

CAPES de Physique-Chimie

Préparation à l'écrit

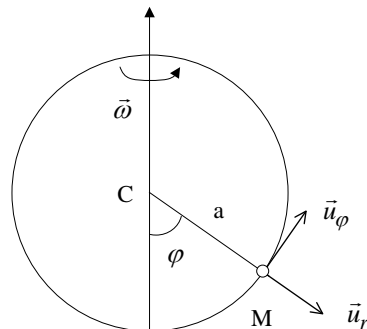
PB Mécanique du point

17 novembre 2005

1. Référentiels non galiléens

Un cercle (C) de centre C et de rayon a est mis en rotation uniforme par rapport au référentiel terrestre (R) supposé galiléen avec une vitesse angulaire ω autour du diamètre vertical de (C). Un anneau M considéré comme un point matériel de masse m peut coulisser sur (C) et est repéré dans le référentiel R' lié à (C) par l'angle φ . La liaison entre le point M et le cercle (C) est supposée sans frottement. La réaction du cercle subie par M sera représentée en base cylindrique par:

$$\vec{N} + \vec{N}' = -N\vec{u}_r - N'\vec{u}_z$$



- (a) Ecrire le principe fondamental de la dynamique appliqué au point M dans le référentiel R' et en déduire les composantes N et N' de la réaction en fonction de m , g , a , ω , φ et $\dot{\varphi}$.
- (b) En posant $\omega_0^2 = g/a$ et $\mu = \omega^2/\omega_0^2$, écrire l'équation différentielle du second ordre qui régit l'évolution temporelle de l'angle φ , sous la forme:

$$\ddot{\varphi} = \omega_0^2 f(\varphi)$$

- (c) En déduire les positions d'équilibre possibles du point M .
- (d) En posant, au voisinage d'une position d'équilibre φ_0 , $\varphi = \varphi_0 + \epsilon$ et en effectuant un développement limité à l'ordre un en ϵ , montrer que la stabilité ou l'instabilité d'une position d'équilibre est déterminée par le terme $(\partial f/\partial \varphi)_{\varphi=\varphi_0}$.
- (e) Déterminer alors dans le cas des positions d'équilibres stables la pulsation ω des oscillations correspondantes.
- (f) Retrouver ces résultats en utilisant une méthode énergétique.

2. Un opérateur projette un solide ponctuel S de masse m du point O à l'instant $t = 0$ avec une vitesse \vec{v}_0 dans le plan (xOz) faisant un angle α avec l'axe Ox . On notera v_0 la norme du vecteur \vec{v}_0 . On suppose que le solide ponctuel est soumis à son poids ainsi qu'à une force de frottement $\vec{f} = -k\vec{v}$ (k constante positive) et que le référentiel terrestre est un référentiel galiléen. La position du solide à l'instant t est définie par le point de l'espace M de coordonnées $(x(t), y(t), z(t))$.

- (a) Déterminer la dimension ainsi que l'unité dans le système $(MKSA)$ de la constante k .
- (b) Exprimer le principe fondamental de la dynamique pour le solide S à l'instant t .
- (c) En déduire les équations différentielles du mouvement.
- (d) Déterminer complètement $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ quel que soit l'instant t .
- (e) Déterminer l'équation de la trajectoire du solide S .
- (f) A partir de l'équation de la trajectoire, examiner le cas correspondant à des frottements très faibles ($k \ll 1$).
- (g) A quel type de trajectoire vous attendez-vous?
- (h) Déterminer alors l'équation de la nouvelle trajectoire.

3. On assimile à un point matériel M de masse m un petit anneau pouvant coulisser sans frottement le long d'un cercle (C) fixe, de centre C et de rayon a . Le cercle (C) se trouve dans un plan vertical. Le point M , repéré en coordonnées cylindriques par l'angle φ , porte une charge q et subit l'action d'une charge Q fixée au sommet du cercle. On pose la quantité suivante:

$$\mu^3 = -\frac{qQ}{32\pi\epsilon_0 m g a^2}$$

- (a) Quelle est la dimension du paramètre μ ?
- (b) On considère les trois cas suivants:

$$1) \mu < 0 \qquad 2) 0 < \mu < 1 \qquad 3) \mu > 1$$

A quelles situations physiques peuvent correspondre ces trois cas?

Pour chacun d'entre eux, tenter de prédire les positions d'équilibre possibles du système.

- (c) Déterminer l'énergie potentielle $U(\varphi)$ de la charge q en M .
- (d) Déterminer les positions d'équilibre du système et étudier leur stabilité.
- (e) Vos prédictions précédentes s'avèrent-elles vérifiées?
- (f) Pour chacun des trois cas représenter graphiquement l'énergie potentielle $U(\varphi)$ de la charge q en M .

