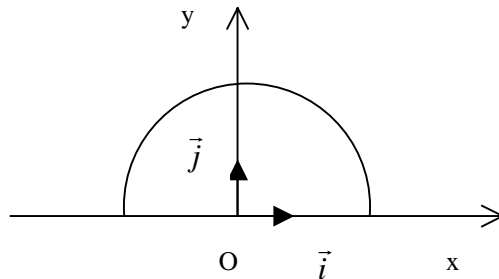


PB ELECTROSTATIQUE

- I Soit une distribution sphérique uniformément chargée, de densité volumique ρ_0 positive et de rayon R.
- I.1. Exprimer en tout point de l'espace le champ électrostatique ainsi que le potentiel (on prendra l'origine du potentiel à l'infini).
 - I.2. Calculer l'énergie électrostatique de cette distribution :
 - I.2.1. à partir du potentiel, en considérant que l'on reconstitue la distribution sphérique en faisant venir de l'infini des charges dq correspondant à la charge de volumes élémentaires $d\tau$ (couronnes sphériques successives de rayon r et d'épaisseur dr).
 - I.2.2. à partir du potentiel, en considérant que la distribution sphérique est constituée.
 - I.2.3. à partir du champ électrostatique.
 - I.3. Quelle est l'énergie localisée à l'intérieur de la distribution sphérique ?
 - I.4. Quelle est l'énergie rayonnée dans l'espace ?



- II. On considère une distribution linéique de charge de densité λ_0 uniforme et positive, sur un demi-cercle de centre O, de rayon R et situé dans un plan xOy.



- II.1.1. Etudier la symétrie de la distribution et donner la direction et le sens du champ électrostatique $\vec{E}(O)$ créé au point O, en utilisant les vecteurs unitaires de la base cartésienne liée à Oxy.
 - II.1.2. Calculer $\vec{E}(O)$.
 - II.1.3. Calculer le potentiel électrostatique $V(O)$ créé au point O.
- On considère un point M de l'axe Oz, perpendiculaire au plan xOy, tel que $OM=z$.
- II.2.1. En utilisant les symétries, trouver la (ou les) composante(s) nulle(s) du champ $\vec{E}(M)$ créé au point M, dans la base cartésienne liée à Oxyz.
 - II.2.2. Calculer la (ou les) composante(s) non nulle(s) de $\vec{E}(M)$.
 - II.2.3. Calculer le potentiel créé au point M, en utilisant $V(\infty) = 0$.
 - II.2.4. Calculer la circulation de $\vec{E}(M)$ sur l'axe Oz, du point O à $+\infty$. Quel commentaire vous suggère ce résultat ?
 - II.2.5. Quelle est la direction de $\vec{E}(M)$ quand $z \rightarrow \infty$?

III. Electrostatique

- III.1. Préliminaires.
 - III.1.1. Quelle est l'expression de la force coulombienne ou force électrostatique qu'exerce une charge source ponctuelle q_p placée en P sur une charge d'essai ponctuelle placée en M ? On notera $\vec{PM} = r\vec{u}$. \vec{u} étant le vecteur unitaire orienté de P vers M et r le module du vecteur \vec{PM} . On supposera que les deux charges sont placées dans le vide.
 - III.1.2. Préciser les unités des grandeurs utilisées.

