Reconnaissance de signaux par des automates finis

– en cours de défrichage –

Jérôme DURAND-LOSE

jerome.durand-lose@ens-lyon.fr

MC2 LIP

UMR CNRS - ÉNS Lyon - UCB Lyon - INRIA 5668

Plan

1. Pré-signaux et approximation
2. Automates et signaux
3. Exercices
4. Cardinalité de l'ensemble des signaux
5. Questions ouvertes

Attention, ceci est sans rapport avec

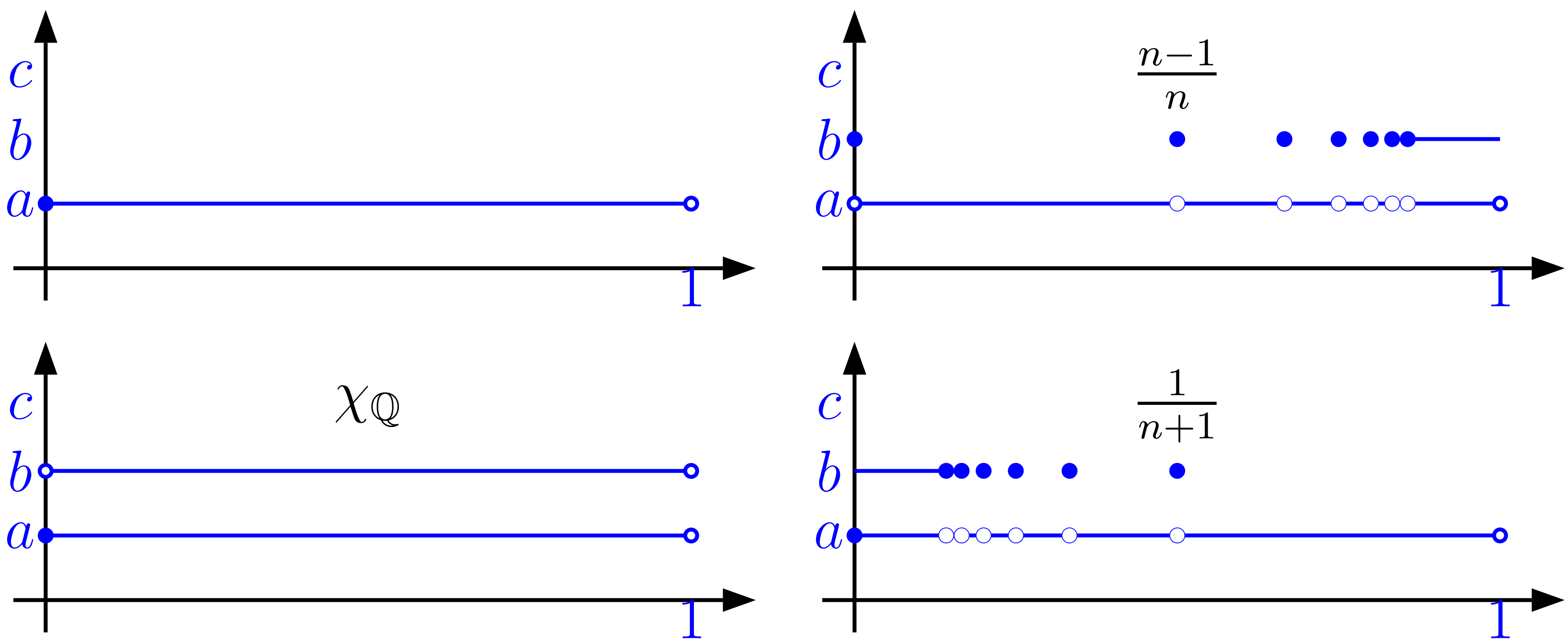
- automates temporisés (exposé automne dernier)
- machines à signaux (HDR)

Pré-signaux

Σ : alphabet fini

Pré-signal $f : [0,1[\longrightarrow \Sigma$

Représentation par son graphe



ε-approximation

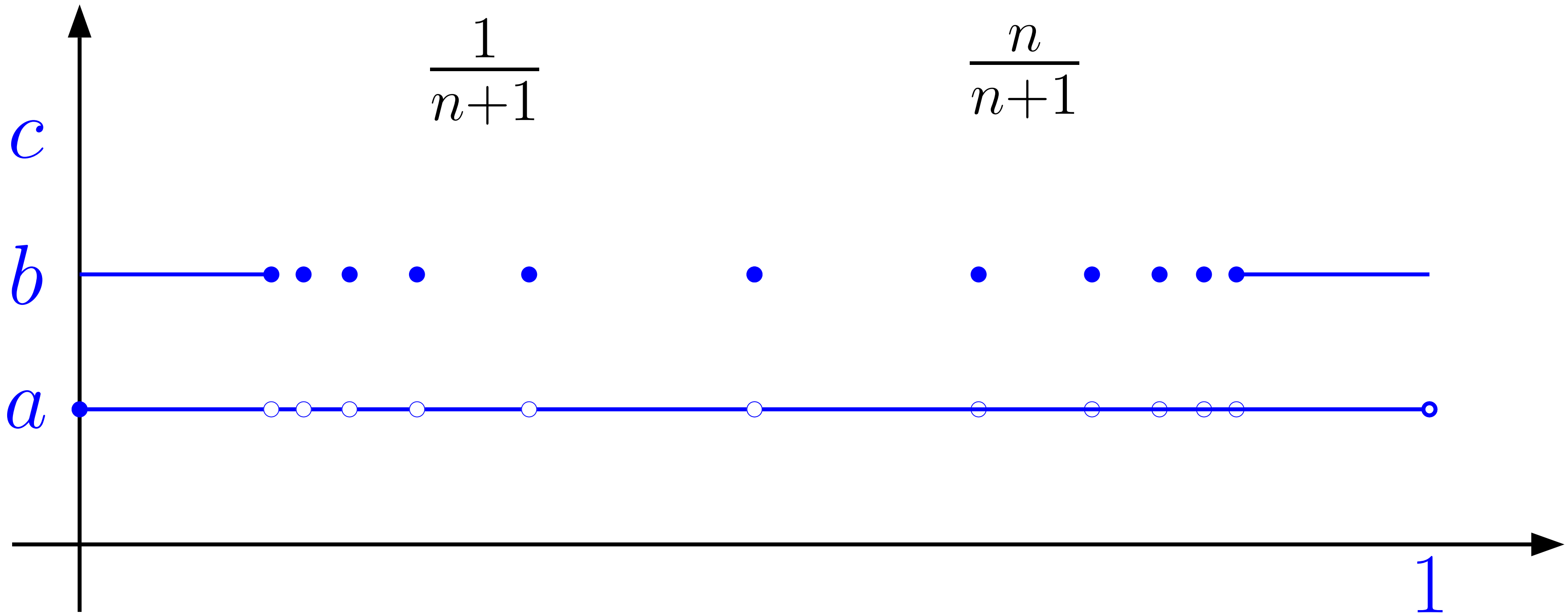
$$\widetilde{\Sigma} = \Sigma \times (\mathcal{P}(\Sigma) \setminus \{\emptyset\})$$

