0utils mathématiques

pour Sciences Physiques

Norbert Garnier

October 29, 2004

Contents

1 Nombres complexes

1.1 Définition

L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes a été introduit de façon à pouvoir résoudre les équations algébriques de la forme:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0 \tag{1}$$

Si l'on considère par exemple l'équation suivante:

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{2}$$

La solution de cette équation est donnée par:

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{3}$$

Or si la quantité $b^2 - 4ac < 0$ cette équation n'admet pas de solution réelle. Pour qu'une telle solution existe, il faut être capable de déterminer la racine carrée d'un nombre réel négatif. On définit alors des nombres dont le carré peut être négatif ; ces nombres sont appelés les nombres complexes.

Un nombre complexe z sera défini à partir de deux unités différentes:

une unité réelle (1) et une unité imaginaire (i) ayant la propriété $i^2 = -1$. Ce nombre complexe s'écrira sous la forme

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R} \tag{4}$$

où x est appelé la partie réelle de z et y la partie imaginaire de z.

$$x = \Re(z) \quad , \quad y = \Im(z) \tag{5}$$

1.2 Propriétés des nombres complexes

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles sont égales et leurs parties imaginaires sont égales.

$$z_1 = x_1 + iy_1 \quad , \quad z_2 = x_2 + iy_2$$

$$z_1 = z_2$$

$$x_1 = x_2 \quad , \quad y_1 = y_2$$

Les nombres complexes dont la partie réelle est nulle sont appelés nombres imaginaires purs.

Pour chaque nombre complexe z on définit le nombre complexe $\bar{z}$ appelé nombre complexe *conjugué* de z par la relation suivante:

$$\bar{z} = x - \imath y, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

1.3 Opérations sur les nombres complexes

1.3.1 Addition/Soustraction

$$\begin{aligned} z_1 \pm z_2 &= (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) \\ &= (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2) \end{aligned}$$

1.3.2 Multiplication

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) \end{aligned}$$

1.3.3 Division

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \\ &= \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \end{aligned}$$

1.4 Représentation trigonomètrique

On associe au complexe $z = x + iy$ le point P de coordonnées (x, y) définit sur la figure 1.

La distance r (distance de P à O) est donnée par la relation: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et θ est l'angle positif que fait OP avec l'axe horizontal. On peut alors écrire:

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$$

d'où:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

c'est ce que l'on appele la forme trigonométrique (ou forme polaire) du nombre complexe z.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

est appelé le module de z et θ l'argument de z. θ vérifie les relations suivantes:

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

et deux de ces relations permettent de définir θ à un multiple de 2π prés.

1.5 Représentation exponentielle

On peut également représenter le nombre complexe z sous une forme dite exponentielle, soit:

$$z = r\exp(\imath\theta)$$

Cette représentation des nombres complexes est particulièrement utilisée pour la multiplication et la division. En effet, soient les deux nombres complexes z_1 et z_2:

$$z_1 = r_1\exp(\imath\theta_1)\ \ ,\ \ z_2 = r_2\exp(\imath\theta_2)$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= [r_1\exp(\imath\theta_1)]\,[r_2\exp(\imath\theta_2)] \\ &= r_1 r_2 \exp(\imath\,[\theta_1 + \theta_2]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1\exp(\imath\theta_1)}{r_2\exp(\imath\theta_2)} \\ &= \frac{r_1}{r_2}\exp(\imath\,[\theta_1 - \theta_2]) \end{aligned}$$

Elle est également employée lors de la résolution d'équation différentielle comportant un second membre de type sinusoidal.

1.6 Exemples d'application

Exemple 1:

Exprimer les complexes (a) $1+i$, (b) $-\sqrt{3}+i$ sous forme trigonométrique.

Réponses:

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\ ,\ -\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

Exemple 2:

Exprimer les complexes (a) 1, (b) -1, (c) i, (d) $-i$ sous forme exponentielle.

Réponses:

$$1=\exp\left(i2k\pi\right)\ ,\ -1=\exp\left(i\left(2k+1\right)\pi\right)$$

$$i=\exp\left(i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right)\ ,\ -i=\exp\left(i\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)\right)$$

2 Fonctions usuelles

Les fonctions les plus couremment rencontrées sont les fonctions circulaires ou trigonomètriques, comme le sinus, le cosinus, la tangente, et les fonctions logarithmiques et exponentielles. Certaines de leurs propriétés sont rappelées ci-dessous.

2.1 Fonctions circulaires

La fonction cosinus est paire, soit $\cos(-x) = \cos x$.
Les fonctions sinus et tangente sont impaires, elles vérifient alors les relations: $\sin(-x) = -\sin x$ et $\tan(-x) = -\tan x$.

2.1.1 Formules élémentaires

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

2.1.2 Fonctions circulaires d'une somme ou d'une différence

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

2.1.3 Formules pour l'angle double

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

2.1.4 Formules de linéarisation

Ces formules sont souvent utilisées pour le calcul de primitive.

A partir des relations précédentes, on peut obtenir les formules de linéarisation suivantes:

$$\begin{aligned}
\sin x \cos y &= \frac{1}{2}(\sin(x+y)+\sin(x-y)) \\
\cos x \sin y &= \frac{1}{2}(\sin(x+y)-\sin(x-y)) \\
\cos x \cos y &= \frac{1}{2}(\cos(x+y)+\cos(x-y)) \\
\sin x \sin y &= \frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))
\end{aligned}$$

2.1.5 Formules de factorisation

Ces formules sont souvent utilisées pour simplifier une équation.

$$\begin{aligned}
\cos x + \cos y &= 2\cos(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2}) \\
\cos x - \cos y &= -2\sin(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2}) \\
\sin x + \sin y &= 2\sin(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2}) \\
\sin x - \sin y &= 2\cos(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})
\end{aligned}$$

2.2 Fonctions logarithmiques et exponentielles

La fonction exponentielle est définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R}; \qquad x \to e^x$$

Sa fonction réciproque, à savoir la fonction logarithme népérien est définie par:

$$\forall x \in]0;\infty[; \qquad x \to \ln x$$

Ces fonctions ont certaines propriétés:

$$\begin{aligned}
\forall x \;\; et \;\; \forall y \in]0;\infty[; \qquad \ln(xy) &= \ln x + \ln y \\
\ln\left(\frac{x}{y}\right) &= \ln x - \ln y \\
\ln(x^n) &= n \ln x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall x \quad et \quad \forall y \in \mathbb{R}; \qquad e^x e^y &= e^{x+y} \\ \frac{e^x}{e^y} &= e^{x-y} \\ (e^x)^n &= e^{nx} \end{aligned}$$

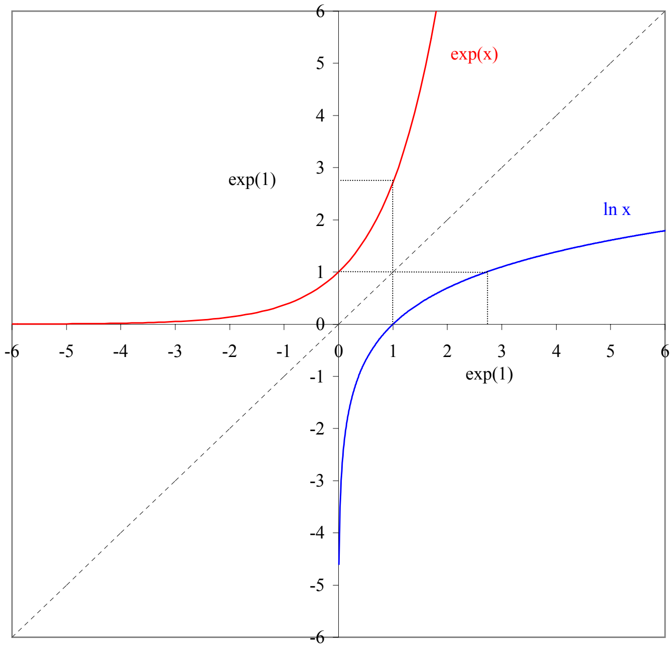

Figure 1: Fonction exponentielle et logarithmique

2.3 Exponentielle complexe

Définition: On appelle exponentielle complexe la fonction qui à $z \in \mathbb{C}$ associe la quantité:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Pour $z = \imath y$, $y \in \mathbb{R}$ on a la relation:

$$e^{\imath y} = \cos y + \imath \sin y$$

En effet, on peut écrire:

$$\begin{aligned}
e^{\imath y} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\imath y)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (\imath)^{2n} \frac{y^{2n}}{(2n)!} + (\imath)^{2n+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + \imath \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \cos y + \imath \sin y
\end{aligned}$$

D'autre part la fonction exponentielle est périodique de période $2\pi\imath$.