- III.1.3. En déduire l'expression du champ électrostatique $\vec{E}_p(M)$ créé en M par q_p .
- III.1.4. Sachant qu'il n'y a pas d'autres charges sources que celle placée en P, rappeler sans démonstration l'expression du potentiel électrostatique $V_p(M)$ créé en M par q_p .
- III.1.5. Vérifier la relation $dV = -\vec{E}_p(M) \cdot d\vec{M}$ obtenue quand on effectue un déplacement infinitésimal du point M.
- III.1.6. Quelle autre relation existe-t-il entre $\vec{E}_p(M)$ et $V_p(M)$?
- III.2. Fil chargé.
Soit un fil conducteur rectiligne F très long, parallèle à l'axe Oz, cylindrique, de rayon a, portant une charge fixe positive répartie uniformément avec une densité surfacique Σ à laquelle on pourra pour simplifier associer une densité linéique $\lambda = 2\pi a \Sigma$; une petite tranche de fil comprise entre deux plans parallèles à xOy et distants de dz porte la charge $dq = \lambda dz$. Ce fil est placé dans l'air dont le comportement électrostatique est supposé identique à celui du vide. Soit M un point situé à la distance $r > a$ de l'axe du fil.
- III.2.1. En utilisant le théorème de Gauss et les propriétés de symétrie de l'ensemble, déterminer la direction, le sens et l'intensité de $\vec{E}(M)$, champ électrostatique créé par le fil en M.
- III.2.2. En déduire le potentiel électrostatique $V(M)$; la constante habituelle sera exprimée en fonction de V_0 potentiel en un point du fil.
- III.3. Ligne bifilaire.
Une ligne bifilaire est constituée de deux fils analogues au précédent, parallèles à l'axe Oz et dont les axes sont distants de d supposée très grande devant a ($d \gg a$).
- Ces deux fils F_1 et F_2 portent des charges dont les densités linéiques respectives sont λ et $-\lambda$. Soient O_1 et O_2 les intersections des axes des deux fils avec le plan xOy.
- On suppose que tous les points de la surface de F_1 sont maintenus au potentiel V_0 supposé positif, ceux de la surface de F_2 au potentiel $-V_0$.
Le milieu ambiant est l'air.
- III.3.1. Exprimer le potentiel électrostatique $V(M)$ en un point M situé à la distance r_1 de l'axe de F_1 et r_2 de l'axe de F_2 en fonction de λ , ϵ_0 , r_1 et r_2 . On prendra soin de déterminer exactement, et non à une constante près, ce potentiel : pour cela, on étudiera $V(A_1)$ et $V(A_2)$, les points A_1 et A_2 étant indiqués sur la figure.
- III.3.2. Soit N un point de l'axe Oy que l'on repère par l'angle $\alpha = (\overrightarrow{O_1O_2}, \overrightarrow{O_1N})$.
- III.3.2.1. Déterminer $\vec{E}(N)$ en fonction de α , λ , ϵ_0 et d.
- III.3.2.2. Application numérique : que vaut $\vec{E}(O)$?
On donne $\lambda = 5 \cdot 10^{-10} \text{ C.m}^{-1}$, $d = 50 \text{ cm}$ et $a = 2 \text{ mm}$.
- III.3.2.3. Montrer que le plan yOz est une surface équipotentielle. Quel est son potentiel ?
- III.3.3. De façon purement qualitative, représenter dans le plan $z=0$ l'allure vraisemblable des sections des surfaces équipotentielles à partir des données et des résultats III.3.2. ainsi que les lignes de champ électrostatique que l'on orientera.
- III.3.4. On désire exprimer C, capacité par unité de longueur de l'ensemble des deux fils.
- III.3.4.1. On peut admettre que les fils sont en influence totale. Par analogie avec un condensateur plan, définir C à partir de la densité linéique de charge λ portée par F_1 et de la différence de potentiel entre les deux fils.
- III.3.4.2. Etablir alors l'expression de C en fonction de ϵ_0 , d et a en supposant que $d \gg a$. On pourra pour cela utiliser les résultats obtenus au III.3.1. Calculer numériquement C.
- III.3.5. On cherche à relier d'une autre façon les grandeurs V_0 , ϵ_0 , d, a et λ .
- III.3.5.1. Exprimer le champ électrique total \vec{E} qui existe entre les deux fils, le long de l'axe x'Ox, pour $-\frac{d}{2} + a \leq x \leq \frac{d}{2} - a$.
- III.3.5.2. En utilisant les propriétés de la circulation du vecteur \vec{E} sur un trajet allant de A_1 à A_2 , retrouver l'expression de V_0 en fonction de ϵ_0 , d, a et λ .
- III.3.6. On repère désormais le point M dans le plan $z=0$ par ses coordonnées polaires (r, θ)
On fait l'hypothèse que $r \gg d$.

- III.3.6.1. Que devient dans ce cas l'expression du potentiel établie au III.3.1. ? On pourra faire un développement limité de r_1 et r_2 en fonction de r et d .
- III.3.6.2. Comment peut-on appeler le produit $d\lambda$ qui apparaît dans l'expression précédente ?
- III.3.6.3. Que vaut $\vec{E}(M)$ dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$?
- III.3.6.4. Quelle est l'allure des lignes de champ électrostatique toujours dans le cas $r \gg d$?
- III.3.7. En réalité, l'air ambiant ne peut pas, dans certaines conditions, être assimilé à un isolant parfait. On suppose qu'il peut alors être caractérisé par sa conductivité σ .
- III.3.7.1. Qu'apparaît-il entre les deux conducteurs ?
- III.3.7.2. La conductivité des deux fils étant bien supérieure à σ , on admet que la surface des deux fils reste une équipotentielle et que la répartition du potentiel dans l'espace reste identique à celle établie au III.3.1.
- Exprimer le vecteur densité de courant $\vec{j}_f(N)$ en un point N de l'axe Oy repéré comme au III.3.2. par l'angle $\alpha = (\overrightarrow{O_1O_2}, \overrightarrow{O_1N})$.
- III.3.7.3. Montrer que l'intensité I_f du courant de fuite par unité de longueur sur l'axe des deux fils vaut $I_f = \frac{\sigma \lambda}{\epsilon_0}$.
- III.3.7.4. Déterminer l'expression de la résistance de fuite R_f par unité de longueur. Calculer numériquement R_f pour $\sigma = 10^{-3} \text{ S.m}^{-1}$.
- III.3.7.5. A partir des résultats précédents, établir une relation entre R_f , C_f , ϵ_0 et σ .