$$w_1 \ldots w_n \in \widetilde{\Sigma} \qquad f : [0,1[\longrightarrow \Sigma$$

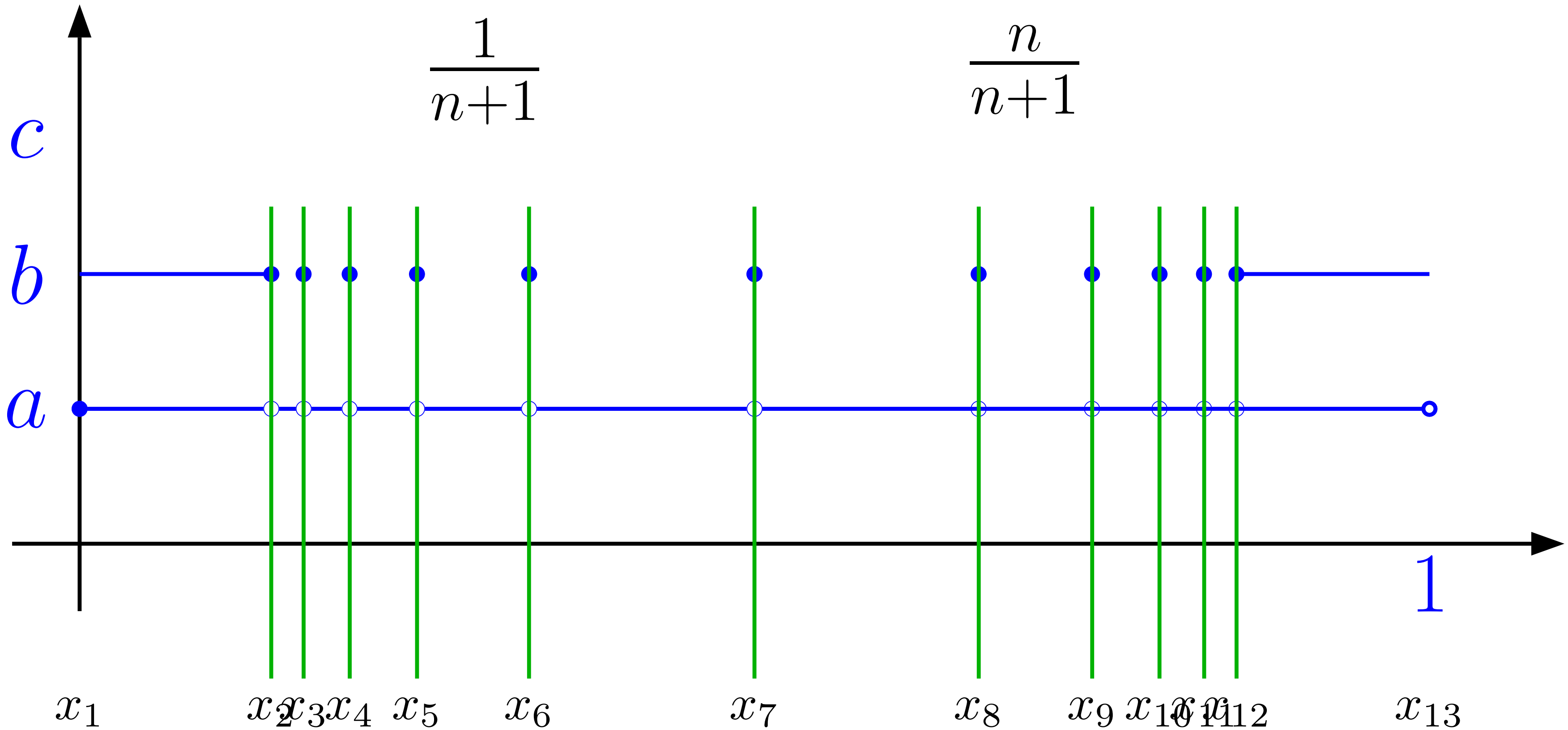
$w_1 \ldots w_n$ *ε-approxime* f

$$\overset{\text{def}}{\iff} \exists x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_i < x_{i+1} \\ x_{n+1} = 1 \\ w_i = \Big(f(x_i), f\Big(]x_i, x_{i+1}[\Big)\Big) \\ \Big|f\Big(]x_i, x_{i+1}[\Big)\Big| > 1 \Rightarrow |x_i - x_{i+1}| < \varepsilon \end{cases}$$

