Département de Mathématiques
Université d'Orléans

SCL3 MT02
1er semestre, 2008/2009

Feuille d'exercices 2 : Conditionnement, indépendance

1. On tire successivement et avec remise n boules d'une urne contenant 4 boules blanches, 3 boules noires, 2 boules rouges et une boule verte.
   (a) Donner un univers Ω décrivant cette expérience aléatoire. Préciser la mesure de probabilité utilisée.
   (b) Calculer la probabilité de l'événement "on ne tire pas de boule blanche".
   (c) Calculer la probabilité de l'événement "on ne tire pas de boule blanche ou on ne tire pas de boule rouge".
   (d) Calculer la probabilité de l'événement "on tire au moins une boule blanche et au moins une boule noire".
   (e) Calculer la probabilité d'obtenir les 4 couleurs. Montrer que pour $n = 4$, cette probabilité vaut $(4!)^2/10^4$.
2. Soit $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ un sous-ensemble à n éléments d'un ensemble E à N éléments ($N \geq n$). On pioche au hasard et sans remise n éléments de E. On note A_i l'événement "l'élément a_i de A a été pioché".
   (a) Donner un univers Ω décrivant cette expérience aléatoire. Préciser la mesure de probabilité utilisée.
   (b) Que représentent les événements $A_1 \cap \ldots \cap A_n$ et $A_1^c \cap \ldots \cap A_n^c$? Calculer leur probabilité.
   (c) Calculer $\mathbb{P}(A_i^c)$ pour tout entier $i \leq n$.
   (d) Calculer $\mathbb{P}(A_i^c \cap A_j^c)$ pour tout $i \neq j$.
   (e) Calculer de façon générale $\mathbb{P}(A_{i_1}^c \cap \ldots \cap A_{i_r}^c)$ pour tout entier $r \leq n$ et $1 \leq i_1 < i_2 \cdots < i_r \leq n$.
   (f) Calculer $\mathbb{P}(A_1^c \cup \ldots \cup A_n^c)$.
   (g) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{N-k}{n} = 1$.
3. On joue indéfiniment à pile ou face avec une pièce honnête. On appelle A l'événement "on n'obtient que des piles" et, pour tout entier $n > 0$, on note A_n l'événement "on obtient pile à chacun des n premiers lancers". Calculer la probabilité de A_n puis la probabilité de A.
4. Les événements A et B sont disjoints et indépendants. Que peut on dire de A et B ?
5. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.
   (a) Montrer que si deux événements A et B sont indépendants, alors A^c et B sont indépendants.

(b) Montrer que si A, B et C sont mutuellement indépendants, alors A est indépendant de $B \cap C$ et de $B \cup C$.

6. On permute au hasard les chiffres 1,2,3,4. On considère les événements A="1 est avant 2", et B="3 est avant 4". Les événements A et B sont-ils indépendants ?

7. Une urne contient $2N$ jetons numérotés de 1 à 2N. On tire une poignée aléatoire de cette urne : le résultat est une partie quelconque de $\{1, 2, \ldots, 2N\}$. On suppose que chaque partie a la même probabilité d'être tirée.
   (a) Donner un univers Ω décrivant cette expérience aléatoire. Préciser la mesure de probabilité utilisée.
   (b) Soit A_i l'événement "la poignée contient le jeton i". Étudier l'indépendance des événements $A_1, \ldots, A_{2N}$.

8. On lance deux pièces équilibrées. On appelle A l'événement "la première pièce donne pile", B l'événement "la deuxième pièce donne pile" et C l'événement "les deux pièces donnent le même résultat". Les événements A, B et C sont ils indépendants ? Sont-il deux à deux indépendants ?

9. **Calcul de l'indicateur d'Euler**
   Soit $n \in \mathbb{N}$. On choisit aléatoirement et de manière équiprobable un entier compris entre 1 et n. Pour tout diviseur d de n, on définit l'événement A_d ="l'entier obtenu est un multiple de d".
   (a) Quelle est la probabilité de A_d ?
   (b) On note $p_1 < p_2 < \ldots < p_r$ la suite croissante des diviseurs premiers de n.
      i. Montrer que $(A_{p_i})_{1 \leq i \leq r}$ est une famille d'événements indépendants.
      ii. En déduire le cardinal $\varphi(n)$ de l'ensemble A des nombres inférieurs ou égaux à n et premiers avec n.

