

CAPES de Physique-Chimie

Préparation à l'écrit

PB Mécanique du point: oscillateurs mécaniques

24 novembre 2005

1. Un cube C , de masse m , assimilable à un point matériel M , est relié à un ressort de raideur k et peut glisser sur un plan horizontal sans frottement. Le cube est amené en un point A , à une distance $a = OA$ de sa position d'équilibre O ; il y est lâché à $t = 0$ sans vitesse initiale. Il s'ensuit un mouvement de retour vers le point O que l'on propose d'étudier.
 - (a) A un instant t donné, le cube C est en un point M , à la position $x(t) = OM(t)$ et avec une vitesse de norme $v(t)$.
 - i. Exprimer en ce point l'énergie potentielle U (en la justifiant) et l'énergie mécanique E_m du cube C .
 - ii. Que peut-on dire de l'énergie mécanique E_m ? Justifier votre réponse.
 - (b) Le cube C arrive au point O .
 - i. Déterminer, à partir de l'énergie mécanique E_m , la vitesse du cube en ce point en fonction de k , m et a .
 - ii. En déduire, en fonction de k et a , le travail de la force de rappel au cours du trajet du point A au point O .
 - (c) Caractérisons le mouvement qui se produit autour du point O .
 - i. Ecrire à partir de l'énergie mécanique E_m , l'équation différentielle du mouvement du cube C .
 - ii. En déduire le mouvement $x(t)$ du cube.
 - iii. Quelle est la nature de l'équilibre en O ?
 - (d) Le cube C est maintenant soumis à une force de frottement constante, opposée au mouvement et de norme $F_f = \mu mg$; il est lâché, comme précédemment, du point A sans vitesse initiale.
 - i. Comment appelle-t-on le coefficient μ ?
 - ii. Déterminer la nouvelle expression de la vitesse du cube C lors de son premier passage en O .
 - iii. Quelle condition doit-on avoir sur le coefficient μ pour que le cube parvienne effectivement en O ?
 - iv. Déterminer le nouveau mouvement $x(t)$ du cube.

2. On étudie le mouvement d'oscillation d'un mobile autoporteur S , de masse m , sur une table horizontale. Ce mobile est maintenu entre deux ressorts à réponse linéaire R_1 et R_2 de constante de raideur k_1 et k_2 , tendus entre deux points fixes A et B . Les deux ressorts ont la même longueur à vide l_0 et leur masse est négligeable devant celle du mobile.

A l'équilibre, les longueurs des ressorts sont l_1 et l_2 telles que $L = l_1 + l_2$.

(a) Etude sans frottement.

i. Cette étude sera menée dans le référentiel terrestre que l'on considèrera comme galiléen. Que signifie cette condition?

ii. Le système étant à l'équilibre, faire le bilan des forces qui s'appliquent sur le mobile S et en déduire les expressions analytiques des longueurs l_1 et l_2 en fonction de k_1 , k_2 , l_0 et L .

On donne: $k_1 = 40N.m^{-1}$, $k_2 = 85N.m^{-1}$, $l_0 = 0,3m$ et $L = 0,8m$.

Calculer les longueurs l_1 et l_2 .

iii. On écarte le mobile S de sa position d'équilibre O de telle sorte que son centre d'inertie G se déplace dans la direction AB vers B en un point C tel que $\overline{OC} = a$. Le mobile est alors abandonné sans vitesse initiale. A l'instant t , le centre d'inertie G est repéré par son abscisse $x(t)$. On posera pour la suite $k = k_1 + k_2$.

A. On suppose que le ressort R_2 reste toujours tendu, montrer qu'il en est de même pour le ressort R_1 .

B. Ecrire l'équation différentielle du mouvement dont $x(t)$ est solution. Montrer que ce mouvement est celui d'un oscillateur harmonique dont on exprimera la période T_0 . Déterminer l'expression analytique de $x(t)$.

On donne: $a = 6,0cm$ et $m = 625g$.

Calculer la période T_0 et donner l'expression numérique de $x(t)$.

C. Donner les expressions de l'énergie potentielle élastique $E_p(x)$, de l'énergie mécanique totale $E_m(x)$ et celle de l'énergie cinétique $E_c(x)$.

D. Représenter ces différentes énergies sur un même graphe.

(b) Etude avec frottement

En réalité, il existe une force de frottement $\vec{f} = -\mu\vec{v}$ entre le mobile et la table. μ représente un coefficient de frottement constant et \vec{v} est la vitesse du mobile S .

i. Ecrire l'équation différentielle du mouvement dont $x(t)$ est solution.

ii. Montrer que lorsque μ est inférieur à une valeur μ_0 que l'on déterminera, le mouvement du mobile est celui d'un oscillateur harmonique amorti.

iii. Quelle est l'énergie dissipée par le frottement pendant la durée totale du mouvement?