ÉTUDE D'UN SPECTROMÈTRE DE MASSE

Les spectromètres de masse, dont le principe et quelques propriétés font l'objet de l'exercice, servent, en particulier, à déterminer l'abondance des divers isotopes d'un élément.

L'appareil étudié comporte une source d'ions **positifs monoatomiques**, isotopes du potassium, de charge électrique égale à e , charge élémentaire. Les ions sont extraits de la source puis accélérés par un champ électrique ; ils pénètrent alors dans un analyseur où un champ magnétique créé par un électro-aimant permet une séparation spatiale des différents isotopes. Un détecteur collecte les ions sortant de l'analyseur. L'abondance isotopique est déduite de la comparaison des courants électriques mesurés par le détecteur pour les divers isotopes.

On suppose que les ions se déplacent dans le vide et que l'influence de leur poids peut être négligée.

Le schéma de l'appareil est donné en figure 1.

Les données numériques utiles sont :

M_1 , masse molaire de l'ion $^{39}\text{K}^+$	$= 38,94 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
M_2 , masse molaire de l'ion $^{40}\text{K}^+$	$= 39,95 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
Constante d'Avogadro	$N = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Tension électrique	$ U_0 = 2000 \text{ V}$
Vitesse de la lumière dans le vide c	$= 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

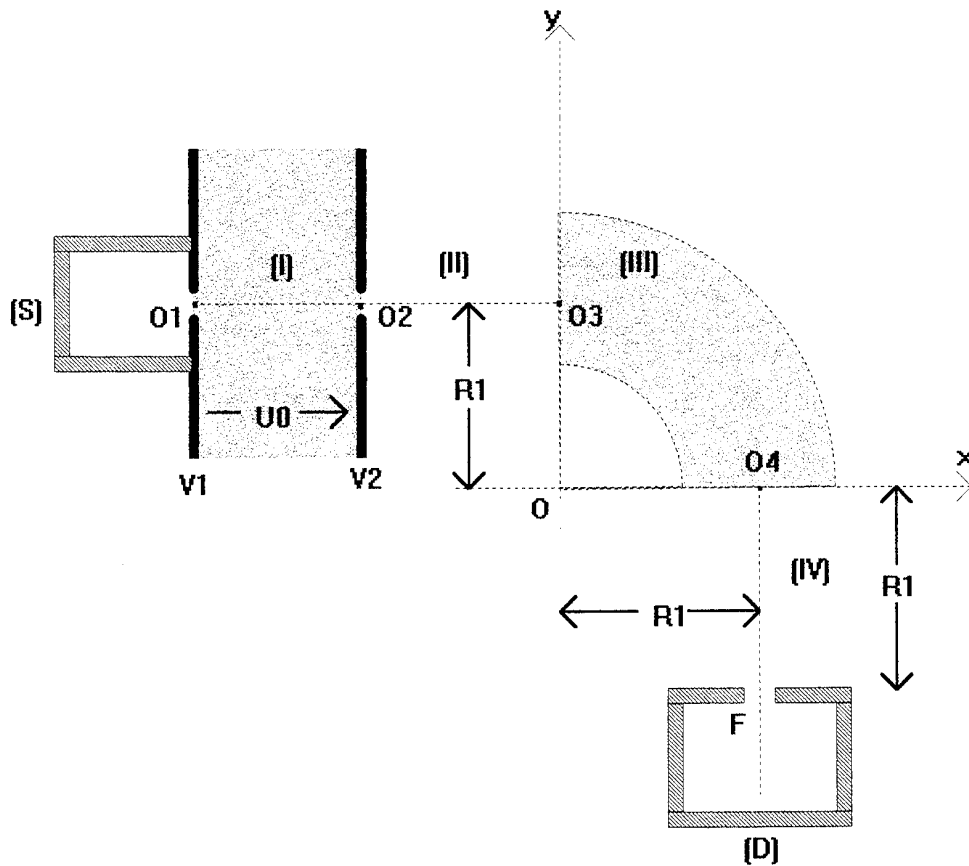


Figure 1

I. Questions préliminaires.

- I.1. Qu'appelle-t-on référentiel galiléen ?
- I.2. Énoncer les trois lois de la dynamique newtonienne.
- I.3. Énoncer le théorème de l'énergie cinétique :
 - a. pour une particule ;
 - b. pour un système de particules.

II. Accélération des ions.

Les ions produits puis stockés dans l'enceinte (S) y sont animés de leur vitesse d'agitation thermique ; ils peuvent en être extraits à travers une fente fine orthogonale au plan de figure, située en O_1 . Ils pénètrent alors dans une zone (I) de l'espace dans laquelle règne le champ électrostatique \vec{E} d'un condensateur, ses armatures métalliques sont planes, parallèles, orthogonales au plan de figure et portées respectivement aux potentiels électriques V_1 et V_2 .