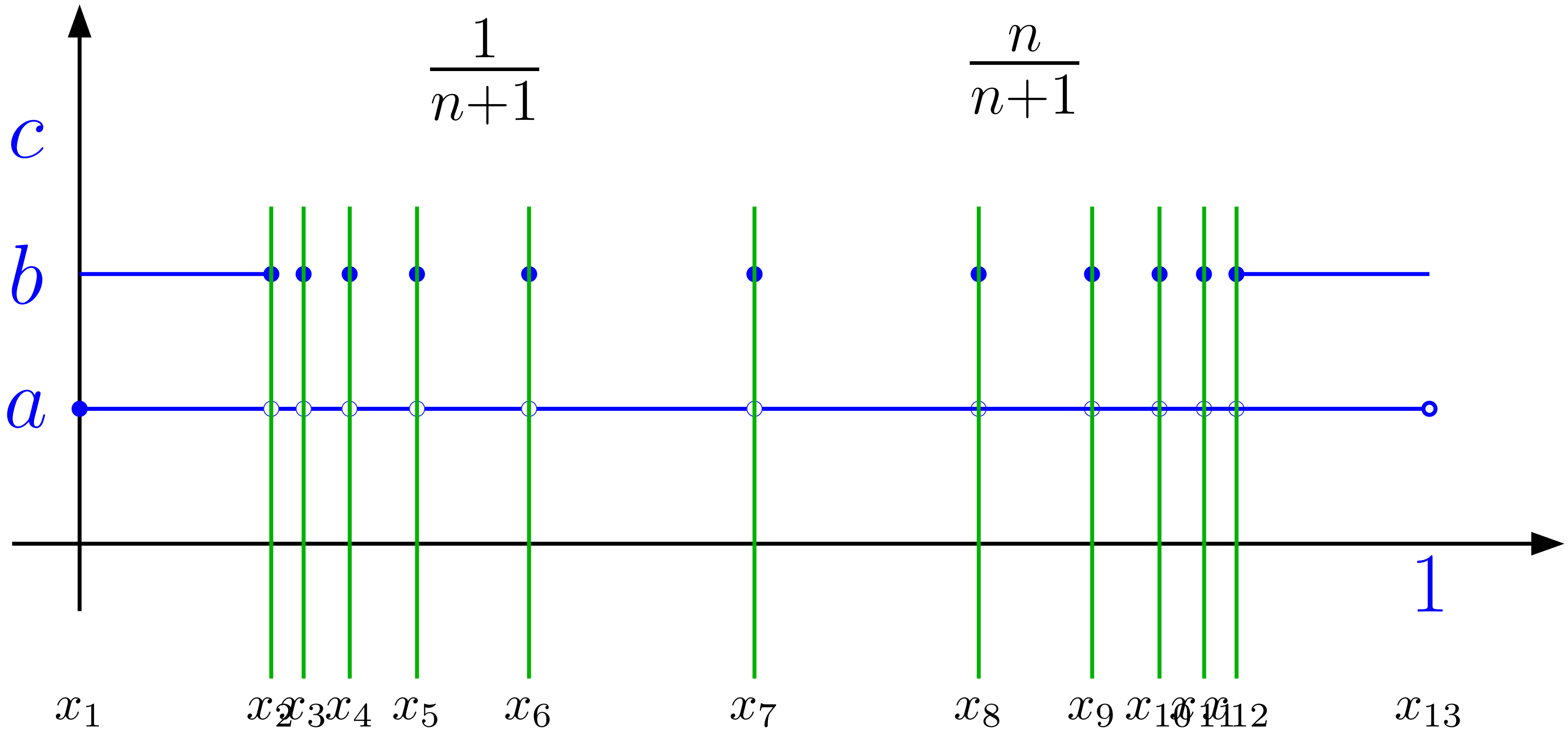
ε-approximation



ε-approximation



ε-approximation



$|x_1 - x_2| < \varepsilon$ et $|x_{12} - x_{13}| < \varepsilon$

$$w = \Big(a, \{a, b\}\Big)\Big(b, \{a\}\Big)\Big(b, \{a\}\Big) \ldots \Big(b, \{a\}\Big)\Big(b, \{a, b\}\Big)$$

Automate fini pour pré-signaux

$$\mathcal{A} = \left(\widetilde{\Sigma}, Q, \delta, I, F\right)$$

$\mathcal{L}(\mathcal{A})$ langage (sur $\widetilde{\Sigma}$) reconnu

f dans $\Sigma^{[0,1[}$

$\mathcal{A}$ *signal-reconnaît* f

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$f \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$\forall \varepsilon > 0, \exists w \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$, w ε-approxime f

Équivalence et signaux

f, g dans $\Sigma^{[0,1[}$

$$f \approx g$$

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\forall \mathcal{A},\ f \in \mathcal{S}(\mathcal{A}) \Leftrightarrow g \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$$

