Méthodes Hilbertiennes et Analyse de Fourier

(60h -7)

- Méthodes hilbertiennes :
  Définition et exemples d'espaces de Hilbert (ℓ^2 , $\mathbf{L}^2$).
- Orthogonalité, bases hilbertiennes, orthonormalisation de Gram-Schmidt, exemples (fonctions de Hermite, base de Haar, ...).
- Transformation de FOURIER :
  Définition et exemples, transformation de FOURIER sur $\mathbf{L}^1$, $\mathscr{S}$, $\mathbf{L}^2$.
  Formule de PLANCHEREL, formule d'inversion.

Probabilités et statistiques

(60h - 8)

- Rappels de probabilités (probabilités conditionnelles, indépendance, variables aléatoires discrètes, continues).
- Compléments sur les convergences de variables aléatoires.
- Echantillonnage, théorèmes asymptotiques (loi des grands nombres et théorème de limite centrale). Espérance conditionnelle.
- Chaînes de Markov à temps discret, espace d'états fini (récurrence, transience...).
- Modèle statistique, estimation ponctuelle, biais, risque.
- Echantillons gaussiens, lois de Student, chi-deux, Fisher.
- Intervalles de confiance pour la moyenne et la variance.
- Test d'hypothèse pour la moyenne et la variance (approche empirique).
- Applications sous Scilab.

Introduction aux EDP (Théorie et pratique)

(50h – 5)

- Panorama des équations aux dérivées partielles :
  linéaire, non linéaire.
  Classification des EDP linéaires d'ordre 2 :
  elliptique, parabolique, hyperbolique.
- Propriétés qualitatives des solutions.
- Méthode des caractéristiques pour le transport, liens avec l'aspect physique (transport de particules).
- Introduction à la discrétisation, méthodes des différences finies, utilisation de Scilab.

Mathématiques pour la finance

(50h – 5)

- *Marchés financiers et produits dérivés* : Notion de couverture de risque, Taux d'intéret, actualisation et actuariat. Les sous-jacents : actions, taux de change, obligations et taux d'intérêt. Les produits dérivés : contrats à terme, futures et options.
- *Exemples d'utilisation des produits dérivés.*
- *Marchés en temps discret :* Absence d'opportunité d'arbitrage et notion de Martingale, Marché complet, Critère de complétude dans un modèle discret, Evaluation d'options Européennes, Modèle binomial, Modèle de Cox-Ross-Rubinstein, Arrêt optimal et évaluation d'options Américaines, Convergence vers le modèle de Black-Sholes.
- *Scilab :* Méthode de Monte Carlo en Finance, Algorithme de Cox-Ross pour le calcul du prix d'une option américaine.

M1S1 : Signal et Filtrage

(50h - 5)

- Filtres-systèmes.
- Analyse spectrale des signaux analogiques.
- Analyse spectrale des signaux numériques (TFD, FFT).
- Spectrogramme.
- Echantillonnage – Théorème de Shannon – Analyse temps-fréquence.
- Transformation de Laplace – Transformée en z.
- Filtres idéaux –réels – Fonctions de transfert – Filtres différentiels.
- Filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF).
- Application au signal sonore.
- Mise en œuvre numérique (Scilab).

Analyse Fonctionnelle et Applications

(50h - 5)

- *Espaces de Banach :* Définitions et exemples (ℓ^p , $\mathbf{L}^p$, $\mathscr{C}_0$).
  Densité, séparabilité. Applications linéaires continues. Principe de prolongement par continuité.
- *Dualité :* Théorème de HAHN–BANACH.
- *Exemples d'espaces duaux :* Espaces de HILBERT, Espaces réflexifs ℓ^p , $\mathbf{L}^p$.
- *Théorème de Baire et ses conséquences :* Théorème de BANACH–STEINHAUS, Théorème d'isomorphisme de BANACH, Théorème du graphe fermé.
  Applications à l'analyse.

Algèbre

(50h - 5)

- Anneaux factoriels.
- Polynômes à plusieurs indéterminées.
- Polynômes symétriques. Résultant.
- Théorie des corps : Corps de décomposition, Clôture algébrique, Rudiments de théorie de GALOIS.
- Applications : Constructions par la règle et le compas, Résolubilité par radicaux des équations algébriques.
- Corps finis. Applications : Éléments de cryptographie.