En effet, on peut écrire:

$$\begin{aligned}
e^{z+\imath 2k\pi} &= e^z e^{\imath 2k\pi} \\
&= e^z
\end{aligned}$$

3 Dérivation

3.1 Définition

Une fonction f à une variable est dérivable en un point x_0 de son domaine de définition si le nombre dérivé de la fonction en ce point, noté $f'(x_0)$, existe et est fini. Ce nombre dérivé est donné par:

$$f'(x_0) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x_0+\epsilon) - f(x_0)}{\epsilon}$$

Si f est dérivable sur son domaine de définition alors la fonction dérivée de f est définie par:

$$f' : x \ \rightarrow \ f'(x)$$

3.2 Opérations sur les dérivées

3.2.1 Dérivée du produit d'une fonction par un scalaire

$$(\alpha f(x))' = \alpha f'(x)$$

3.2.2 Dérivée d'une somme/différence de deux fonctions

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

3.2.3 Dérivée d'un produit de deux fonctions

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

3.2.4 Dérivée de l'inverse d'une fonction

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$$

3.2.5 Dérivée d'un quotient de deux fonctions

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

3.2.6 Dérivée de la composition de deux fonctions

$$(f \circ g(x))' = f^{'} \circ g(x) \times g'(x)$$

3.2.7 Dérivée d'une fonction réciproque

Soient f une fonction dérivable d'un domaine I sur un domaine J et f^{-1} la fonction réciproque associée. Si la fonction f est dérivable en un point $x \in I$ (avec $f^{'}(x) \neq 0$), alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable au point $y = f(x) \in J$ et vérifie la relation:

$$(f^{-1})^{'}(y) = \frac{1}{f^{'}(x)}$$

En particulier si la fonction f est dérivable d'un domaine I sur un domaine J alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en tout point de J et vérifie la relation:

$$\forall x \in J, \quad (f^{-1})^{'}(x) = \frac{1}{f^{'}(f^{-1}(x))}$$

Remarque 1: il suffit d'intervertir y et x dans l'équation précédente.

Remarque 2: cette expression est utilisée pour la calcul de la dérivée de la fonction $\arctan x$.

3.3 Dérivées de fonctions usuelles

fonction $f(x)$	dérivée $f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
$u^n(x)$	$nu'(x)u^{n-1}(x)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2 x$
$\ln(u(x))$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$
$\exp(u(x))$	$u'(x)\exp(u(x))$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

4 Différentielle de fonctions à une ou plusieurs variables

Considérons une fonction scalaire f à plusieurs variables réelles $(x_1, x_2, ..., x_n)$ soit la fonction $f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

4.1 Définition

On définit la différentielle de cette fonction f par la grandeur:

$$df = f(x_1 + dx_1,\ x_2 + dx_2,\ \cdots,\ x_n + dx_n) - f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$$

où encore:

$$df = f(\vec{r} + d\vec{r}) - f(\vec{r})$$

à une variable on obtient:

$$\begin{aligned} df &= f(x + dx) - f(x) \\ &= f'(x)\ dx \end{aligned}$$

Dans le cas d'une fonction à plusieurs variables on écrit alors:

$$df(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

où le terme $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ représente la dérivée partielle de la fonction f par rapport à la ième variable (toutes les autres variables sont considérées fixes).

La dérivée partielle représente le taux de variation de la fonction dans une direction donnée.

Exemple

Soit une fonction à deux variables u et v, $f(u, v)$.

Les dérivées partielles de cette fonction en un point $\mathrm{M}(u_0, v_0)$ sont définies par les relations:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(u_0 + \epsilon, v_0) - f(u_0, v_0)}{\epsilon} \\ \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(u_0, v_0 + \epsilon) - f(u_0, v_0)}{\epsilon} \end{aligned}$$

4.2 Exemples de calcul de différentielle

Exemple 1:

Soit T la période d'oscillation d'un pendule simple dans le cas des petites oscillations. $T = 2\pi(\frac{l}{g})^{\frac{1}{2}}$

$$dT = \frac{\partial T}{\partial l}dl + \frac{\partial T}{\partial g}dg$$

avec

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial l} &= \frac{2\pi}{g^{1/2}}\frac{1}{2}l^{-1/2} \\ &= \frac{\pi}{(lg)^{1/2}}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial g} &= 2\pi l^{1/2}(-\frac{1}{2})g^{-3/2} \\ &= -\pi\frac{l^{1/2}}{g^{3/2}}\end{aligned}$$

On obtient alors l'expression suivante:

$$dT = \frac{\pi}{(lg)^{1/2}}dl - \pi\frac{l^{1/2}}{g^{3/2}}dg$$

Exemple 2:

Calculer la différentielle de la fonction scalaire à deux variables suivante:

$$f(r,\ \theta) = \frac{K\cos\theta}{r^2}$$

Réponse:

$$df = -2K\frac{\cos\theta}{r^3}dr - K\frac{\sin\theta}{r^2}d\theta$$

4.3 Application en Physique

4.3.1 Calculs d'erreurs ou calculs d'incertitude

4.3.2 Notion d'incertitude

La physique est une science où l'on est souvent amené à effectuer des mesures (la physique est dépendante de mesures). Ces mesures sont donc entachées d'erreurs d'origines diverses. Il y a des erreurs dues à l'environnement de la grandeur mesurée, d'autres dues à l'utilisation d'un appareil de mesure, des erreurs de lecture sur l'appareil utilisé et également des erreurs aléatoires.
Un résultat est généralement présenté sous les formes:

$$x = x_0 \pm \Delta x$$

ou

$$x_0 - \Delta x \leq x \leq x_0 + \Delta x$$

x_0 est une estimation de la valeur exacte (donnée par la moyenne sur quelques mesures) et Δx est l'incertitude absolue estimée par l'expérimentateur en tenant compte des différentes sources d'erreurs.
Δx défini également le degré de confiance de la mesure. Il est tel que la probabilité pour que $x \in [x_0 - \Delta x, x_0 - \Delta x]$ soit la plus élevée possible.
On introduit également la notion d'incertitude relative $\frac{\Delta u}{|u|}$ appelée également précision.