3. Dans un référentiel galiléen, un point matériel M de masse m et porteur d'une charge électrique positive q , peut se déplacer sur un axe $x'Ox$. Il est situé entre deux autres charges q placées sur cet axe en $x = a$ et $x = -a$. L'énergie potentielle du point M dans le champ de force créé par les deux autres charges est définie par:

$$U(x) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x-a} \right)$$

(a) Montrer que le point matériel M admet une position d'équilibre stable.

- (b) Sachant, d'après la relation de Taylor, qu'au voisinage d'un point $x = x_0$, une fonction scalaire $f(x)$ peut s'écrire de façon approchée sous la forme:

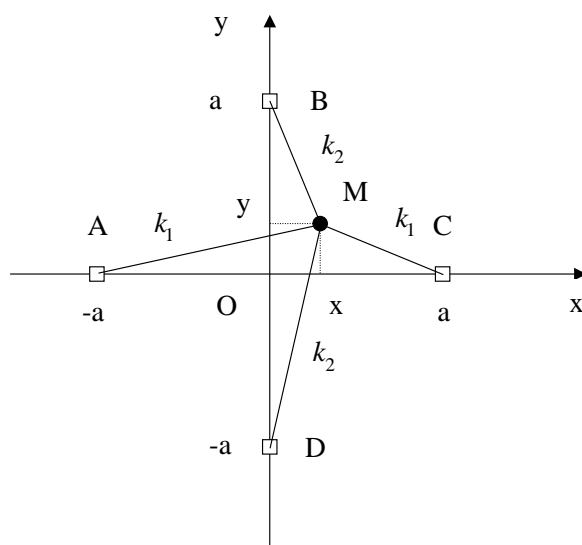
$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=x_0} + \frac{(x - x_0)^2}{2} \left(\frac{d^2 f}{dx^2} \right)_{x=x_0}$$

déterminer l'expression approchée de $U(x)$ au voisinage de la position d'équilibre stable.

- (c) En déduire l'équation du mouvement de ce point M au voisinage de sa position d'équilibre stable.
- (d) Déterminer l'équation de la trajectoire si à $t = 0$:

$$x(t = 0) = \frac{a}{20}, \quad v_x(t = 0) = \frac{a}{20} \sqrt{\frac{q^2}{\pi \epsilon_0 m a^3}}$$

4. Un point matériel M de masse m est lié à quatre points fixes A, B, C et D d'un plan horizontal xOy , par l'intermédiaire de quatre ressorts de même longueur au repos a . Les constantes de raideur des différents ressorts sont définies sur la figure ci-dessous.



- (a) Le point $M(x, y)$ étant au voisinage de l'origine O , déterminer son énergie potentielle E_p .
- (b) En déduire la force \vec{F} appliquée en ce point. Cette force est-elle centrale?
- (c) On suppose que le point M glisse sans frottement dans le plan horizontal. Etudier son mouvement sachant qu'à l'instant $t = 0$ il a été lâché du point $M_0(x_0, 0)$ avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_y$.
- (d) Décrire la trajectoire de M dans les deux cas suivants: $k_2 = 2k_1$, et $k_2 = 9k_1$.

5. Un oscillateur est constitué d'un ressort vertical de constante de raideur k et de longueur au repos l_0 , d'un point matériel M de masse m fixé à l'extrémité inférieure du ressort et d'un amortisseur qui exerce une force de frottement fluide sur le point M de la forme $-\alpha\vec{v}$. L'autre extrémité du ressort est fixée en O' origine d'un référentiel $R'(O'x'y'z')$. Ce référentiel R' est animé d'un mouvement de translation vertical sinusoïdal ($a \cos \omega_e t$) de pulsation ω_e par rapport à un référentiel galiléen $R(Oxyz)$.

(a) Etablir l'équation différentielle du point M dans le référentiel R' .

(b) En posant:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad kl_0 + mg = kl_1 \quad \frac{\alpha}{m} = \frac{2}{\tau} \quad \text{et} \quad X' = x' - l_1,$$

montrer que cette équation différentielle peut se mettre sous la forme:

$$\ddot{X}' + \frac{2}{\tau}\dot{X}' + \omega_0^2 X' = \omega_e^2 a \cos \omega_e t$$

(c) Déterminer la solution de cette équation différentielle en régime forcé.

(d) Représenter graphiquement l'amplitude $A'_m(\omega_e)$ de cette solution.