

# Calculer géométriquement sur le plan

– *machines à signaux* –

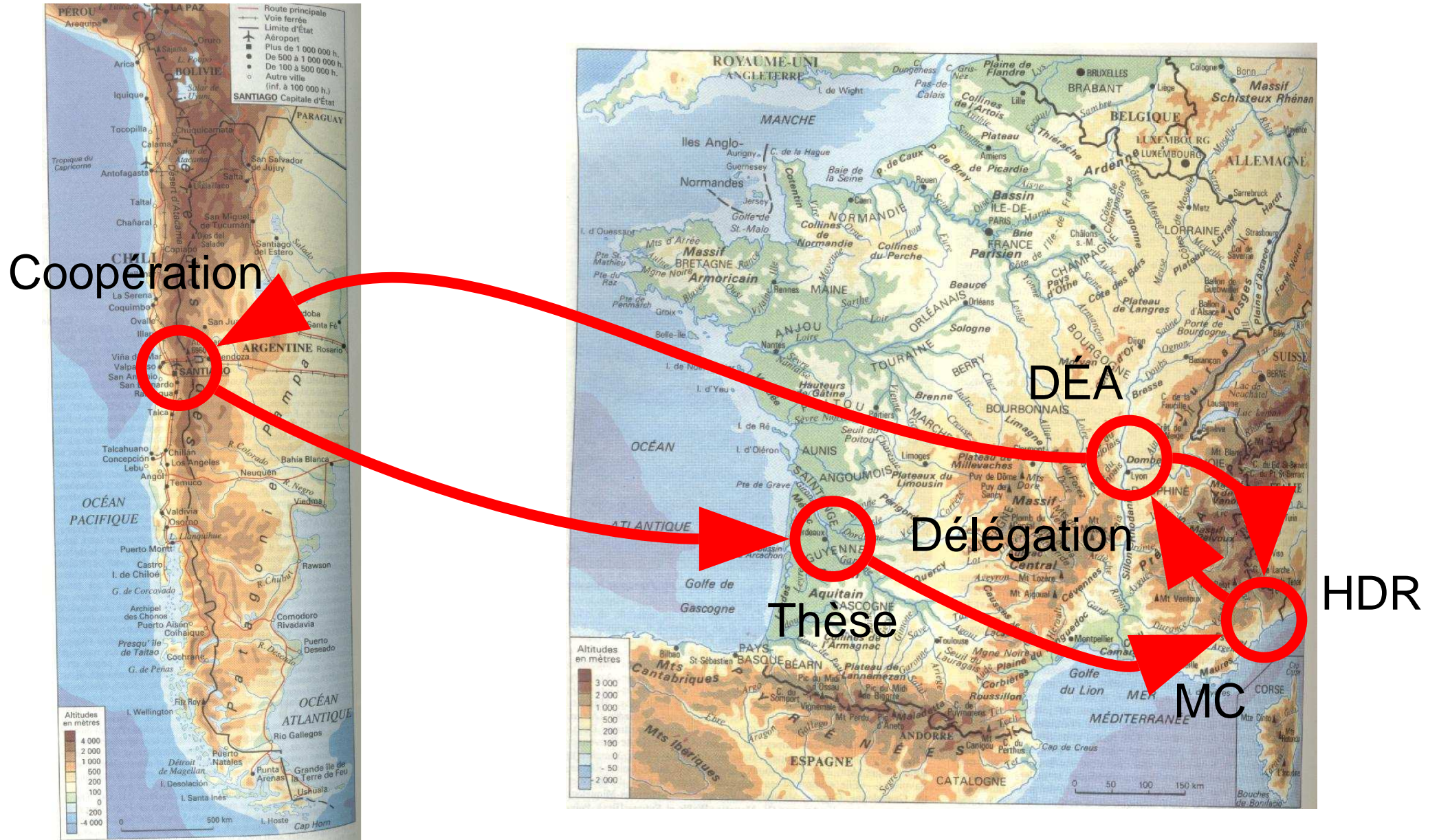
Jérôme DURAND-LOSE

MC2, LIP (UMR CNRS, ÉNS Lyon, INRIA, Univ. Claude Bernard Lyon 1)

et Université de Nice-Sophia Antipolis

LaBRI – 11 mars 2004

# Parcours géographique



# Parcours scientifique

Automates cellulaires

Réversibilité

Systemes complexes

Tas de sable

Lignes  
discrètes / continus

Machines à  
signaux

Modèles de calcul  
« continus »