4.3.3 Calculs d'incertitudes

On va maintenant s'intéresser à un problème différent. Soit une grandeur physique A (pour s'implifier non mesurable) définie par une formule faisant intervenir d'autres grandeurs physiques $(a_1, a_2, ..., a_n)$ mesurables et dont les incertitudes ont été déterminées par un expérimentateur. Le problème est de déterminer l'incertitude sur cette grandeur A, soit ΔA. Pour cela on calcule la différentielle de A en prenant soin de regrouper tous les termes ayant le même facteur da_i (pour éviter le problèmes des erreurs liées).

$$dA = \frac{\partial A}{\partial a_1} da_1 + \frac{\partial A}{\partial a_2} da_2 + ... + \frac{\partial A}{\partial a_n} da_n$$

L'incertitude est alors donnée par la relation suivante:

$$\Delta A = \left|\frac{\partial A}{\partial a_1}\right| \Delta a_1 + \left|\frac{\partial A}{\partial a_2}\right| \Delta a_2 + \ldots + \left|\frac{\partial A}{\partial a_n}\right| \Delta a_n$$

4.4 Exemples de calcul d'incertitude

Exemple 1:

L'angle A d'un prisme constitué d'un matériau d'indice n et le minimum D_m de l'angle de déviation D sont liés par la relation suivante:

$$n = \frac{\sin \frac{A+D_m}{2}}{\sin \frac{A}{2}}$$

On mesure $A = 60°$, $D_m = 32°$ avec les incertitudes $\Delta A = \Delta D_m = 1'$.

Détermination de l'expression analytique et de la valeur numérique de l'incertitude relative sur la grandeur n.

On utilisera une méthode classique (calcul de la différentielle) et la méthode de la différentielle logarithmique.

Méthode de la différentielle logarithmique.

$$\ln n = \ln\left(\sin \frac{A+D_m}{2}\right) - \ln\left(\sin \frac{A}{2}\right)$$

$$\frac{dn}{n} = \frac{d\left(\sin \frac{A+D_m}{2}\right)}{\sin \frac{A+D_m}{2}} - \frac{d\left(\sin \frac{A}{2}\right)}{\sin \frac{A}{2}}$$

Réponse:

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{\tan \frac{A+D_m}{2}} - \frac{1}{\tan \frac{A}{2}}\right| \Delta A + \frac{1}{2}\left|\frac{1}{\tan \frac{A+D_m}{2}}\right| \Delta D_m$$

Application numérique:

Attention, les angles s'expriment en radians.

$$\frac{\Delta n}{n} = 2,5.10^{-4}$$

5 Primitives et Intégrales

En physique on est souvent amené à calculer des intégrales et donc à déterminer des primitives. On ne parlera ici que d'intégrales de fonction à une variable. Pour calculer I, il faut pouvoir trouver une fonction $F(x)$ dont la dérivée première soit la fonction $f(x)$.

$$I = \int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Malheureusement ce n'est pas toujours très simple et dans un grand nombre de cas cela reste même impossible analytiquement.
Face à un calcul d'intégrale deux cas de figure peuvent se présenter: soit la primitive $F(x)$ de la fonction $f(x)$ est connue, soit elle ne l'est pas et dans ce cas on dispose de certaines règles de calcul.

5.1 Primitives connues ou usuelles

fonction $f(x)$	primitive $F(x)$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$u'(x)u^n(x)$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}(x)$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln u(x)$
$\exp(nx)$	$\frac{1}{n}\exp(nx)$
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$

5.2 Règles de calcul

5.2.1 Intégration par parties

Prenons par exemple le calcul de l'intégrale suivante:

$$\int_a^b x \ln x \; dx$$

La primitive de la fonction $f(x) = x \ln x$ n'est pas une primitive connue ou usuelle. Pour calculer cette intégrale nous allons utiliser l'intégration par partie. Cette méthode est basée sur la formule suivante:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

A partir de cette équation on peut écrire:

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Cette formule sera utilisée si la primitive du terme de droite est plus simple à déterminer que celle du terme de gauche.

Pour notre exemple il faut procéder de la façon suivante:

$$u'(x) = x \;\Rightarrow u(x) = \frac{x^2}{2}$$
$$v(x) = \ln x \;\Rightarrow v'(x) = \frac{1}{x}$$

En appliquant la formule d'intégration par partie on peut écrire:

$$\begin{aligned}\int_a^b x \ln x \; dx &= \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_a^b - \int_a^b \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\; dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right]_a^b\end{aligned}$$

Autre exemple d'application, le calcul de l'intégrale:

$$\begin{aligned}\int_a^b x\exp(x)\; dx &= [x\exp(x)]_a^b - \int_a^b \exp(x)\; dx \\ &= [(x-1)\exp(x)]_a^b\end{aligned}$$

5.2.2 Changement de variable

Soit l'intégrale suivante à calculer:

$$\int_a^b x\sqrt{x-1}\; dx$$

La primitive de la fonction $f(x) = x\sqrt{x-1}$ n'est pas une primitive connue ou usuelle. Pour calculer cette intégrale nous allons utiliser une méthode qui consiste à effectuer un changement de variable de façon à pouvoir définir une primitive. L'idée est de remplacer la racine carrée par une fonction linéaire. Pour cela on va effectuer le changement de variable suivant:

$$t = \sqrt{x-1}$$

On obtient ainsi:

$$x = t^2 + 1 \;\Rightarrow dx = 2t\ dt$$

L'intégrale s'écrit alors sous la forme:

$$\begin{aligned}\int_a^b x\sqrt{x-1}\ dx &= \int_{\sqrt{a-1}}^{\sqrt{b-1}} (t^2+1)t2t\ dt \\ &= \left[\frac{2}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3\right]_{\sqrt{a-1}}^{\sqrt{b-1}}\end{aligned}$$

La primitive de la fonction $f(x) = x\sqrt{x-1}$ est $\left[\frac{2}{5}(x-1)^{5/2} + \frac{2}{3}(x-1)^{3/2}\right]$.

5.2.3 Cas des fonctions trigonométriques

Pour le calcul des primitives et intégrales de fonctions trigonométriques il existe plusieurs méthodes comme l'utilisation du cosinus de l'angle double, la décomposition d'un produit en somme (linéarisation) ou encore en faisant apparaitre des termes du type $P(\cos x)\sin x$ ou $P(\sin x)\cos x$.

Exemple 1:

$$I = \int \sin^2 x\ dx$$

On utilise la relation suivante:

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 1 - 2\sin^2 x \\ \Rightarrow \sin^2 x &= \frac{1-\cos 2x}{2} \\ \Rightarrow I &= \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right]\end{aligned}$$

Exemple 2:

$$I = \int \cos x \cos 3x \cos 5x\ dx$$

On décompose jusqu'à n'avoir plus que des termes linéaires.

$$\begin{aligned}\cos x \cos 3x &= \frac{1}{2}\left[\cos(x+3x) + \cos(x-3x)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\cos 4x + \cos 2x\right] \\ \cos x \cos 3x \cos 5x &= \frac{1}{2}\cos 4x \cos 5x + \frac{1}{2}\cos 2x \cos 5x \\ &= \frac{1}{4}\left[\cos 9x + \cos 7x + \cos 3x + \cos x\right]\end{aligned}$$

Enfin on obtient:

$$I = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{9}\sin 9x + \frac{1}{7}\sin 7x + \frac{1}{3}\sin 3x + \sin x\right]$$

Exemple 3:

$$I = \int \cos^3 x \; dx$$

avec:

$$\begin{aligned}\cos^3 x &= \cos x \cos^2 x \\ &= \cos x(1 - \sin^2 x)\end{aligned}$$

$$I = \left[\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x\right]$$

5.2.4 Les fractions rationnelles

Une fraction rationnelle est définie comme étant le quotient de deux polynômes.

Pour calculer les primitives de ces fonctions, il faut utiliser une technique bien particulière, que l'on appelle la décomposition en éléments simples.

On se limitera ici au cas où le degré du numérateur est strictement inférieur au degré du dénominateur.