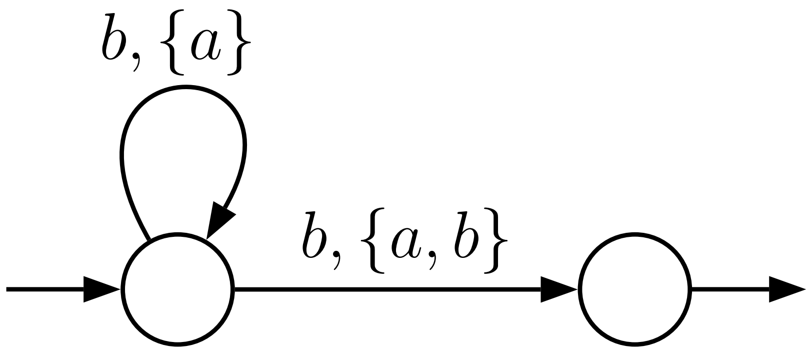
$[f]$ est un *signal*

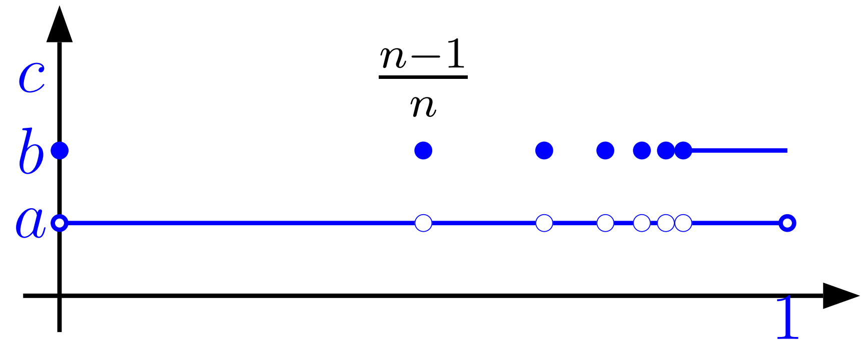
$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$$

$[f]$ est une classe d'équivalence pour $\approx$

Question ouverte Caractériser ces classes (liens *scattered linear orders*)

Exemple d'acceptation

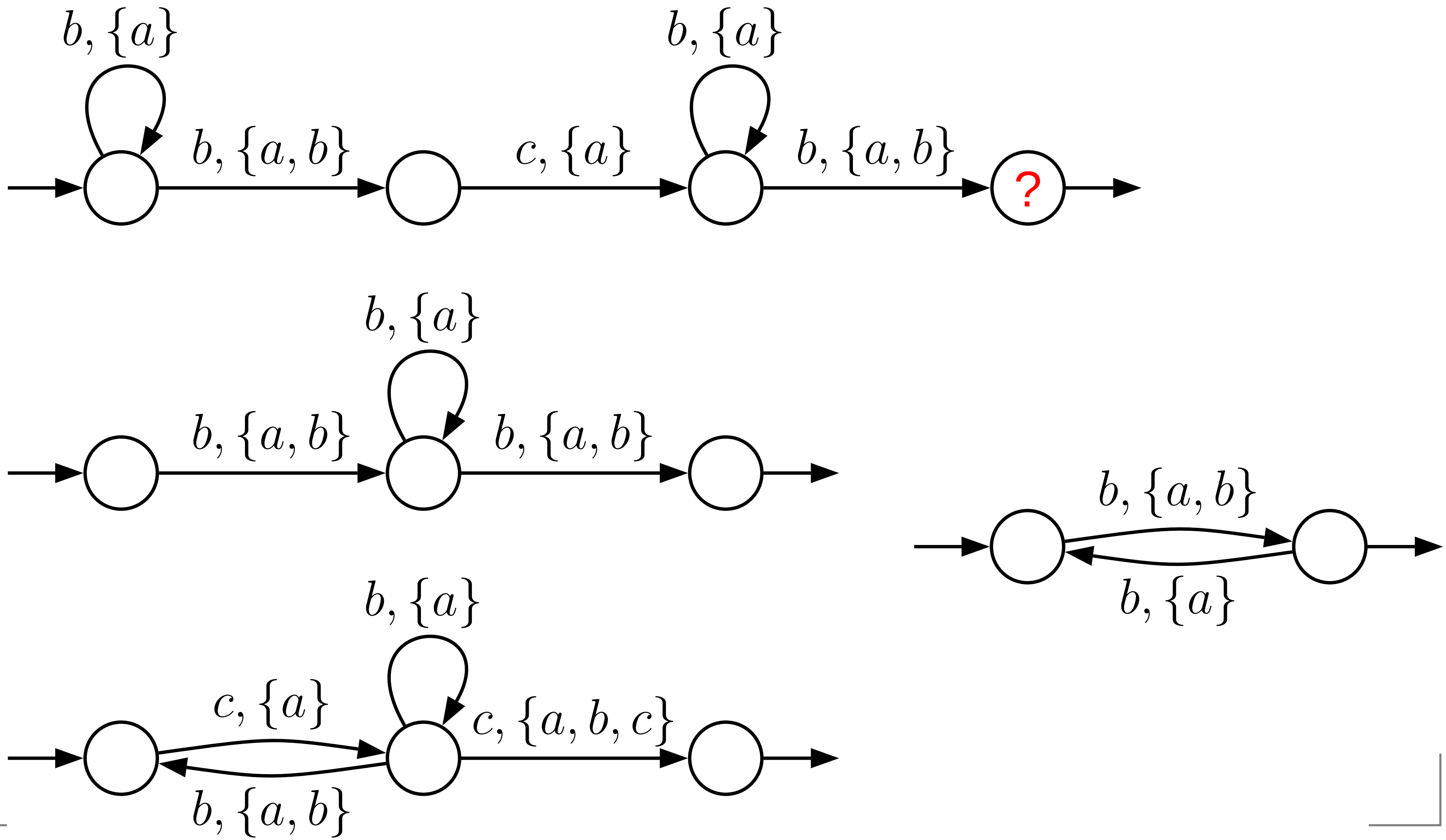




- $f \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$
- $g \in \mathcal{S}(\mathcal{A}) \iff \exists z_1, z_2, \ldots \begin{cases} z_1 = 0 \\ z_i < z_{i+1} \\ \lim\limits_{i \to \infty} z_i = 1 \\ g(x) = b \Leftrightarrow \exists i, x = z_i \end{cases}$
- $[f] = \mathcal{S}(\mathcal{A})$