Algorithmique distribuée

Auto-stabilisation

# Calculer géométriquement sur le plan

– *machines à signaux* –

# Plan

- Origine
  - Automates cellulaires
- Machines à signaux
  - Universalité au sens du calcul
  - Modifications géométriques
- Accumulation
  - Non-prédictibilité de l'apparition
  - Continuation
- Conclusion et perspectives

**Origine**

**— Automates cellulaires —**

# Automates cellulaires

Outil de modélisation en biologie, physique. . . parallélisme

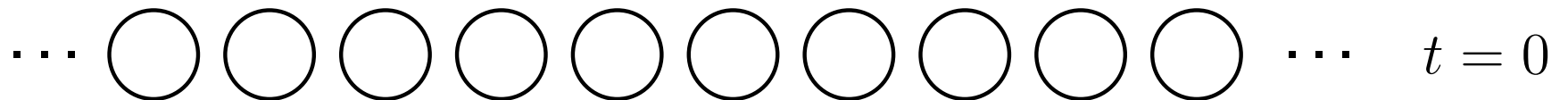
Systeme dynamique

# Automates cellulaires

Outil de modélisation en biologie, physique. . . parallélisme

Systeme dynamique

Cellules

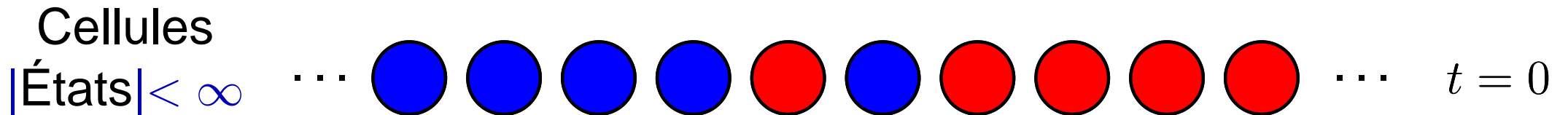




# Automates cellulaires

Outil de modélisation en biologie, physique. . . parallélisme

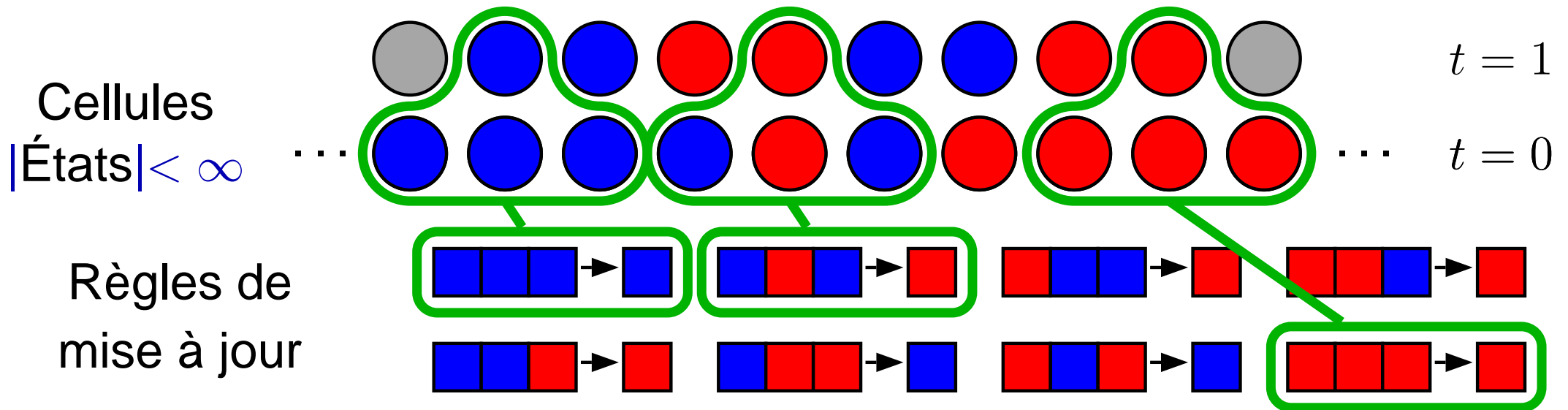