La méthode utilisée est illustrée par les deux exemples suivants:

Exemple 1: On désire déterminer une primitive de la fonction f suivante:

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)^2}$$

Pour cela on décompose la fonction f en éléments simples, soit:

$$f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

Le calcul permet de déterminer la valeur des trois coefficients A, B et C.

$A = 1, B = C = -1$.

On peut alors écrire la fonction f sous la forme:

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{-1}{(x+1)} + \frac{-1}{(x+1)^2}$$

Les primitives de chacun des trois termes sont simples à déterminer. Soit $F(x)$ la primitive de $f(x)$:

$$F(x) = \ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{(x+1)}$$

Exemple 2: Soit la fonction suivante:

$$f(x) = \frac{x}{(x^2+1)(x-1)}$$

Le terme x^2+1 n'ayant pas de racines réelles, on va écrire f sous la forme:

$$f(x) = \frac{A}{(x-1)} + \frac{(Bx+C)}{(x^2+1)}$$

Le calcul permet de déterminer la valeur des trois coefficients A, B et C.

$A = C = 1/2, B = -1/2.$

On peut alors écrire la fonction f sous la forme:

$$f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{2}\frac{(x-1)}{(x^2+1)}$$

La primitive $F_1(x)$ du premier terme est simple à déterminer et vaut:

$$F_1(x) = \frac{1}{2}\ln|x-1|$$

Par contre la détermination de la primitive $F_2(x)$ du second terme est moins immédiate à déterminer. Pour cela on procède en deux étapes:

1. La première consiste à faire apparaitre au numérateur la dérivée du dénominateur. Pour cela il suffit d'écrire:
$$-\frac{1}{2}\frac{(x-1)}{(x^2+1)} = -\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2}2x-1}{(x^2+1)}$$
La primitive du premier terme est $F_{2,1}(x)$ et est définie par l'expression:
$$F_{2,1}(x) = -\frac{1}{4}\ln(x^2+1)$$

2. La seconde étape consiste à déterminer une primitive $F_{2,2}(x)$ de:
$$\frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+1)}$$
Cette primitive est donnée par:
$$F_{2,2}(x) = \frac{1}{2}\arctan(x)$$

5.2.5 Application

Calculer les primitives suivantes:

$a)\ \displaystyle\int \cos^2 x\ dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\ dx = \left[\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x\right]$

$b)\ \displaystyle\int \tan x\ dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\ dx = [-\ln|\cos x|]$

$c)\ \displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\ dx = \frac{\sin x(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x}\ dx = \left[\frac{1}{\cos x}+\cos x\right]$

$d)\ \displaystyle\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}},\ (on\ pose\ x = a\tan t), = \frac{1}{a^2}[\sin t]$

$e)\ \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+ax^2}}\ dx,\ (de\ la\ forme\ u^{'}(x)u^n(x)), = \left[\frac{1}{a}(1+ax^2)^{1/2}\right]$

$f)\ \displaystyle\int x(1+ax^2)^{3/2}\ dx,\ (de\ la\ forme\ u^{'}(x)u^n(x)), = \left[\frac{1}{5a}(1+ax^2)^{3/2}\right]$

$g)\ \displaystyle\int \frac{x}{(x+1)^3}\ dx,\ (décomposition\ en\ éléments\ simples), = \left[-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2}\right]$

$h)\ \displaystyle\int x\sin(2x)\ dx,\ (intégration\ par\ partie), = -\frac{1}{2}\left[x\cos(2x)-\frac{1}{2}\sin(2x)\right]$

$i)\ \displaystyle\int \frac{5x+2}{x^3-5x^2+4x}\ dx,\ (décomposition\ en\ éléments\ simples), = \frac{1}{2}\ln|x|-\frac{7}{3}\ln|x-1|+\frac{11}{6}\ln|x-4|$

6 Développements limités

6.1 Définition

Soit une fonction réelle d'une seule variable réelle x définie sur un intervalle de définition I. Soit $x_0 \in I$. On dit que la fonction f possède un développement limité d'ordre n ($n \in \mathbb{N}$) au point x_0 si il existe $n+1$ nombres réels $(c_0, c_1, \ldots, c_n)$ tels que l'on puisse écrire la relation suivante:

$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + \ldots + c_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \epsilon\,(x)\,; \quad \lim_{x \to x_0} \epsilon(x) = 0$$

Si la fonction f est n fois dérivable en x_0, on peut alors réécrire la relation précédente sous la forme:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \epsilon\,(x)\,; \quad \lim_{x \to x_0} \epsilon(x) = 0$$

6.2 Développements limités en 0

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n \epsilon\,(x)\,; \quad \lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$$

6.3 Développements limités en 0 de fonctions usuelles

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \epsilon(x)$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n \epsilon(x)$$

$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n \epsilon(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n} \epsilon(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n} \epsilon(x)$$

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + x^n \epsilon(x)$$

7 Série de Fourier

7.1 Forme réelle

On considère une fonction $f(t)$ de la variable réelle t et de période T. Cette fonction vérifie donc la relation:

$$f(t+nT) = f(t),\ \ avec\ n \in \mathbb{Z}$$

Sous certaines conditions de définition de la fonction et de continuité de cette dernière ainsi que de sa dérivée première (conditions de Dirichlet), il est alors possible de représenter la fonction $f(t)$ par une série de la forme:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t) \tag{6}$$

dans laquelle $a_0,\ a_n\ et\ b_n$ sont des coefficients indépendants de la variable t et $\omega_0 = 2\pi/T$ représente une pulsation.
Cette série s'appelle le développement en série de Fourier de la fonction $f(t)$.

Pour déterminer complètement cette série, il faut définir ses coefficients.

7.1.1 Calcul des coefficients

Pour déterminer ces coefficients, nous allons utiliser les relations suivantes:

$$\begin{aligned}
\int_0^T \cos(m\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)\,dt &= \frac{T}{2}\left(\delta_{m,n} + \delta_{m,-n}\right) \\
\int_0^T \sin(m\omega_0 t)\sin(n\omega_0 t)\,dt &= \frac{T}{2}\left(\delta_{m,n} - \delta_{m,-n}\right) \\
\int_0^T \cos(m\omega_0 t)\sin(n\omega_0 t)\,dt &= 0
\end{aligned} \tag{7}$$

où $\delta_{m,n}$ est le symbole de Kronecker défini par:

$$\delta_{m,n} =^{1\ m=n}_{0\ m\neq n}$$

Pour calculer la première intégrale, on commence par une linéarisation.

$$\cos(m\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t) = \frac{1}{2}(\cos(m+n)\omega_0 t + \cos(m-n)\omega_0 t) \tag{8}$$

on obtient alors:

$$\int_0^T \cos(m\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((m+n)\omega_0 t)}{(m+n)\omega_0} + \frac{\sin((m-n)\omega_0 t)}{(m-n)\omega_0}\right]_0^T \tag{9}$$

Cette intégrale est nulle sauf dans les cas où $m = -n$ et $m = n$.

Dans ces cas nous avons:

$$\begin{aligned}\int_0^T \cos^2(n\omega_0 t)\,dt &= \frac{1}{2}\int_0^T (1+\cos(2n\omega_0 t))\,dt \\ &= \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin(2n\omega_0 t)}{2n\omega_0}\right]_0^T \\ &= \frac{T}{2}\end{aligned} \tag{10}$$

Les deux autres relations sont définies en utilisant un calcul analogue au précédent.

Multiplions maintenant les deux membres de la série de Fourier (en renommant les indices de sommation $n \to m$ par $\cos(n\omega_0 t)$ et intégrons entre 0 et T.

On obtient alors:

$$\int_0^T f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt = \int_0^T \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(m\omega_0 t) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(m\omega_0 t)\right]\cos(n\omega_0 t)\,dt$$

Toutes les intégrales du second membre sont nulles à l'exception du terme:

$$\int_0^T \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(m\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)\,dt$$

qui est non nul pour $m = n$ et vaut dans ce cas $T/2$.