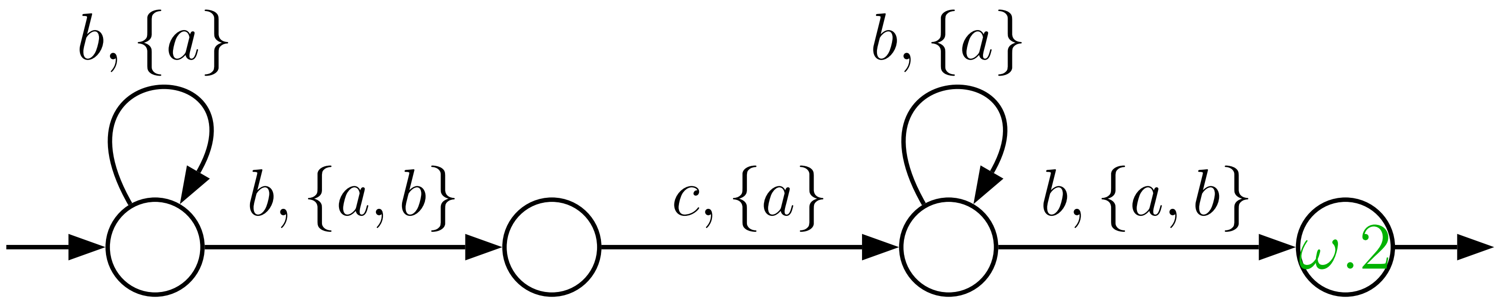
Exercices

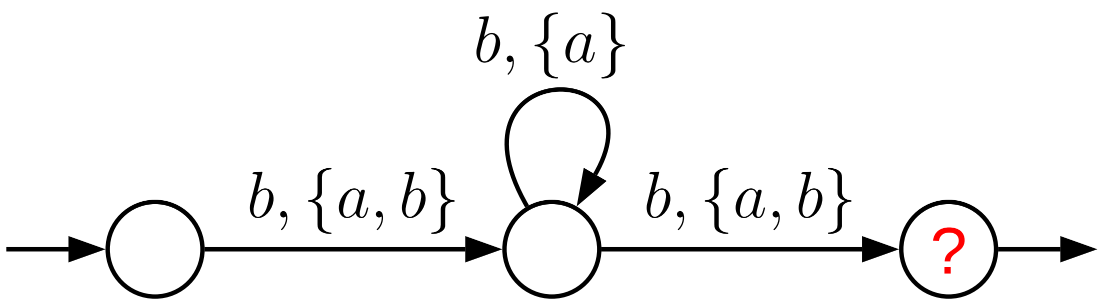
Trouver les langages de signaux pour :

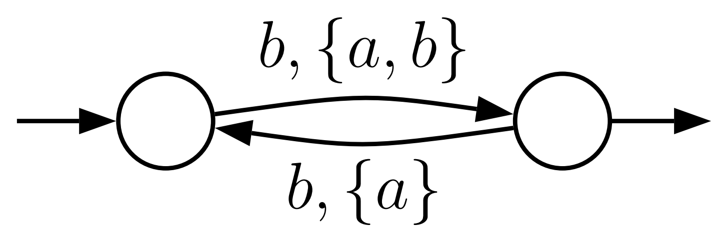


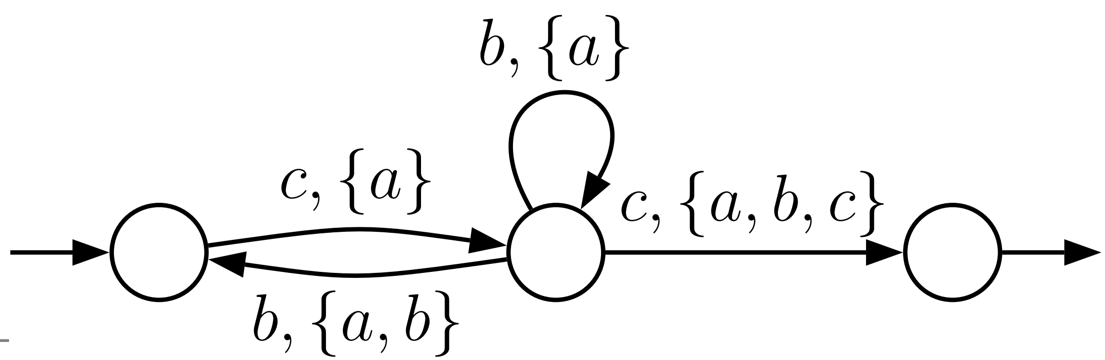
Exercices

Trouver les langages de signaux pour :