Géométrie Différentielle

(50h - 5)

- *Surfaces dans* $\mathbb{R}^3$ *:* Courbes tracées sur une surface. Aire d'une surface. Première et deuxième formes fondamentales. Courbure. Théorème de GAUSS. Géodésiques.
- *Sous-variétés de* $\mathbb{R}^n$ *:* Espace tangent. Flot d'un champ de vecteurs. Notion de variété différentiable.
- *Formule de* STOKES *:* Calcul extérieur. Formes différentielles. Intégration des formes différentielles. Formules de STOKES et applications.

Optimisation continue

(60h - 5)

- Définition des problèmes d'optimisation dans $\mathbb{R}^n$.
- Rappels de calcul différentiel, Différentielle de Fréchet, Hessienne, Théorème des fonctions implicites.
- Fonctions convexes, Théorème du convexe, Existence et/ou unicité du minimum d'une fonction.
- Conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre.
- Conditions nécessaires et/ou suffisantes du second ordre.
- Algorithmes de résolution de problèmes sans contraintes : NEWTON, Quasi–NEWTON, Gradient, Gradient à pas optimal, gradient conjugué, relaxation.
- Problèmes avec contraintes : Lagrangien, multiplicateurs de LAGRANGE. Théorème de KUHN–TUCKER. Méthodes primales-duales (UZAWA, SQP, LAGRANGE, NEWTON).
- Conditions d'optimalité du premier et du second ordre, avec contraintes.
- Méthodes de pénalisation intérieure et extérieure.
- Programmation des méthodes avec Scilab.

Statistiques

(50h - 5)

- Rappels : Modèle statistique, Estimation ponctuelle.
- Théorie de l'estimation, Exhaustivité, Complétude,
  Maximum de vraisemblance, Inégalité de CRAMER–RAO.
  Information de FISHER.
- Théorie des tests (NEYMAN–PEARSON) : Tests paramétriques, Tests pour les échantillons gaussiens, Comparaison de moyennes de deux échantillons gaussiens.
- Tests non paramétriques : Chi-deux d'adéquation, Chi-deux d'indépendance, KOLMOGOROV–SMIRNOV.
- Modèle linéaire gaussien : Théorème de COCHRAN, Analyse de la variance, Régression linéaire multiple.
- Applications sous SAS ou R, parallèlement au module « statistiques descriptives et logiciels » .

Statistiques descriptives et logiciels

(40h – 4)

- Analyse d'une ou deux variables qualitatives, Représentations des distributions, Table de contingence et test d'indépendance du chi–deux, Représentations des lois conditionnelles.
- Analyse d'une ou deux variables quantitatives, Statistiques descriptives univariées (moyennes, covariances, corrélations, quantiles, skewness, kurtosis).
- Etude des liens entre variables qualitatives et quantitatives (boxplots etc).
- Apprentissage des logiciels de statistique SAS et R.
- Recueil, Nettoyage, Recodage, Mise en forme des données et applications.

Analyse de données

(30h – 3)

- Principales méthodes d'analyse multidimensionnelles :
  - Analyse en Composantes Principales (ACP)
  - Analyse Factorielle des Correspondances (AFC)
  - Analyse des Correspondances Multiples (ACM)
- Applications à des jeux de données, exemples sous SAS et/ou R.

Base de données

(30h – 3)

- Théorie : Schéma relationnel, Définition du modèle entité-association, Passage au modèle relationnel, Étude des dépendances fonctionnelles et des formes normales, Décomposition de schéma, Interrogation via l'algèbre relationnel.
- Pratique : Réalisation et interrogation de bases de données relationnelles à l'aide du langage `SQL` (par le biais des systèmes de gestion de bases de données).

Modélisation physique, simulation et méthodes variationnelles

(50 h – 5)

- Modélisation : de la description des phénomènes aux équations qui les régissent (Equations de bilan, adimensionnement,...).
  Exemples simples (masse–ressort etc...)
- Calcul des variations, Équations d'EULER–LAGRANGE.
  Équations d'ordre 2 de la mécanique.
- Équations linéaires : Introduction aux méthodes variationnelles,
  Éléments finis.
- Équations non linéaires, HAMILTON–JACOBI, Systèmes hyperboliques de lois de conservation, Équations cinétiques. Méthodes numériques spécifiques.

Signal et image

(50 h – 5)

- L'image numérique – acquisition.
- Traitement ponctuel des images numériques.
- Filtrage des images numériques – Filtres de convolution, Médian, Différentiels.
- Transformation de HOUGH.
- Compression des images.
- Ondelettes 1D et 2D.