On obtient alors:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt \tag{11}$$

Par un calcul analogue, on trouve:

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt \tag{12}$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt \tag{13}$$

7.2 Forme complexe

Soit le développement en série de Fourier de la fonction $f(t)$:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t)$$

En utilisant les relations suivantes:

$$\cos(n\omega_0 t) = \frac{\exp(\imath n\omega_0 t) + \exp(-\imath n\omega_0 t)}{2}$$
$$\sin(n\omega_0 t) = \frac{\exp(\imath n\omega_0 t) - \exp(-\imath n\omega_0 t)}{2\imath}$$

on peut réécrire ce développement sous la forme:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n - \imath b_n)}{2} \exp(\imath n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n + \imath b_n)}{2} \exp(-\imath n\omega_0 t) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n - \imath b_n)}{2} \exp(\imath n\omega_0 t) + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{(a_{-n} + \imath b_{-n})}{2} \exp(\imath n\omega_0 t) \end{aligned}$$

soit encore

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f_n \exp(\imath n\omega_0 t) \tag{14}$$

avec

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{a_0}{2} \\ f_n &= \frac{(a_n - \imath b_n)}{2} \quad \textit{pour } n \geq 1 \\ f_n &= \frac{(a_{-n} + \imath b_{-n})}{2} = f_n^* \quad \textit{pour } n \leq -1 \end{aligned}$$

7.2.1 Calcul des coefficients

Pour calculer les coefficients f_n on utile la relation suivante:

$$\int_0^T \exp(\imath m\omega_0 t) \exp(-\imath n\omega_0 t)\, dt = T\delta_{mn}$$

Après avoir renommer les indices de sommation $(n \to m)$ de l'expression du développement en série de Fourier de la fonction $f(t)$ sous sa forme complexe, multiplions les deux membres par la quantité $\exp(-\imath n\omega_0 t)$ et intégrons entre 0 et T.

On obtient alors:

$$\int_0^T f(t) \exp(-\imath n\omega_0 t)\, dt = \int_0^T \sum_{-\infty}^{\infty} f_m \exp(\imath m\omega_0 t) \exp(-\imath n\omega_0 t)\, dt$$

Le seul terme non nul est celui correspondant au cas où $m = n$ et sa valeur vaut T. On obtient ainsi l'expression des coefficients recherchés, à savoir:

$$f_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \exp\left(-\imath n \omega_0 t\right) dt$$

On peut ensuite déterminer les coefficients a_n et b_n.

$$a_0 = 2f_0, \quad b_0 = 0$$

$$a_n = (f_n + f_n^*) = 2\Re(f_n),$$

$$b_n = \frac{f_n^* - f_n}{\imath} = -2\Im(f_n)$$

7.3 Application

Soit la fonction f de la variable réelle t définie par:

$$f(t) =_{0 \;\; \frac{T}{2} \leq t \leq T}^{1 \;\; 0 \leq t \leq \frac{T}{2}}$$

avec $T = 10$.

On désire écrire un développement en série de Fourier de cette fonction.

On commence par définir la pulsation associée à le période T, soit $\omega_0 = \pi/5$.

7.3.1 Développement sous forme réelle

On cherche à déterminer les coefficients $a_0,\ a_n\ et\ b_n$.

Calcul de a_0

$$\begin{aligned} a_0 =& \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt \\ =& \frac{2}{T}\int_0^{T/2} dt \\ a_0 =& 1 \end{aligned}$$

Calcul de a_n

$$\begin{aligned} a_n =& \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt \\ =& \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt \\ =& \frac{2}{T}\int_0^{T/2} \cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt \\ a_n =& 0 \end{aligned}$$

Calcul de b_n

$$\begin{aligned}
a_n =& \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(n\omega_0 t\right)dt \\
=& \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt \\
=& \frac{2}{T}\int_0^{T/2} \sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt \\
=& -\frac{1}{n\pi}\left[\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt\right]_0^{T/2} \\
=& -\frac{1}{n\pi}\left[\cos(n\pi) - \cos(0)\right]
\end{aligned}$$

Deux cas se présente:

1. si n est pair, alors $b_n = 0$
2. si n est impair alors $b_n = 2/(n\pi)$

Le développement en série de Fourier de la fonction f permet d'écrire:

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n\ impair} \frac{2}{n\pi}\sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)$$

7.3.2 Développement sous forme complexe

On cherche à déterminer les coefficients f_n.

Calcul de f_0

$$\begin{aligned} f_0 =& \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \\ =& \frac{1}{T}\int_0^{T/2} dt \\ f_0 =& \frac{1}{2} \\ a_0 =& 2f_0 \\ =& 1 \end{aligned}$$

Calcul de f_n

$$\begin{aligned} f_n =& \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\exp\left(-\imath n\frac{2\pi}{T}t\right)dt \\ =& \frac{1}{T}\int_0^{T/2} \exp\left(-\imath n\frac{2\pi}{T}t\right)dt \\ =& \frac{\imath}{2n\pi}\left[\exp(-\imath n\pi)-\exp(0)\right] \\ =& \frac{\imath}{2n\pi}\left[\cos(n\pi)-1\right] \end{aligned}$$

Deux cas se présente:

1. si n est pair, alors $f_n = 0$
2. si n est impair alors $f_n = -\imath/(n\pi)$

On peut alors maintenant déterminer les coefficients a_n et b_n de la forme réelle.

Pour n pair, on a:

$$\begin{aligned} a_n =& 2\Re(f_n) & b_n =& -2\Im(f_n) \\ =& 0 & =& 0 \end{aligned}$$

Pour n impair, on a:

$$\begin{aligned} a_n =& 2\Re(f_n) & b_n =& -2\Im(f_n) \\ =& 0 & =& \frac{2}{n\pi} \end{aligned}$$

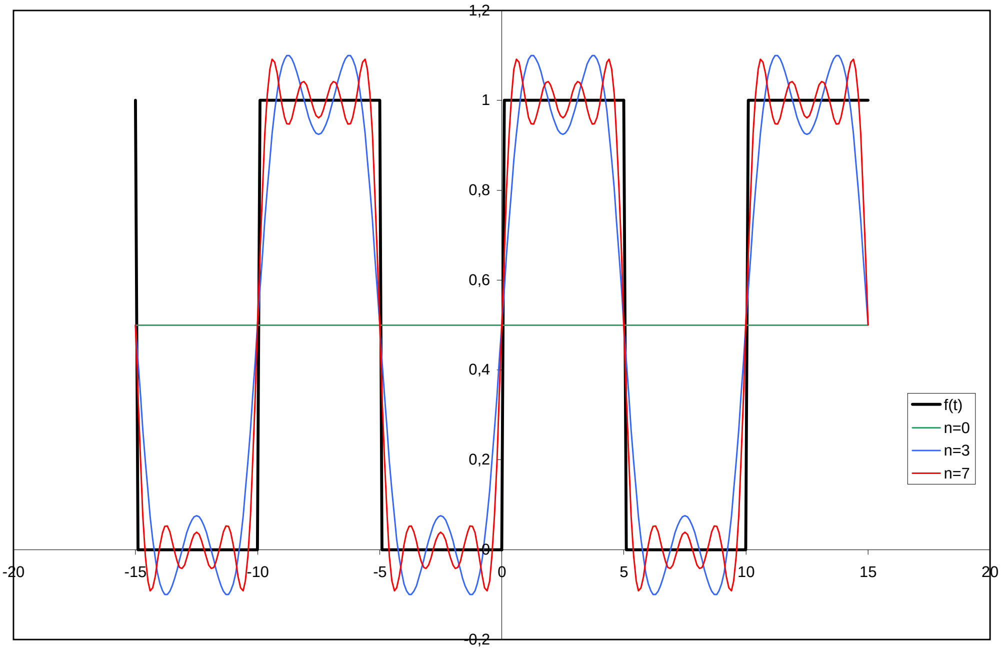

Figure 2: Développement en série de Fourier de la fonction f(t)

8 Transformation de Fourier

La transformée de Fourier intervient dans de nombreux domaines de la physique (optique, traitement du signal, cristallographie) et de la chimie (spectroscopie infra rouge par transformée de Fourier, résonance magnétique nucléaire).
La transformée de Fourier permet l'analyse d'un signal non pas en fonction du temps mais dans l'espace des fréquences ou pulsations. On parle alors du contenu fréquentiel.

