Université d'Orléans U.F.R Faculté des Sciences

CAPES de Physique-Chimie

Préparation à l'écrit

TD Mécanique du point: oscillateurs mécaniques

22 et 23 novembre 2005

1. Modèle d'un amortisseur de voiture
   Un amortisseur de voiture est symbolisé par un ressort vertical de constante de raideur k et de longueur à vide x_0, comprimé par une masse m (m représente la masse de la voiture augmentée de celle des passagers). Cette masse est donc soumise, le long de l'axe vertical Ox, à l'accélération de la pesanteur $\vec{g}$ et à la force de rappel du ressort $\vec{f} = -k(x - x_0)\vec{e}_x$.

   (a) Sur une route parfaitement lisse la masse m est à l'équilibre et la longueur du ressort est alors égale à x_1. Exprimer k en fonction de m, $g = \|\vec{g}\|$, x_0 et x_1.

   (b) Une aspérité de la route détruit l'équilibre en modifiant la longueur du ressort. Soit x la longueur du ressort à l'instant t après que la route soit redevenue lisse.

      i. Quelle est la résultante des forces qui agissent sur la masse m le long de l'axe Ox?

      ii. Soit $X = x - x_1$ l'écart à l'équilibre. Montrer que l'équation du mouvement de la masse m le long de l'axe Ox s'écrit:

      $$m\frac{d^2X}{dt^2} + kX = 0$$

      iii. En déduire que la trajectoire de m est celle d'un oscillateur harmonique libre dont on donnera l'équation générale et dont on exprimera la pulsation ω_0 en fonction de k et m.

      iv. Quel est l'inconvénient de cette situation pour le confort des passagers?

   (c) Pour supprimer cet inconvénient, la masse m est soumise à une autre force: $\vec{f}_{Frot} = -h\vec{v}$, où h est une constante positive et $\vec{v}$ la vitesse de la masse m le long de l'axe Ox.

      i. Comment appelle-t-on ce type de force?

      ii. Donner la nouvelle équation du mouvement de m suivant Ox.

      iii. Donner les différentes formes de l'équation générale de la trajectoire $X(t)$ de m pour les trois régimes: $\alpha)\quad h < 2m\omega_0$, $\beta)\quad h = 2m\omega_0$ et $\gamma)\quad h > 2m\omega_0$. Représenter dans chaque cas l'allure de la courbe $X(t)$ et donner leurs principales caractéristiques.

      iv. Dire, sans démonstration, dans quel cas l'amortissement est optimal (retour à l'équilibre le plus rapide) et donc plus favorable au confort des passagers. Comment appelle-t-on ce régime? Au bout de quel temps caractéristique l'équilibre est-il rétabli?

   (d) La route est maintenant bosselée, ce qui impose une nouvelle force appliquée à m, soit $\vec{F} = F_0 \cos \Omega t \ \vec{e}_x$.

i. Donner la nouvelle équation du mouvement de m suivant Ox.

ii. La solution de cette équation est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation avec second membre. Dire pourquoi l'une de ces solutions finit par disparaître au cours du temps (on précisera laquelle). La forme de la solution restante s'écrit: $X(t) = A\cos(\Omega t + \varphi)$. Comment appelle-t-on ces oscillations subies par m?

iii. Pour déterminer l'amplitude A et la phase φ de ces oscillations, on utilisera la représentation complexe. Déterminer l'expression générale de ces grandeurs en fonction de ω_0, h, m, F_0 et Ω. Représenter l'allure de la courbe $A(\Omega)$ dans les deux cas suivants: $\alpha)\quad h << 2m\omega_0$, $\beta)\quad h = 2m\omega_0$.
Quel est le cas le plus favorable pour le confort des passagers? Pourquoi?

2. Modèle d'une molécule diatomique
Pour étudier les propriétés d'une molécule polaire (par exemple HCl) on la modélise par un système de deux charges $+q$ et $-q$ situées respectivement en deux points matériels A et B. La distance x séparant les deux charges admet une valeur d'équilibre $x_0 = 3.10^{-10}m$. On appelle m la masse de la charge $+q$ située en A. Cette masse sera considérée très petite devant celle de la charge $-q$ située en B. On admettra alors que la particule située en B est immobile et située en un point O qui sera pris comme origine des coordonnées.
Données du problème: $m = 10^{-26}kg$ et $q = 9,6.10^{-20}C$
En présence de la charge $-q$ en B, l'énergie potentielle de la charge q en A est donnée par la relation:

$$U_p(x) = \frac{\alpha}{x^n} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{x}$$

où $n \approx 10$ et α est une constante positive.

(a) Discuter de la provenance des différents termes de cette énergie potentielle.

(b) Tracer la courbe $U_p(x)$.

(c) Déterminer l'expression analytique de la constante α.

(d) Montrer que la position d'équilibre x_0 est une position d'équilibre stable.

(e) On se place maintenant au voisinage de la position d'équilibre stable de la charge portée par A. Ecrire dans ce cas l'équation différentielle du mouvement de cette charge q et en déduire les expressions analytique et numérique de la pulsation propre ω_0.

(f) La charge q subit maintenant, en plus de la force exercée par la charge en B, une force électrique $qE_0\cos\omega_0 t\vec{e}_x$ ($E_0 = 10^3 V.m^{-1}$) (provenant de l'application d'un champ électrique extérieur) ainsi qu'une force dissipative $-mv/\tau\vec{e}_x$ ($\tau = 10^{-8}s$).

i. Ecrire la nouvelle équation différentielle du mouvement de la charge q au voisinage de sa position d'équilibre stable.

ii. En déduire la nature du mouvement en régime transitoire (solution générale de l'équation différentielle sans second membre).

iii. En déduire la nature du mouvement en régime permanent (solution particulière de l'équation différentielle avec second membre). Pour cela on déterminera la solution $X(t) = x(t) - x_0$.

iv. Calculer l'amplitude X_0 de $X(t)$ et commenter ce résultat.