Contrôle de systèmes

(50 h – 5)

- Equations différentielles ordinaires :
  - Éxistence et unicité.
  - Stabilité d'un point d'équilibre (définition, linéarisation, fonctions de LYAPUNOV)
- Théorie linéaire classique de l'automatique :
  - Fonctions de transfert, Transformée de LAPLACE, Critères classiques de stabilité et de robustesse, Correcteurs.
  - Commandabilité : Critère de KALMAN, Partie contrôlable, Partie non contrôlable, Linéarisation autour d'un point d'équilibre ou d'une trajectoire.
  - Stabilisation par retour d'état, placement de pôles.
  - Observabilité : Critère d'observabilité, Détectabilité, Observateurs, Stabilisation par retour dynamique de sortie.
- Apprentissage de Matlab ou Scilab avec résolution d'équations différentielles ordinaires. Boîte à outils pour l'automatique dans Matlab ou Scilab.
- Présentation des projets. Travaux dirigés sur les projets.
  L'image numérique – acquisition.

Probabilités Approfondies

(60h - 6)

- Théorème de P. LÉVY et applications.
- Martingales : martingales bornées dans L^2, Sous martingales et surmartingales, Convergence p.s. des martingales (équi–intégrabilité).
  Simulations de martingales classiques : par exemple marches aléatoires sur $\mathbb{Z}$, sur $\mathbb{Z}^2$, marches aléatoires avec barrières.
- Éspace canonique : Théorème de prolongement de KOLMOGOROV
  (on se limitera à un produit dénombrable), Notion de processus stationnaire à temps discret, Exemple des processus stationnaires gaussiens.
- Chaîne de MARKOV à un nombre infini dénombrable d'états.
  Probabilités invariantes.

Analyse Fonctionnelle Approfondie

(50h - 5)

Compléments d'analyse fonctionnelle :
Topologies faibles, Compacité de la boule unité, Théorème de LAX–MILGRAM.
Compléments d'analyse de Fourier :
Espaces de SOBOLEV, Dérivation faible. Théorèmes de PALEY–WIENER.
Applications aux EDP :
Introduction aux distributions tempérées, Formulation variationnelle.

Arithmétique

(50h - 5)

Théorie élémentaire des nombres :
Congruences. Loi de réciprocité quadratique. Logarithme discret.
Exemples d'équations diophantiennes.
Applications de l'analyse à l'arithmétique :
Séries de DIRICHLET. La fonction Zéta (ζ). Répartition des nombres premiers.
L'hypothèse de RIEMANN.

Théorie spectrale des opérateurs

(60h - 6)

Spectre d'un opérateur :

Généralités, Rayon spectral, Exemples.

Théorie spectrale :

Opérateurs sur un espace de HILBERT. Opérateurs à noyau.

Opérateurs de HILBERT–SCHMIDT. Exemples des opérateurs intégraux.

Théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints compacts.

Théorème de STURM–LIOUVILLE, Applications.

Introduction aux opérateurs non bornés.

Processus Aléatoires, Modélisation, et Applications

(40h - 3)

Processus de comptage, de POISSON, de renouvellement.
Files d'attente, Réseaux de files d'attente.
Méthodes de MONTE–CARLO, Simulation de v.a., Calcul d'intégrales,
Réduction de variance, Simulation par chaînes de MARKOV
à espace d'états discrets ou continus, Algorithme de Metropolis,
Applications (MCMC).

Programmation objet, C++, simulation

(60h-4)

Initiation à Unix, programmation avec le système Unix/Linux :
Chaîne de développement de programmes (xemacs, C++, ld, gdb, make),
Utilisation des scripts (sh, bash).

Notions sur le Système Unix/Linux :
Principales abstractions (processus, fichiers, systèmes de fichiers, signaux, connections réseau), organisation générale en couches, interfaces système et API, bibliothèques et API.

Formation à la conception et au développement d'applications scientifiques et techniques orientées objet.
Mise en œuvre précoce de la bibliothèque standard C++, pour faciliter l'apprentissage de la construction d'applications réalistes.
Données, types et variables, conversions.