8.1 Définition

A partir du développement en série de Fourier d'une fonction $f(t)$ périodique (de période T) et en utilisant la dérivation heuristique, on définit la transformée de Fourier $\tilde{f}(\omega)$ de la fonction $f(t)$ par la relation suivante:

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-\imath\omega t) dt$$

De la même façon on peut définir la transformée de Fourier inverse de $\tilde{f}(\omega)$ par:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) \exp(\imath\omega t) d\omega$$

8.2 Définition de la distribution de Dirac

En appliquant successivement les transformations $f(t) \to \tilde{f}(\omega)$ et $\tilde{f}(\omega) \to f(t)$ on effectue une opération neutre. Cela permet de définir la distribution de Dirac:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\imath\omega t) d\omega$$

qui a la propriété suivante:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t')\delta(t - t') dt' = f(t)$$

8.3 Calcul de la transformée de Fourier d'une fonction

Considèrons une fonction f de la seule variable réelle t. On peut toujours développer cette fonction en une partie paire f_{paire} et une partie impaire $f_{impaire}$.

$$f(t) = \frac{f(t)+f(-t)}{2} + \frac{f(t)-f(-t)}{2}$$
$$f(t) = f_{paire}(t) + f_{impaire}(t)$$

La transformée de Fourier de la fonction f s'écrit alors:

$$\tilde{f}(\omega) = \tilde{f}_{paire}(\omega) + \tilde{f}_{impaire}(\omega)$$

$$\tilde{f}_{paire}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(f(t)+f(-t))}{2} \exp(-\imath\omega t)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(-\imath\omega t)dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(-t)\exp(-\imath\omega t)dt$$

$$= \frac{1}{2}\tilde{f}(\omega) + \frac{1}{2}\int_{+\infty}^{-\infty} (-f(t))\exp(\imath\omega t)dt$$

$$= \frac{1}{2}\tilde{f}(\omega) + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(-\imath(-\omega)t)dt$$

$$= \frac{1}{2}\tilde{f}(\omega) + \frac{1}{2}\tilde{f}(-\omega)$$

On obtient ainsi les relations suivantes:

$$\tilde{f}_{paire}(\omega) = \frac{\tilde{f}(\omega)+\tilde{f}(-\omega)}{2}$$
$$et$$
$$\tilde{f}_{impaire}(\omega) = \frac{\tilde{f}(\omega)-\tilde{f}(-\omega)}{2}$$

Si la fonction $f(t)$ est réelle, on peut montrer que:

$$\tilde{f}(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(\imath\omega t)dt$$
$$= \bar{\tilde{f}}(\omega)$$

Nous obtenons alors que la transformée de Fourier d'une fonction paire est elle même une fonction paire et une fonction réelle. Inversement la transformée de Fourier d'une fonction impaire est une fonction impaire et immaginaire pure. Ceci peut être résumé par les deux équations suivantes:

$$\tilde{f}_{paire}(\omega) = \Re\left(\tilde{f}(\omega)\right)$$
$$\tilde{f}_{impaire}(\omega) = \imath\Im\left(\tilde{f}(\omega)\right)$$

8.4 Applications

8.4.1 Cas d'une distribution gaussienne

Soit la distribution gaussienne $g(t)$ normalisée et de largeur à mi hauteur σ.

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)$$

avec

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = 1$$

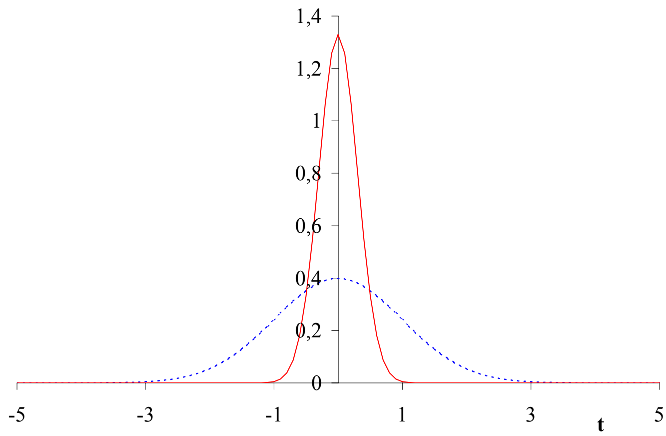

Figure 3: Distribution gaussienne avec $\sigma = 1.0, 0.3$

Calculons la transformée de Fourier de cette distribution gaussienne.

$$\tilde{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) \exp(-\imath\omega t) dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2 + 2\imath\sigma^2\omega t}{2\sigma^2}\right) dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(t + \imath\sigma^2\omega)^2 + \omega^2\sigma^4}{2\sigma^2}\right) dt$$

$$= \exp\left(-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(t + \imath\sigma^2\omega)^2}{2\sigma^2}\right) dt$$

$$\tilde{g}(\omega) = \exp\left(-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}\right)$$

Remarque: La tranformée de Fourier d'une gaussienne de largeur σ est une gaussienne de largeur inverse σ^{-1}.

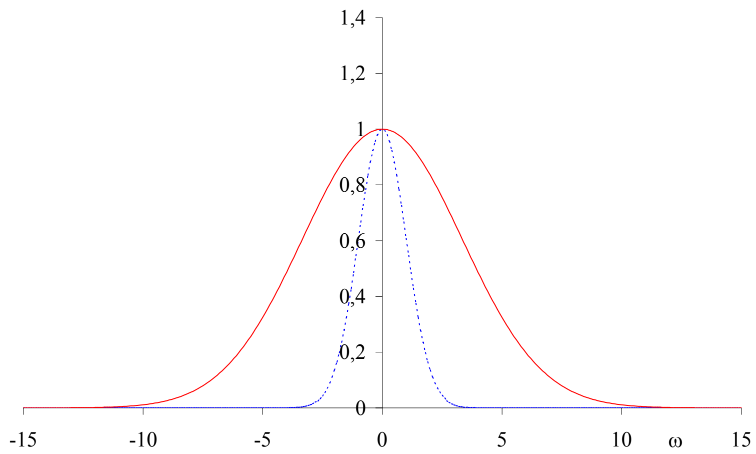

Figure 4: Tranformées de Fourier des distributions gaussiennes avec $\sigma = 1.0, 0.3$

9 Méthodes de résolution de certaines équations différentielles

Soit une fonction y d'une seule variable réelle x.

9.1 Résolution d'équations différentielles à coefficients constants

9.1.1 Equation différentielle du premier ordre à coefficients constants sans second membre

Soit l'équation:

$$\frac{dy}{dx} + ay = 0 \tag{15}$$

avec a constant $\in \mathbb{R}$

Cette équation peut être réécrite sous la forme:

$$\frac{dy}{y} = -adx$$

soit en intégrant:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \ln y = -ax + C \\
&\Rightarrow \exp(\ln y) = \exp(-ax + C) \\
&\Rightarrow y = \exp(C)\exp(-ax) \\
&\Rightarrow y(x) = K \exp(-ax)
\end{aligned}$$

K est appelée constante d'intégration et sera déterminée à partir d'une condition initiale (x_0, y_0).

