au premier fils, combien a-t-il de choix possibles ? (*Les chameaux sont distingués par des numéros*).
Il donne p chameaux, parmi ceux qui restent, au deuxième fils, combien a-t-il de choix possibles ?
Ainsi de suite... Il donne p chameaux, parmi ceux qui restent, au $k^{i\text{eme}}$ fils, combien a-t-il de choix possibles ?

Combien a-t-il en tout de répartitions possibles des chameaux entre ses n fils?

- (2) Les chameaux étant alignés, il donne les p premiers au premier fils, il donne les p suivants au deuxième fils, et ainsi de suite jusqu'au dernier.
Combien y-a-t-il de manière d'aligner les chameaux?
Combien d'alignements différents des chameaux correspondent à une même répartition entre les fils?

Combien a-t-il en tout de répartitions possibles des chameaux entre ses n fils?

- (3) Déduire des questions précédentes la relation

$$\prod_{k=1}^n C_{pk}^p = \frac{(np)!}{(p!)^n}.$$

Il possède aussi $n(n+1)$ ânes qu'il veut répartir entre ses fils proportionnellement à: n pour l'aîné, $n-1$ pour le deuxième, ..., $n-k+1$ pour le $k^{i\text{eme}}$, ..., 2 pour l'avant-dernier et 1 pour le dernier.

- (4) Déterminer la méthode de répartition des ânes.
- (5) Combien a-t-il de répartitions différentes des ânes?