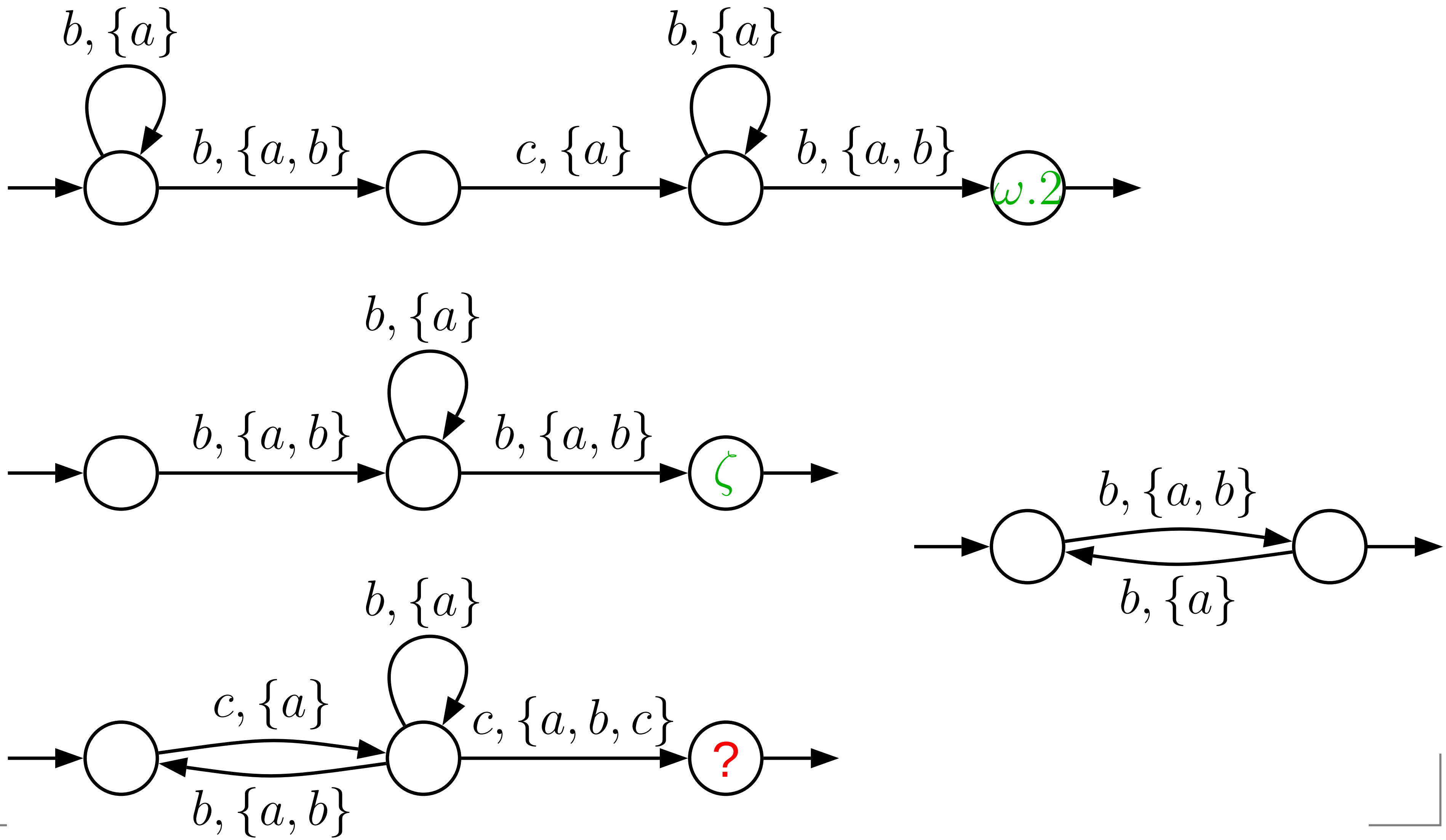






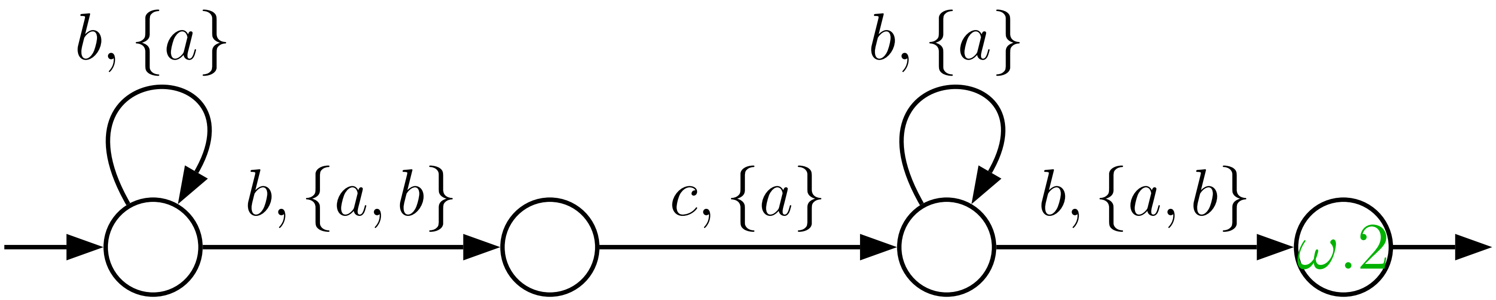
Exercices

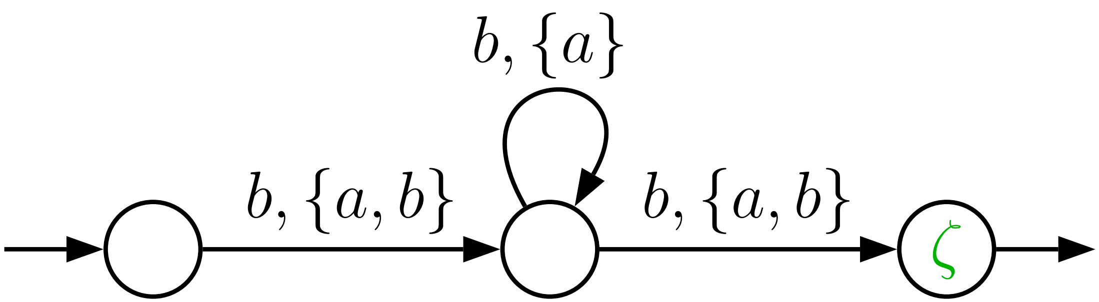
Trouver les langages de signaux pour :

