Modèle d'Ising

Un matériau est dit magnétique lorsqu'il présente une aimantation spontanée. Cette aimantation disparaît à suffisamment haute température. Le modèle d'Ising a été introduit pour essayer de comprendre ce phénomène dans un cadre aussi simple que possible. On suppose que le matériau est constitué d'un grand nombre de petits aimants appelés "spins", qui peuvent prendre la valeur $+1$ (qui correspondra disons à s'orienter vers le haut) ou -1 (orientation vers le bas). Un spin aura tendance à s'orienter dans le même sens que ses voisins. Il s'agit de répondre à la question suivante : est-ce que globalement l'ensemble des spins va choisir une orientation privilégiée, vers le haut ou vers le bas ? Cette question, qui date des années 1920, est à la base de l'étude des transitions de phase en physique, et a eu des ramifications importante tout au long du 20e siècle et jusqu'à aujourd'hui. Il s'agira au cours de ce stage d'étudier théoriquement et/ou numériquement un ou deux exemples simples.

Posons le problème de façon plus précise. On considère N spins notés $S_1, \dots, S_N$, qui peuvent prendre les valeurs $+1$ ou -1 . Une configuration du système est notée $\mathbf{S}$, et est donc un élément de $\Omega_N = \{-1, 1\}^N$. L'énergie du système est une fonction

$$H_N : \Omega_N \rightarrow \mathbb{R}.$$

On définit une distribution de probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω_N :

$$\mathbb{P}(\mathbf{S}) = \frac{1}{Z_{\beta, N}} e^{-\beta H_N(\mathbf{S})}, \text{ avec } Z_{\beta, N} = \sum_{\mathbf{S} \in \Omega_N} e^{-\beta H_N(\mathbf{S})}.$$

$\beta > 0$ est un paramètre proportionnel à l'inverse de la température et $Z_{\beta, N}$ est un facteur de normalisation. On s'intéresse notamment à la distribution de la variable aléatoire qui représente la magnétisation totale normalisée M_N :

$$M_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i$$

Quelles sont les valeurs typiques prises par une réalisation de la magnétisation M_N lorsque N est grand ? Son espérance, sa variance ? On pourra étudier les deux cas suivants :

1. Modèle d'Ising unidimensionnel

$$H_N(\mathbf{S}) = - \sum_{i=1}^N S_i S_{i+1} - h \sum_{i=1}^N S_i$$

avec des conditions aux bords périodiques : on utilise la notation $S_{N+1} = S_1$.

2. Modèle d'Ising "champ moyen" (ou modèle de Curie-Weiss)

$$H_N(\mathbf{S}) = -\frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^N S_i S_j - h \sum_{i=1}^N S_i.$$

On pourra aussi essayer de simuler les variables aléatoires $\mathbf{S}$ dans différents cas; cela nécessite un travail numérique et une introduction aux chaînes de Markov.

Référence possible :

1. W. Kirsch. The Curie-Weiss model - an approach using moments. Preprint arXiv:1909.05612.