Structures de programmation :
Expressions, Exécution conditionnelle et itérative.
Fonctions et abstraction fonctionnelle.
Constructeurs de types, pointeurs, types récursifs.
Environnement d'exécution, allocation mémoire.
Fonction de bases de la bibliothèque Unix/Posix :
scanf, printf, open, close, malloc, fonctions mathématiques.
Abstraction objet : classes, encapsulation, interfaces.
Construction de classes et d'objets, cycle de vie des objets.
Notion de classes paramétrées et application aux conteneurs de la bibliothèque standard C++.
Eléments de modélisation Orientée Objet et de notation UML. (Modèles statiques, scénarios)
Relation entre classes et objets, classes déduites, liaisons statiques et dynamiques, réalisation du polymorphisme.
Surcharge, opérateurs liés à la syntaxe.
Approfondissement des classes et fonction paramétrées (templates), instanciation, sélection des fonctions.
Bibliothèque standard : abstraction des flux d'entrées sorties, algorithmes génériques, utilisation des classes conteneur.
Utilisation de C++ dans le contexte Unix (encapsulation de connections réseau et aux bases de données, interfaçage des applications scientifiques R, Matlab,

Scilab, construction d'IHM graphique).
Utilisation de la chaîne UNIX (make, g++).
Encapsulation d'abstractions usuelles (Listes, Matrices),
Détail de la construction de classes et d'objets (principaux constructeurs, allocation, copie, instanciation, classes déduites).
Programmation avec la bibliothèque GTK.

TP : Programmation de quelques librairies standards de mathématiques. Utilisation de Netlib. Programmation de méthodes de NEWTON, de quadrature, de résolution d'équations différentielles, d'EDP.
Projets : projet spécifique à l'option (Automatique, ou Statistiques et Aide à la décision).
Le projet consiste en la simulation/visualisation d'un problème posé dans l'option, et doit être programmé en C++, avec ouverture de fenêtres de visualisation GTK.

Graphes – RO – Programmation dynamique

(30h - 2)

Optimisation discrète

Programmation linéaire (continue), Formulations canoniques, Structure de l'ensemble admissible, Existence de solutions et conditions d'optimalité.

Dualité (théorie et théorèmes).

Algorithme du simplexe (DANTZIG), Algorithmes dual et primal–dual, Généralisation (gradient réduit).

Autres méthodes.

Fonctions barrières et méthodes de points intérieurs, Complexité et comparaison formelle avec la méthode du simplexe, Cas des problèmes de grande taille.

Techniques de décomposition (généralités), Méthodes de DANTZIG–WOLF, BENDERS, SPINGARN (inverse partiel), Méthode de génération de colonnes.

Programmation linéaire en nombres entiers.

Exemples de problèmes, Méthodes de coupes (GOMORY), Séparation et Evaluation, Algorithmes approchés.

Théorie des graphes et Recherche opérationnelle.

Généralités, Connexité, Orientation, Flots et tensions, Problème du plus court chemin, Flots simples sans contraintes, Flots et multiflots (transport, télécommunications), Problèmes d'Ordonnancement, Problèmes d'Affectation.

Statistiques approfondies

(30h - 2)

Statistiques non-paramétriques, Statistiques libre, Tests non-paramétriques, Test de la médiane, du signe, Test de WILCOXON, de MANN–WHITNEY. Estimation non-paramétriques de la densité, Histogramme et estimateur à noyau. Modèle Bayésien et estimation, Algorithmes pour l'estimation (de type EM, EM stochastique ou MCMC).

Prévision

(40h - 2)

Régression. Régression linéaire, non linéaire, multiple. Algorithme de DURBIN. Algorithme des innovations.
Lissage : exponentiel simple, double, généralisé. Méthodes de HOLT et WINTERS.
Méthodes de BOX et JENKINS, généralités :
Introduction – Exemples de séries stationnaires – Opérateur retard, innovation. Filtres linéaires. Résolution d'équations ARMA. Séries chronologiques non stationnaires.
Estimation des processus ARMA :
Une loi des grands nombres. Estimation de la fonction covariance. Périodogramme. Identification d'un modèle ARMA.
Identification d'un modèle ARMA.
Apprentissage et utilisation du logiciel SAS.

Bases de données 2

(30h – 2)

Entrepôts de données.