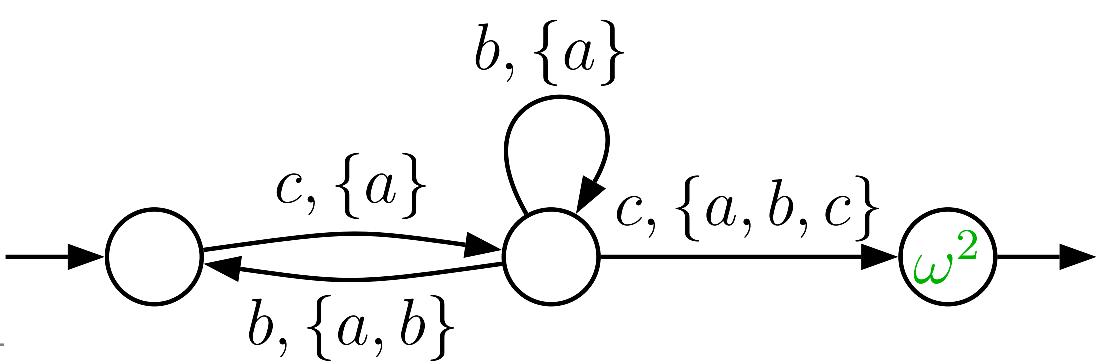


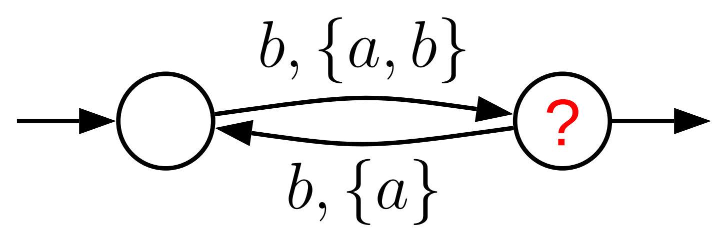
Exercices

Trouver les langages de signaux pour :