9.1.2 Equation différentielle du premier ordre à coefficients constants avec second membre constant

Soit l'équation:

$$\frac{dy}{dx} + ay = b \tag{16}$$

avec a et b des constantes $\in \mathbb{R}$

La solution y de cette équation est la somme de deux solutions: y_1 et y_2, soit:

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x)$$

y_1 est la solution générale de l'équation différentielle sans second membre et doit donc vérifier l'équation:

$$\frac{dy_1}{dx} + ay_1 = 0$$

y_2 est la solution particulière et doit vérifier l'équation:

$$\frac{dy_2}{dx} + ay_2 = b$$

D'après ce que l'on a vu précédemment, la solution y_1 est donnée par:

$$y_1(x) = K \exp(-ax)$$

La solution particulière y_2 est recherchée sous la même forme mathématique que le second membre, soit dans notre cas sous la forme d'une constante y_2=C_2 et doit donc vérifier l'équation:

$$\frac{dy_2}{dx} + ay_2 = b$$

soit

$$\Rightarrow aC_2 = b$$
$$\Rightarrow C_2 = \frac{b}{a}$$
$$\Rightarrow y_2(x) = \frac{b}{a}$$

La solution y de l'équation (7) peut alors s'écrire sous la forme:

$$y(x) = K \exp(-ax) + \frac{b}{a}$$

La constante K sera déterminée à partir des conditions initiales.

9.1.3 Application

La vitesse v d'un corps ponctuel de masse constante m en chute libre dans l'air (résistance $-K\vec{v}$ avec K =constante) obéit à l'équation différentielle suivante:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{K}{m}v = g$$

Sachant qu'au temps $t = t_1$ la vitesse vaut $v\,(t = t_1) = v_1$, déterminer l'expression de la vitesse en fonction du temps.

Réponse:

$$v(t) = \frac{mg}{K} + \left(v_1 - \frac{mg}{K}\right) \exp -\frac{K}{m}\,(t - t_1)$$

9.1.4 Equation différentielle du second ordre à coefficients constants et avec second membre

Soit l'équation:

$$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=f \tag{17}$$

avec a, b et c des constantes $\in \mathbb{R}$ et f une fonction de x.

La résolution de cette équation différentielle comporte deux étapes.

La première étape consiste à déterminer la solution générale y_1 de l'équation différentielle sans second membre. Cette solution doit vérifier l'équation:

$$a\frac{d^2y_1}{dx^2}+b\frac{dy_1}{dx}+cy_1=0$$

On procède de la façon suivante: on recherche la solution y_1 sous la forme $y_1(x)=A\exp(rx)$. On obtient alors l'équation caractéristique suivante:

$$ar^2+br+c=0$$

dont les racines vont permettre de déterminer la solution générale $y_1(x)$.

Soit $\Delta=b^2-4ac$ le discriminent de l'équation caractéristique. Selon la valeur et le signe de Δ nous obtiendrons différents types de solutions.

Premier cas: Si $\Delta>0$, l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2 définies par:

$$r_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

La solution générale $y_1(x)$ sera alors de la forme:

$$y_1(x)=A_1\exp(r_1x)+A_2\exp(r_2x)$$

avec A_1 et A_2 des constantes $\in \mathbb{R}$.

Second cas: Si $\Delta=0$, l'équation caractéristique admet alors une racine double réelle r définie par:

$$r=-\frac{b}{2a}$$

Dans ce cas, la solution générale $y_1(x)$ s'écrira sous la forme:

$$y_1(x)=(A_1x+A_2)\exp(rx)$$

avec A_1 et A_2 des constantes $\in \mathbb{R}$.

Troisième cas: Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées r_1 et r_2 définies par:

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \imath\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

La solution générale $y_1(x)$ sera alors de la forme:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= A_1 \exp(r_1 x) + A_2 \exp(r_2 x) \\ &= \left[A_1 \exp\left(\imath\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x\right) + A_2 \exp\left(-\imath\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x\right)\right] \exp\left(-\frac{b}{2a}x\right) \end{aligned}$$

et pourra également s'exprimer sous les formes:

$$y_1(x) = \left[A_1' \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x\right) + A_2' \sin\left(-\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x\right)\right] \exp\left(-\frac{b}{2a}x\right)$$

ou

$$y_1(x) = A' \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x + \Phi\right) \exp\left(-\frac{b}{2a}x\right)$$

La seconde étape consiste à déterminer une solution particulière y_2 vérifiant l'équation différentielle avec second membre. Cette solution est recherchée sous la même forme mathématique que le second membre f.

Enfin la solution de l'équation différentielle (8) est définie par:

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x)$$

9.1.5 Application

Résolution de l'équation différentielle d'un oscillateur unidimensionel harmonique amorti et forcé par un terme sinusoidal.

Soit l'équation:

$$m\ddot{y} + h\dot{y} + ky = F_0 \cos \Omega t$$

La solution $y(t)$ de cette équation différentielle est définie par:

$$y\,(t) = y_1\,(t) + y_2\,(t)$$

où $y_1(t)$ est la solution générale de l'équation différentielle sans second membre et $y_2(t)$ la solution particuliaire. Suivant la valeur des coefficients, la solution $y_1(t)$ est donnée par un des trois cas définis précédemment.

Il reste alors à déterminer la solution particuliaire $y_2(t)$. Cette solution est recherchée sous la même forme mathématique que le second membre, soit sous la forme:

$$y_2(t) = A \cos(\Omega\ t + \Phi)$$

Pour déterminer $y_2(t)$ il nous faut définir A et Φ.

Pour cela nous allons utiliser la notation complexe qui consiste à associer au réel $y_2(t)$ un complexe $\bar{y}_2(t)$ dont la partie réelle est égale à $y_2(t)$, soit:

$$\bar{y}_2(t) = A \exp[i(\Omega\ t + \Phi)]$$

On obtient alors l'équation différentielle que doit vérifier $\bar{y}_2(t)$, soit:

$$m\ddot{\bar{y}}_2 + h\dot{\bar{y}}_2 + k\bar{y}_2 = F_0 \exp(i\Omega\ t)$$

On peut alors écrire la relation suivante:

$$A \exp(i\Phi) = \frac{F_0}{(k - m\Omega^2) + i\Omega\ h}$$

qui va nous permettre de définir dans un premier temps la solution $\bar{y}_2(t)$ puis la solution $y_2(t) = \Re(\bar{y}_2(t))$ à partir de la détermination de $A(\Omega)$ et $\Phi(\Omega)$. En écrivant le complexe à droite de l'égalité sous forme exponentielle, on obtient:

$$A(\Omega) = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + \Omega^2 h^2}}$$

$$\Phi(\Omega) = -\arctan \frac{\Omega\ h}{(k - m\Omega^2)}$$

10 Systèmes de coordonnées

10.0.6 Coordonnées cartésiennes

Composantes et trièdre direct:

$$(x,\ y,\ z) \quad , \quad (\vec{e}_x,\ \vec{e}_y,\ \vec{e}_z)$$

Vecteur position:

$$\vec{r} = x\ \vec{e}_x + y\ \vec{e}_y + z\ \vec{e}_z$$

Vecteur déplacement élémentaire:

$$d\vec{r} = dx\ \vec{e}_x + dy\ \vec{e}_y + dz\ \vec{e}_z$$

Eléments de surface:

$$d\vec{S} = \pm\ dy\ dz\ \vec{e}_x,\ \pm\ dz\ dx\ \vec{e}_y,\ \pm\ dx\ dy\ \vec{e}_z$$