Plans d'expérience et gestion de projet

(20h – 2)

Compléments de statistiques et/ou d'analyse de données suivant les besoins et/ou les intervenants dans les domaines suivants : théorie du sondage, plans d'expérience, scoring, modèle logistique…

Mathématiques financières

(30h – 2)

Éléments de calcul stochastique : Martingale, sous–martingale, sur–martingale, Mouvement Brownien, Intégrale Stochastique, Calcul d'ITÔ, Equations différentielles stochastiques, Théorème de GIRSANOV.
Modèle de BLACK–SCHOLES : Valorisations d'options Européennes, Propriétés du prix BLACK–SHOLES, Évaluation d'Options et EDP.
Méthode des éléments finis, Faiblesse du modèle de Black-Sholes, Volatilité historique et volatilité implicite – smile de volatilité.
Optimisation de Porte–feuilles : Fonctions d'utilité, Optimisation et programmation dynamique, Méthode de martingale et Lagrangien, Equation d'HAMILTON–JACOBI–BELLMAN.

Algorithmes pour l'aide à la décision

(20h – 2)

Arbres de décision, Random Forest, Adaboost, Bagging, courbe ROC.
Régression. SVM.
Classification non supervisée. Réseaux de neurones.
Treillis de GALOIS. Ensembles fréquents. Algorithmes a priori.

RO2

(30h – 2)

Modélisation de problèmes combinatoires. (Apprentissage des techniques classiques).
Exemples de problèmes réels (Routages, Localisation, Affectation, Couvertures, ...).
Techniques et principes de décomposition (Copies de variables, Génération de colonnes).
Relaxation Lagrangiennes : Principes, Décomposition lagrangienne, Applications aux problèmes réels abordés.
Optimisation multicritères / Notion d'efficacité, Programmation par buts, ...

Modélisation, calcul scientifique, outils numériques

(60h – 4)

Méthodes de résolution d'équations. Recherche de zéros. Mise en oeuvre numérique.
Intégration numérique et méthodes de quadrature (Rectangle, HEUN, SIMPSON, etc). Calculs d'erreurs. Mise en oeuvre numérique.
Résolution numérique de systèmes différentiels (Méthodes explicites, implicites, à un pas, multipas). Calculs d'erreurs. Méthodes prédictives. Mise en oeuvre numérique.
Discrétisation d'équations aux dérivées partielles venant de la physique (par exemple équation de la chaleur, élasticité) par différences finies et éléments finis. Mise en oeuvre numérique.
Programmation des méthodes en Scilab, Matlab, et/ou C++.

Automatique

(60h – 4)

- **Rappels :**
  Rappels sur les équations différentielles ordinaires (problème de CAUCHY, solutions maximales), Systèmes linéaires stationnaires, instationnaires, Rappels d'algèbre linéaire, Forme de JORDAN.
- **Modélisation d'un système de contrôle :**
  Définition générale d'un système de contrôle, Exemples de systèmes de contrôle en mécanique, Électricité, Électronique, Chimie, Biologie, EDP, Représentation interne des systèmes de contrôle linéaires, Représentation externe des systèmes de contrôle linéaires : matrice de transfert, matrice impulsionnelle, transformation de LAPLACE ; systèmes du premier, second ordre, diagramme de BODE, de NYQUIST.
- **Espace d'état :**
  Représentation d'état, Notion d'état, Équation d'état, Pluralité des représentations, Formes canoniques, Résolution de l'équation d'état.
- **Commande modale des systèmes linéaires :**
  - Problématique de la commande (asservissement, régulation), boucle ouverte, boucle fermée
  - Approche modale des problèmes de commande : effet du bouclage sur les valeurs propres, principe de la commande modale
  - Calcul de la matrice de contre réaction : placement des valeurs propres, cas des systèmes partiellement commandables.
- **Contrôlabilité :**
  - Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes : Critère de KALMAN, Partie contrôlable, Partie non contrôlable, Forme de BRUNOVSKI. Cas avec contrainte sur le contrôle.
  - Contrôlabilité des systèmes linéaires instationnaires.
  - Contrôlabilité des systèmes non linéaires : linéarisé, contrôlabilité locale.
- **Stabilisation :**
  - Systèmes linéaires autonomes : rappels sur la stabilité des systèmes linéaires, critère de Routh-Hurwitz. Placement de pôles.
  - Systèmes non linéaires : Rappel des théorèmes de LYAPUNOV, de LASALLE. Fonctions de LYAPUNOV. Cas des systèmes linéaires instationnaires. Systèmes lentement variables.
  - Liens avec la représentation externe : interprétation en termes de matrice

de transfert. Critères de stabilité et de robustesse, correcteurs.