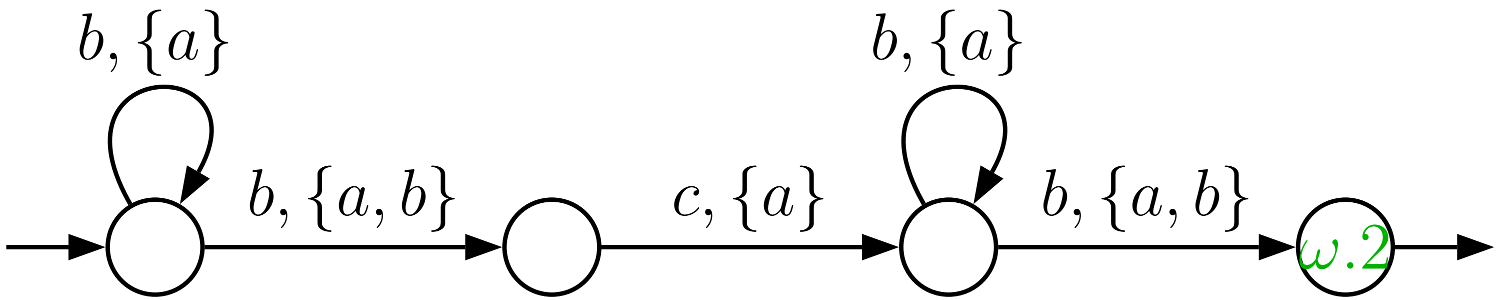


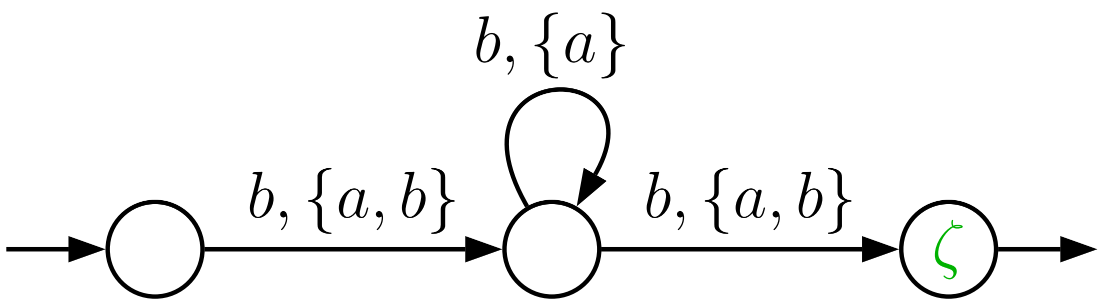


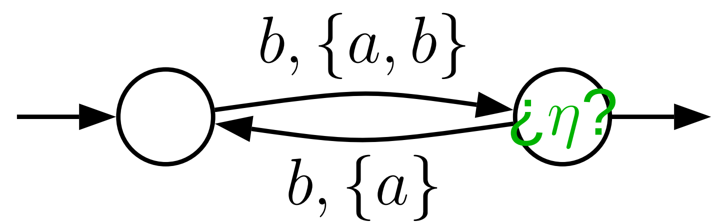


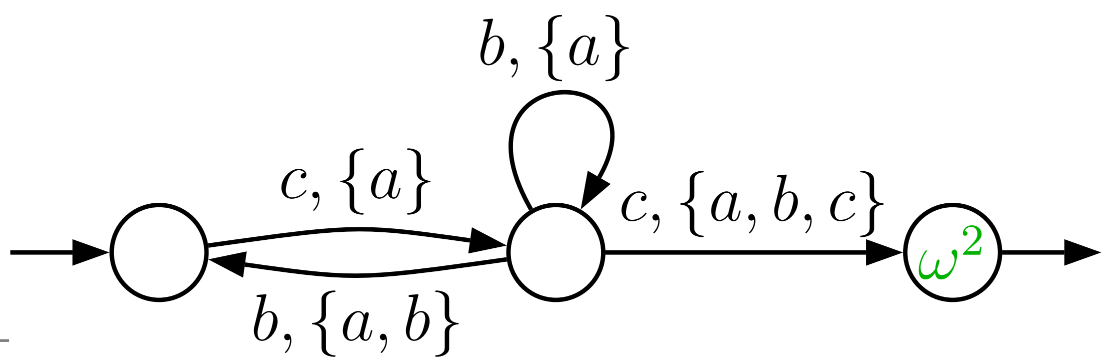
Exercices

Trouver les langages de signaux pour :









Cardinalité de l'ensemble des signaux

Notation $\beth_0 = \omega$ et $\beth_{i+1} = 2^{\beth_i}$, (*e.g.* $|\mathbb{R}| = \beth_1$)

$$\left|\{\mathcal{A} \text{ automate }\}\right| = \beth_0$$

$$\left|\{\text{ signaux }\}\right| = ???$$

$$\left|\Sigma^{[0,1[}\right| = \beth_2$$

Cardinalité de l'ensemble des signaux

Notation $\beth_0 = \omega$ et $\beth_{i+1} = 2^{\beth_i}$, (*e.g.* $|\mathbb{R}| = \beth_1$)

$\left|\{\mathcal{A} \text{ automate } \}\right| = \beth_0$

$\left|\{ \text{ signaux } \}\right| = \beth_1$

$\left|\Sigma^{[0,1[}\right| = \beth_2$

presque aucun signal n'est caractérisé par un automate

Question ouverte Regarder les *signaux compagnons*

$\left|\{\text{ signaux }\}\right| \leq \beth_1$

Soit $\left\{\mathcal{A}_i\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ une énumération des automates

$$\begin{array}{ccc} & \varphi & \\ [f] & \longmapsto & w \in \{0,1\}^\omega \\ & & w_i{=}1 \Leftrightarrow [f] \subseteq \mathcal{S}(\mathcal{A}_i) \end{array}$$

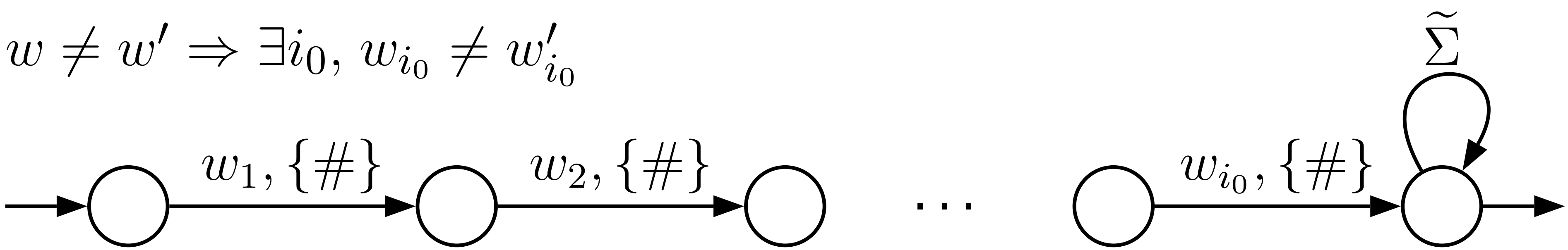
φ est injective car

$$[f] = \bigcap_{x_i=1} \mathcal{S}(\mathcal{A}_i) \cap \bigcap_{x_i=0} \overline{\mathcal{S}(\mathcal{A}_i)}$$

$\beth_1 \leq \left|\{\ \textbf{signaux}\ \}\right|$

$$w \in \{0,1\}^\omega \overset{\psi}{\longmapsto} \begin{array}{l} f \in \{0,1,\#\}^{[0,1[} \\ f\left(\frac{n-1}{n}\right) = w_i \\ f\left(\left]\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1}\right[\right) = \{\#\} \end{array}$$

$$w \neq w' \Rightarrow \exists i_0,\ w_{i_0} \neq w'_{i_0}$$



Accepte $\psi(w)$ mais pas $\psi(w')$ donc $[\psi(w)] \neq [\psi(w')]$

$[\psi(.)]$ est injective

Adaptable à deux lettres

Questions ouvertes

- Opérations classiques sur les automates
  - Union OK
  - Concaténation. . . (il me manque une inclusion ou un contre-exemple)
  - Étoile. . .
- Fermetures
  - Complémentaire. . . (conj. non)
  - Intersection. . .
- Opérations supplémentaires
  - ω, $-\omega$ et ζ-itérations ($\diamond$ et $\#$)
- Identification des langages de signaux
  - Expressions rationnelles
  - Théorème de KLEENE