- II.1. Définir et exprimer la force responsable du mouvement des ions dans la région (I).
- II.2. Exprimer la différence de potentiel U_0 définie en figure 1 en fonction des potentiels V_1 et V_2 .
- II.3. En admettant que la vitesse d'injection des ions en O_1 est négligeable, justifier sans calcul la nature du mouvement des ions, entre O_1 et O_2 .
- II.4. Quel doit être le signe de U_0 pour que les ions soient accélérés de O_1 vers O_2 ?

- II.5. Exprimer, en fonction de e et U_0 , l'énergie cinétique d'un ion en O_2 .
- II.6. On suppose les ions non relativistes :
- que signifie cette hypothèse ?
 - exprimer la vitesse numérique v des ions en O_2 en fonction de e , M , N et U_0 , M désignant la masse molaire d'un ion.
- II.7. Calculer les vitesses notées respectivement v_1 et v_2 des ions $^{39}\text{K}^+$ et $^{40}\text{K}^+$.

III. Déviation des ions.

Les ions pénètrent, par la fente fine placée en O_2 , dans la zone (II) où n'existe aucun champ de forces puis en O_3 avec une vitesse v dans l'analyseur, zone (III) de l'espace constituée d'un secteur angulaire de 90° délimité par les demi-plans orthogonaux au plan de figure, de trace Ox et Oy ; il règne, dans la zone (III), un champ magnétostatique uniforme \vec{B} orthogonal au plan de figure.

- III.1. Quelle est la nature du mouvement des ions dans la zone (II) ?
- III.2. Donner l'expression et les caractéristiques de la force agissant sur un ion dans la zone (III).
- III.3. Montrer que la trajectoire d'un ion dans la zone (III) se situe dans le plan de figure.
- III.4. On souhaite que les ions ressortent dans la zone (IV) où n'existe aucun champ de forces et où se trouve un détecteur (D). Quel doit être le sens du champ magnétique ? La résolution de cette question s'appuiera sur un schéma clair.
- III.5. Montrer que le mouvement des ions dans le champ magnétique est uniforme.
- III.6. Établir l'expression du rayon de courbure ρ de la trajectoire d'un ion en fonction de m , masse d'un ion, de e , B et U_0 .
En déduire la nature de la trajectoire d'un ion.
- III.7.a. Calculer la valeur de B_1 du champ magnétique pour laquelle les ions $^{39}\text{K}^+$ passent en O_4 sachant que R_1 vaut 20 cm.
- b. Comment la trajectoire d'un tel ion est-elle modifiée lorsque B est supérieur à B_1 ? Ressort-il de la région (III) à droite ou à gauche de O_4 ?

IV. Séparation des ions.

Le champ magnétique est réglé à la valeur B_1 déterminée en question III.7. Les ions $^{39}\text{K}^+$ suivent donc le trajet O_4F dans la région IV et pénètrent dans le détecteur par le milieu de la fente F. Les ions $^{40}\text{K}^+$, après déviation dans la région (III) suivent dans (IV) une trajectoire faisant un angle θ avec la trajectoire des ions $^{39}\text{K}^+$ dans la même région.

- IV.1. Calculer le rayon R_2 de la trajectoire des ions $^{40}\text{K}^+$ dans la région III et représenter la trajectoire des deux types d'ions dans les régions (III) et (IV).
- IV.2. Déterminer θ .
- IV.3. Exprimer la largeur maximale que doit avoir la fente F pour que les ions $^{40}\text{K}^+$ ne pénètrent pas dans le détecteur.

V. Analyse du mélange d'ions.

Tout en maintenant constante la tension U_0 , on peut modifier la valeur B du champ magnétique. Le détecteur enregistre le courant électrique dû au mouvement des ions.

- V.1. La valeur B étant mesurable, comment peut-on procéder pour déterminer le rapport des masses des deux isotopes ?
- V.2. Exprimer ce rapport en fonction de B_1 et de B_2 , valeur permettant la détection des ions $^{40}\text{K}^+$.
- V.3. Le détecteur enregistre le courant électrique dû au mouvement des ions. On note I_1 et I_2 les intensités, supposées connues, des courants électriques détectés successivement pour les deux types d'ions; en négligeant la différence des vitesses des deux catégories d'ions, donner une expression approchée de la proportion de l'isotope $^{39}\text{K}^+$ dans le mélange d'isotopes.
- V.4. On a mesuré $I_1 = 20$ nA pour les ions $^{39}\text{K}^+$. Déterminer la masse d'isotope $^{39}\text{K}^+$ collectée par minute.