Elément de volume:

$$d\tau = dx\ dy\ dz$$

10.0.7 Coordonnées cylindriques

Composantes et trièdre direct:

$$(r,\ \varphi,\ z) \quad , \quad (\vec{e}_r,\ \vec{e}_\varphi,\ \vec{e}_z)$$

Vecteur position:

$$\vec{r} = r\ \vec{e}_r + z\ \vec{e}_z$$

Vecteur déplacement élémentaire:

$$d\vec{r} = dr\ \vec{e}_r + r\ d\varphi\ \vec{e}_\varphi + dz\ \vec{e}_z$$

Eléments de surface:

$$d\vec{S} = \pm\ r\ d\varphi\ dz\ \vec{e}_r,\ \pm\ dr\ dz\ \vec{e}_\varphi,\ \pm\ r\ dr\ d\varphi\ \vec{e}_z$$

Elément de volume:

$$d\tau = r\ dr\ d\varphi\ dz$$

10.0.8 Coordonnées sphériques

Composantes et trièdre direct:

$$(r,\ \theta,\ \varphi) \quad , \quad (\vec{e}_r,\ \vec{e}_\theta,\ \vec{e}_\varphi)$$

Vecteur position:

$$\vec{r} = r\ \vec{e}_r$$

Vecteur déplacement élémentaire:

$$d\vec{r} = dr\ \vec{e}_r + r\ d\theta\ \vec{e}_\theta + r \sin\theta\ d\varphi\ \vec{e}_\varphi$$

Eléments de surface:

$$d\vec{S} = \pm\ r^2 \sin\theta\ d\theta\ d\varphi\ \vec{e}_r,\ \pm\ r\ \sin\theta\ dr\ d\varphi\ \vec{e}_\theta,\ \pm\ r\ dr\ d\theta\ \vec{e}_\varphi$$

Elément de volume:

$$d\tau = r^2\ \sin\theta\ dr\ d\theta\ d\varphi$$

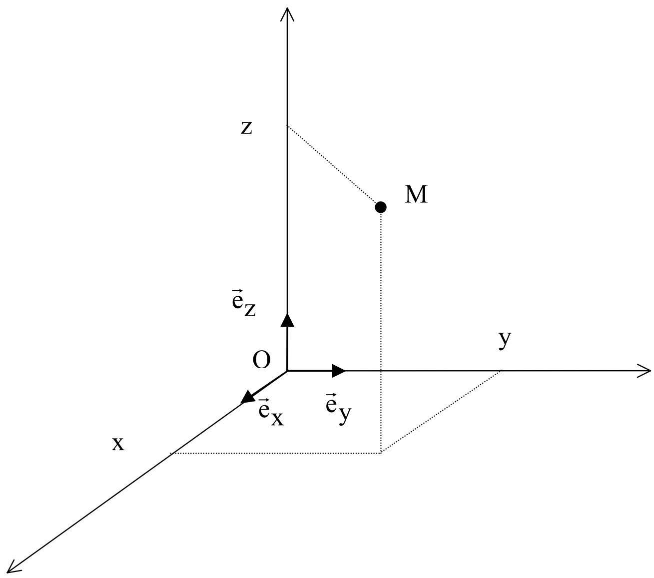

Figure 5: Coordonnées cartésiennes

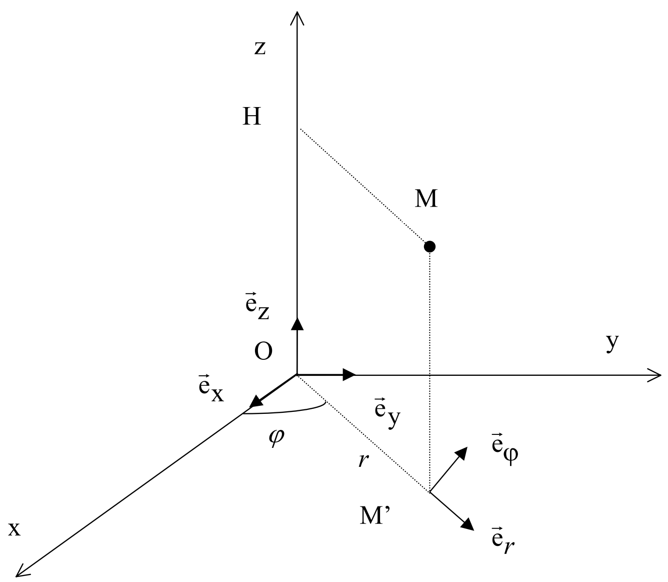

Figure 6: Coordonnées cylindriques

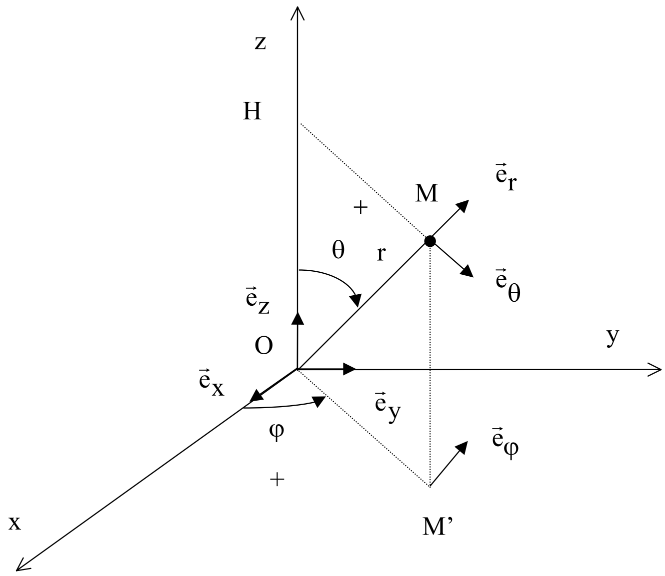

Figure 7: Coordonnées sphériques

10.0.9 Application

1) Pour chacuns des systèmes de coordonnées, déterminer quels sont les vecteurs unitaires fixes et tournant.

2) Projeter les vecteurs unitaires $(\vec{e}_x,\ \vec{e}_y,\ \vec{e}_z)$ des coordonnées cartésiennes sur la base des vecteurs unitaires $(\vec{e}_r,\ \vec{e}_\varphi,\ \vec{e}_z)$ des coordonnées cylindriques.

$$\begin{aligned}
\vec{e}_x &= \cos\varphi\ \vec{e}_r - \sin\varphi\ \vec{e}_\varphi \\
\vec{e}_y &= \sin\varphi\ \vec{e}_r + \cos\varphi\ \vec{e}_\varphi \\
\vec{e}_z &= \vec{e}_z
\end{aligned}$$

2) Projeter les vecteurs unitaires $(\vec{e}_x,\ \vec{e}_y,\ \vec{e}_z)$ des coordonnées cartésiennes sur la base des vecteurs unitaires $(\vec{e}_r,\ \vec{e}_\theta,\ \vec{e}_\varphi)$ des coordonnées sphériques.

$$\begin{aligned}
\vec{e}_x &= \cos\varphi\ \ \sin\theta\ \vec{e}_r + \cos\varphi\ \ \cos\theta\ \vec{e}_\theta - \sin\varphi\ \vec{e}_\varphi \\
\vec{e}_y &= \sin\varphi\ \ \sin\theta\ \vec{e}_r + \sin\varphi\ \ \cos\theta\ \vec{e}_\theta + \cos\varphi\ \vec{e}_\varphi \\
\vec{e}_z &= \cos\theta\ \vec{e}_r - \sin\theta\ \vec{e}_\theta
\end{aligned}$$