10. On lance une pièce non biaisée 10 fois de suite.
   (a) Donner un univers Ω décrivant cette expérience aléatoire.
   (b) Calculer la probabilité d'obtenir k piles.
   (c) On sait que l'on a obtenu finalement 3 fois pile. À la lumière de cette information, évaluer la probabilité d'avoir obtenu pile au 1er lancer.

11. Une entreprise fabrique des composants électroniques. La probabilité qu'un composant fonctionne est $0,9$. On note A l'événement " le composant fonctionne ". On fait subir un test à chaque composant avant sa livraison. On constate que :
   - lorsque un composant fonctionne, il est toujours accepté à l'issue du test.
   - lorsque un composant ne fonctionne pas, il peut malgré tout être accepté avec une probabilité de $\frac{1}{10}$. On note B l'événement " le composant est accepté à l'issue du test "
   (a) Calculer $P(B)$.
   (b) Calculer $P(A|B)$.

12. Un laboratoire propose un test pour détecter si un patient est infecté ou non par une certaine maladie. Les performances de ce test sont les suivantes :
    – Si le patient est infecté, le test est positif dans 99% des cas ;
    – Si le patient est sain, le test est négatif dans 98% des cas.
    On considère que une personne sur mille est infectée. Calculer la probabilité qu'un patient soit sain sachant que le test est négatif. Calculer la probabilité qu'un patient soit infecté sachant que le test est positif.
13. On considère trois cartes, une avec deux faces rouges, une avec deux faces blanches et une avec une face rouge et une face blanche. On tire une carte au hasard que l'on pose sur la table sans regarder sa deuxième face. La face exposée est rouge. Quelle est la probabilité que la face cachée soit blanche ?
14. (a) Vladimir lance deux pièces équilibrées et cache le résultat. Il vous informe qu'au moins une pièce a donné "pile". Quelle est la probabilité que les deux pièces aient donné "pile" ?
    (b) A nouveau, Vladimir lance deux pièces équilibrées et cache le résultat. Il choisit une des pièces au hasard et vous informe que la pièce choisie a donné "pile". Quelle est la probabilité que les deux pièces aient donné "pile" ?
15. On considère n urnes $U_1, \ldots, U_n$ contenant chacune 3 boules. Toutes les boules sont blanches, sauf une qui est noire. On ne sait pas dans quelle urne se trouve la boule noire.
    (a) On tire sans remise 2 boules de U_1. Quelle est la probabilité qu'elles soient toutes les deux blanches ?
    (b) Sachant que l'on a tiré deux boules blanches de U_1, quelle est la probabilité que U_1 contienne la boule noire ?
    (c) Sachant que l'on a tiré deux boules blanches de U_1, quelle est la probabilité que U_2 contienne la boule noire ?
16. On dispose de deux urnes : l'urne U contient 1 boule blanche et 4 boules noires, l'urne V contient 3 boules blanches et 2 boules noires. On n'arrive pas à reconnaître l'urne U de l'urne V. D'une urne choisie au hasard, on effectue une série de tirages d'une boule avec remise (tous les tirages ont lieu dans la même urne). Soit A_i l'événement "la i-ème boule tirée est blanche".
    (a) Calculer $\mathbb{P}(A_1)$, $\mathbb{P}(A_2)$. Les événements A_1 et A_2 sont-ils indépendants ?
    (b) Calculer $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n)$.
    (c) Sachant que les $(n-1)$ premiers tirages donnent chacun une boule blanche, quelle est la probabilité d'obtenir encore une boule blanche au prochain tirage ?
    (d) Sachant que les n premières boules tirées sont blanches, quelle est la probabilité d'avoir tiré dans U ?
17. À un jeu télévisé sont présentées trois portes. Derrière deux des trois portes, il y a une chèvre, derrière la troisième il y a une belle voiture. Le présentateur demande au candidat de choisir une des portes, lui annonçant qu'il repartira

avec ce qui est derrière la porte. Invariablement, le présentateur ouvre, non pas la porte désignée par le candidat, mais une autre porte, d'où sort (évidemment) une chèvre. Il ajoute alors au candidat déconfit : “mais non, c'était pour rire, allez indiquez moi une autre porte. Vous pouvez garder votre choix initial, mais vous pouvez changer si vous voulez.”
Que faut-il faire ?