- **Observabilité :**
  - Systèmes linéaires autonomes : dualité avec la contrôlabilité, Critère de KALMAN. Détectabilité, observateurs. Stabilisation par retour dynamique de sortie.
  - Liens avec la représentation externe : interprétation en termes de matrice de transfert.
  - Cas des systèmes linéaires instationnaires et des systèmes non linéaires.
- **TP** en Matlab ou Scilab. Apprentissage des outils d'Automatique de Matlab (Control Toolbox) ou Scilab.
- **Projets.**

Contrôle optimal

(30h – 2)

- **Introduction à la commande optimale :**
  Notion de commande optimale, de critère, exemples, Critère d'optimisation : termes constitutifs du critère (commande en temps minimal, à énergie minimale, avec erreur terminale minimale, ...), Optimisation des paramètres d'un régulateur, critère général, Méthode de résolution.
- **Commande linéaire quadratique :**
  Commande optimale d'un régulateur, Principe du maximum, Matrice de contre–réaction, matrice de RICCATI, Stabilité, Résultats fondamentaux sur le problème du régulateur, Horizon fini, Horizon infini, Cas des régulateurs invariants à horizon infini, Prise en compte des bruits, Problème de la poursuite de trajectoire.
- **Mise en œuvre de la commande optimale à critère quadratique :**
  Extensions du problème du régulateur optimal, Critère exprimé en fonction des sorties, Commande à action intégrale, Interprétation fréquentielle de la commande optimale, Aspects pratiques liés à la détermination de la commande.
- **Mise en oeuvre numérique en Matlab ou Scilab. Filtre de KALMAN et problèmes de régulateurs. Stabilisation LQ.**
- **Contrôle optimal de systèmes non linéaires :**
  Ensemble accessible, Principe du maximum de PONTRYAGIN. Mise en oeuvre numérique : méthode de tir. Équation d'HAMILTON–JACOBI et méthodes numériques directes. Synthèse optimale. Programmation des méthodes numériques en Matlab ou Scilab. Exercices, **TP**.

Commande avancée et asservissements

(30h – 2)

Commande à modèle interne.
Commande sous contraintes.
Commande prédictive linéaire (DMC, MAC, PFC, GPC) et non linéaire.
Asservissements visuels : asservissements visuels 2D et 3D.
Des exemples en génie des procédés et robotique, traités en **TD** ou **TP**, illustreront le cours.

Contrôle optimal

(30h – 2)

- **Théorie des observateurs déterministes :**
  Retour d'état, Commande modale, Conséquence de la non-mesurabilité du vecteur d'état, Observation par simulation : Simulation directe, Simulation corrigée, Dualité commande observation, Commande modale, Dualité, Observateur d'état réduit, Influence de l'observateur sur le système bouclé.
- **Théorie des observateurs stochastiques :**
  Introduction et rappels sur les processus stochastiques gaussiens. Principe, Processus gaussiens, Markoviens, Bruit blanc, Généralisation, Estimation d'un signal aléatoire, Principes, Critères, Filtrage des vecteurs aléatoires gaussiens.
- **Filtrage de KALMAN–BUCY :**
  Introduction, Filtre de KALMAN–BUCY discret, Équations et principe, Équations du filtre, Algorithme du filtre, Filtre de KALMAN–BUCY continu, Équations et principe, Détermination du gain de KALMAN.
- **Commande à partir de l'état estimé :**
  Principes, Équations du problème d'optimisation stochastique, Théorèmes de séparation, Résultats du problème d'optimisation stochastique, Dualité estimation–commande optimale, Cas des systèmes invariants, Mise en oeuvre des filtres de KALMAN– BUCY.
- **Identification :**
  Méthodes déterministes directes et indirectes (modèle de référence), Méthodes stochastiques, Moindres carrés, Variable instrumentale.
- **Introduction au diagnostic :**
  Définitions et vocabulaire, Quelques approches du diagnostic, Génération de résidus, Décision, Filtre de KALMAN et applications à la détection d'évènements, Étude de cas.

