Université d'Orléans **Session de Juin 2018**
Diplôme d'Accès aux Etudes Universitaires

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DAEU A

Durée : 4 heures

Les documents et calculatrices sont autorisés.
Les exercices sont indépendants les uns des autres.

Exercice 1 : Calculs algébriques

1) Démontrer que :

$$\ln\frac{1}{3} + \ln\frac{3}{4} + \ln\frac{4}{5} + \ln 5 = 0.$$

2) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(1 + e^x + e^{2x} + e^{3x})(1 - e^x) = 1 - e^{4x}.$$

3) Exprimer en fonction de $\ln 3$ l'expression suivante :

$$2\ln 3 - 2\ln 9 + \ln(27) + 5\ln(81).$$

4) Démontrer que :

$$\left(\frac{1}{e}\right)^2 e^{2+\ln 8} = 8.$$

Exercice 2 : Résolutions d'équations, d'inéquations et de systèmes d'équations

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$e^{2x+3} = e^{x-1}.$$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$8x + 3 < 5x + 5.$$

En déduire les solutions de l'équation : $e^{8x+3} - e^{5x+5} < 0$.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$\ln(3x-2) > \ln(x+1).$$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système d'équations à deux inconnues suivant :

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ -x + 2y = 2 \end{cases}$$

Exercice 3 : Etude de fonctions

Partie 1 :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$x^2 - 3x - 10 = 0.$$

En déduire le signe du trinôme $x^2 - 3x - 10$ pour tout x dans $\mathbb{R}$.

Partie 2 :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0,6]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 10x + 1$$

1) Calculer la dérivée de la fonction f sur $[0,6]$.

2) En utilisant les résultats de la partie 1 en déduire les variations de la fonction f sur $[0,6]$.

3) La fonction f présente-elle un extrémum sur $[0,6]$? Si oui préciser s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum ainsi que sa valeur.

4) En déduire que :

$$f(x) \geq -\frac{61}{6} \quad \forall x \in [0,1].$$

5) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0,1]$.

6) Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $x = 1$.

7) Donner une primitive de la fonction f sur $[0,6]$.

Calculer

$$\int_0^1 f(x)dx.$$

Exercice 4 : fonction exponentielle

Soit f la fonction définie sur $[-2,2]$ par :

$$f(x) = xe^x - 1.$$

1) Calculer la dérivée de la fonction f sur $[-2,2]$.

2) Etudier les variations de f sur $[-2,2]$. On donnera le tableau des variations de f sur $[-2,2]$.

3) Calculer $f(-2)$, $f(-1)$ et $f(2)$ en fonction de e^2 et e^{-1}. En déduire le nombre de solutions dans $[-2, 2]$ de l'équation $f(x) = \dfrac{f(-2) + f(-1)}{2}$.

4) Démontrer que la fonction $F(x) = xe^x - e^x - x + 1$ est une primitive de f sur $[-2, 2]$ qui s'annule en 1.

Calculer

$$\int_0^1 f(x)dx.$$

Exercice 5 : Probabilités

On dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient 3 boules banches et 5 boules noires, l'urne U_2 contient 2 boules blanches et 3 boules noires. On choisit une urne au hasard, puis l'on prend une boule dans l'urne choisie. On observe que l'on a une chance sur trois de choisir l'urne U_1.

On notera :

B l'évènement "tirer une boule blanche".

$\overline{B}$ l'évènement "tirer une boule noire".

U_1 l'évènement "choisir l'urne U_1".

$\overline{U_1}$ l'évènement "choisir l'urne U_2".

1) Représenter l'expérience à l'aide d'un arbre pondéré.

2) L'urne choisie est U_1. Déterminer la probabilité de tirer une boule blanche.

3) Calculer $P(B)$. (La probabilité de tirer une boule blanche).

4) A l'issue du tirage une boule blanche est tirée. Calculer la probabilité que cette boule soit tirée de l'urne U_1.

Fin du sujet