Image

(30h – 2)

- **Techniques de segmentation :**
  Les contours actifs, Filtres et détecteurs de bords. Segmentation en région.
- **Segmentation en région.**
- **Introduction à la morphologie mathématique.**
- **Méthodes variationnelles :**
  Filtres par EDP.
- **Restauration par EDP et minimisation de fonctionnelles (MUMFORD–SHAH).**

Géométrie Riemannienne

- **Pré–requis :** Géométrie différentielle.
- **Résumé :**
  Le but principal du cours est de donner une introduction à la géométrie riemannienne. Seront également développés quelques thèmes relatifs à la théorie des sous–variétés.
- **Programme :**
  1. Compléments de géométrie différentielle, Formes différentielles, Tenseurs, Formule de STOKES
  2. Variétés riemanniennes, Connexions, Parallélisme, Géodésiques, Tenseur de courbure, etc.
  3. Sous–variétés, Seconde forme fondamentale, Équation de GAUSS.
  4. Éléments de la théorie des sous–variétés.

Espaces de SOBOLEV et méthodes variationnelles

- **Pré–requis :**
  Équations différentielles, Intégrations, Analyse fonctionnelle, EDP et Calcul des variations.
- **Programme :**
  1. Espaces de SOBOLEV : Théorèmes de densité. Injections continues et compactes (SOBOLEV, GAGLIARDO–NIRENBERG, MORREY, RELLICH–KONDRACHOV).
  2. Méthodes variationnelles : Minima, Minima liés, Conditions de PALAIS–SMALE et théorème d'AMBROSETI–RABINOVITZ. Applications aux problèmes elliptiques non linéaires.

Probabilités et mouvement brownien

- **Pré–requis :**
  Cours d'introduction au calcul des Probabilités en Licence et cours de probabilité en Master 1 contenant la notion d'espérance conditionnelle, l'étude élémentaire des martingales discrètes et une introduction aux chaînes de Markov.
- **Programme :**
  1. *Processus stochastiques.* Définitions, Lois de dimension finie, Construction de KOLMOGOROV, Critère de continuité des trajectoires, Exemples des processus gaussiens et des martingales.
  2. *Le mouvement brownien.* Définition, Construction, Caractère gaussien, Régularité des trajectoires, Théorème d'arrêt.
  3. *Le mouvement brownien comme processus de* MARKOV. Probabilités de transition, Semi–groupe, Résolvante, Générateur infinitésimal.
  4. *Intégrale stochastique brownienne.* Construction de l'intégrale relativement aux processus élémentaires, Aspects hilbertiens, Processus intégrands, L'intégrale stochastique comme processus, Propriété de matingale de l'intégrale stochastique.
  5. *Notions sur le calcul stochastique de Itô.* Processus de Itô, Différentielle stochastique, Équations différentielles stochastique, Un théorème d'existence et d'unicité, Applications à la représentation des martingales browniennes de carré intégrable.
- **Bibliographie** :
  Livres de Licence et Master 1 (où l'on peut trouver les prérequis) :
  D. FOATA et A. FUCHS (2 tomes, Dunod éditeur),
  D. REVUZ (Hermann éditeur),
  BALDI–MAZLIAK–PRIOURET (Hermann éditeur),
  OUVRARD (2 tomes, Cassini éditeur).

Introduction à la théorie ergodique

Ce cours se veut une introduction à la théorie ergodique des actions de $\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{Z}^d$.

Après quelques généralités sur les systèmes dynamiques mesurés, nous énoncerons le théorème de récurrence de POINCARÉ et en donnerons quelques applications.

Nous démontrerons les théorèmes ergodiques de VON NEUMANN et BIRKHOFF pour des actions de $\mathbb{Z}$.

Nous établirons ensuite le théorème ergodique de WIENER pour des actions de $\mathbb{Z}^d$ ou $\mathbb{R}^d$ que nous appliquerons à des problèmes de réseaux électriques aléatoires.

Nous aborderons enfin quelques aspects des systèmes dynamiques gaussiens.

Surfaces Minimales

La première partie du cours est consacrée aux graphes minimaux :

1. L'équation des graphes minimaux.
2. Le principe du maximum.
3. L'unicité du caténoide, d'après R. SCHOEN.

Le problème de DIRICHLET sur un domaine convexe. Le théorème de BERNSTEIN.

La seconde partie a pour thème la représentation de WEIERSTRASS :

- Surfaces de RIEMANN. Representation de WEIERSTRASS. Exemples classiques.
- Surfaces minimales de courbure totale finie, d'après R. OSSERMAN.
- Classification des surfaces minimales plongées de genre zéro, d'après LOPEZ, ROS.

Prérequis : Géométrie différentielle, Fonctions holomorphes.