Systeme dynamique



# Automates cellulaires

Outil de modélisation en biologie, physique... parallélisme

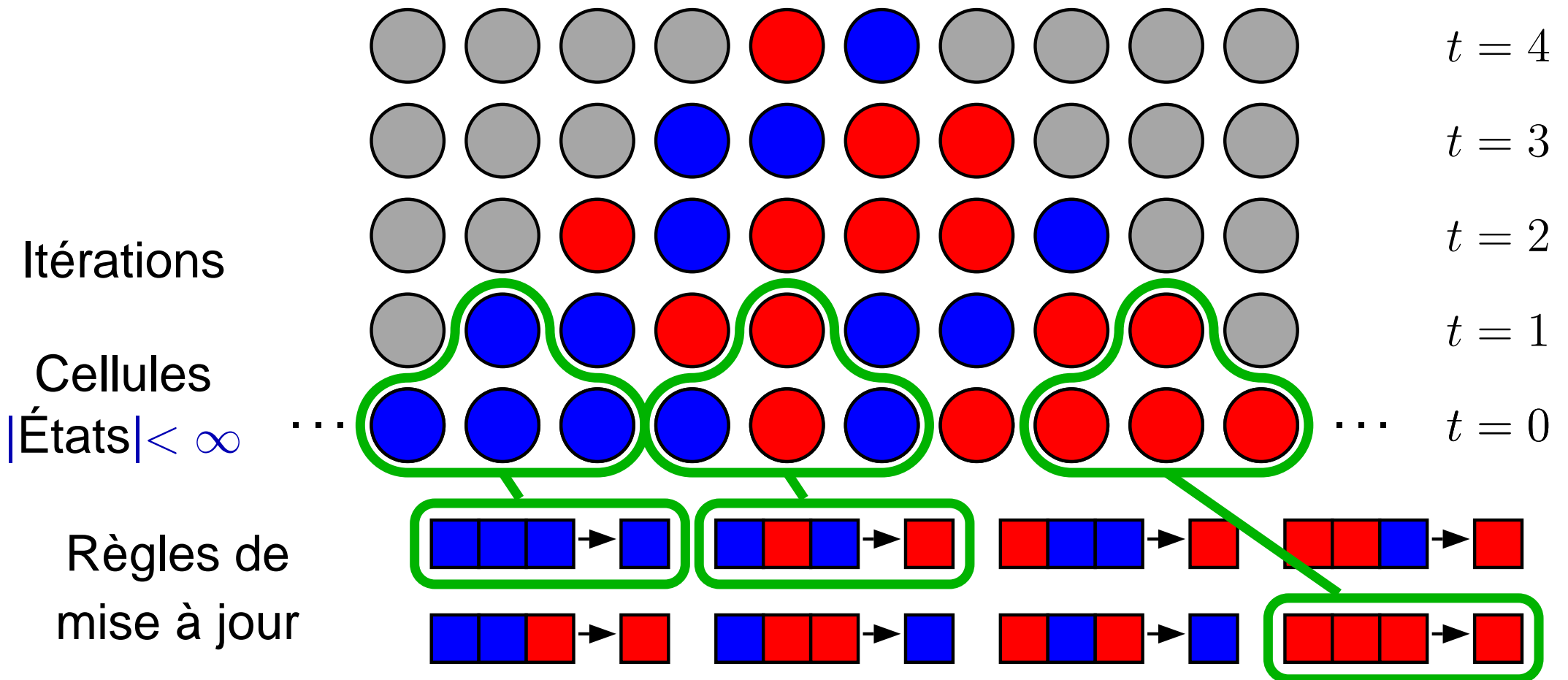
Systeme dynamique



# Automates cellulaires

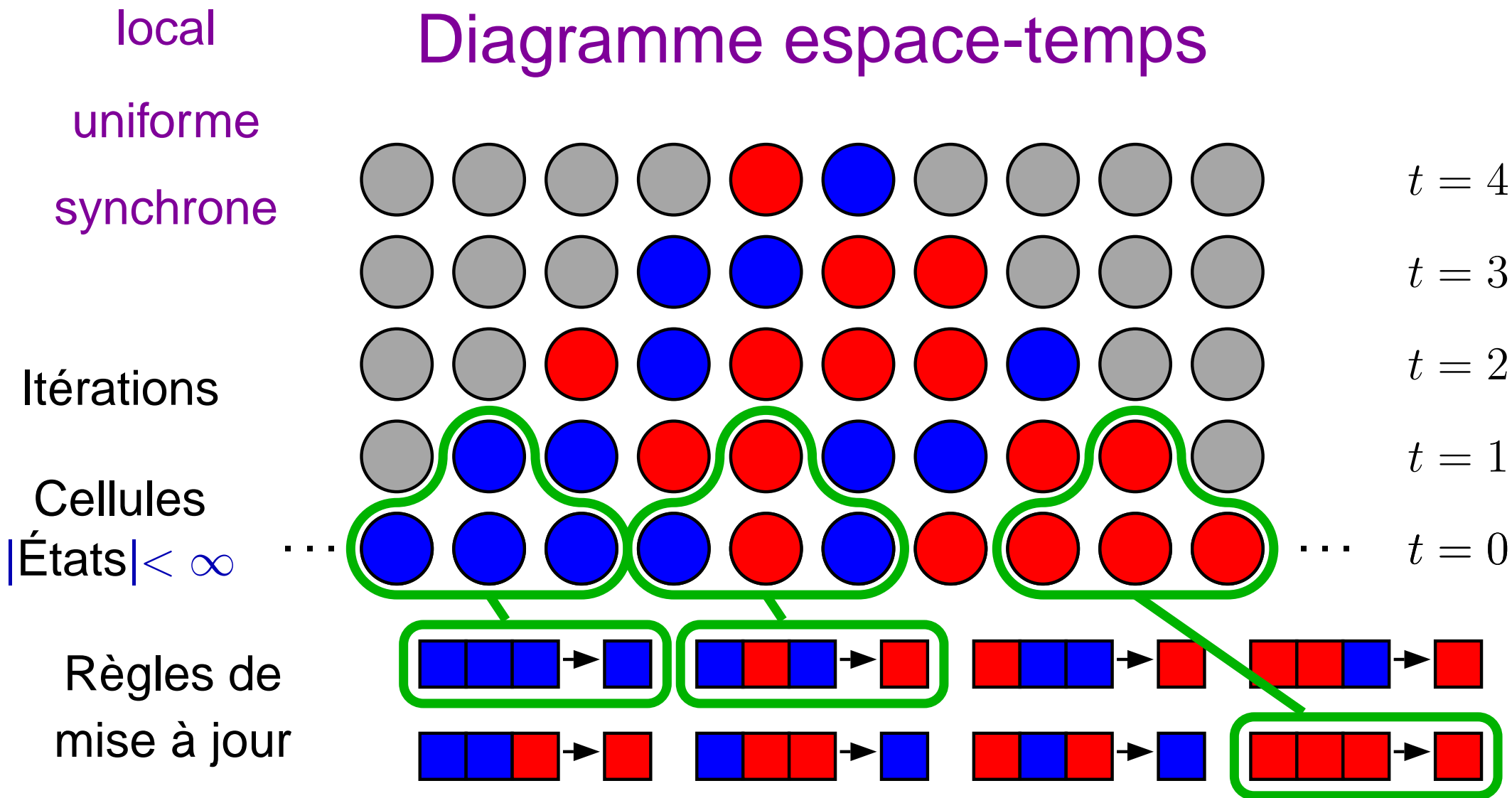
Outil de modélisation en biologie, physique... parallélisme

Systeme dynamique

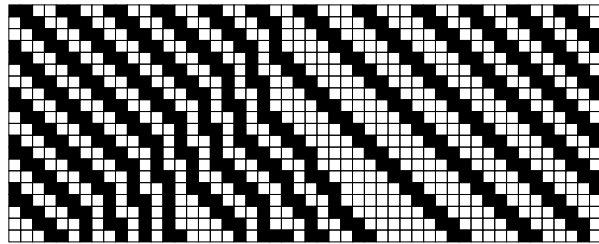


# Automates cellulaires

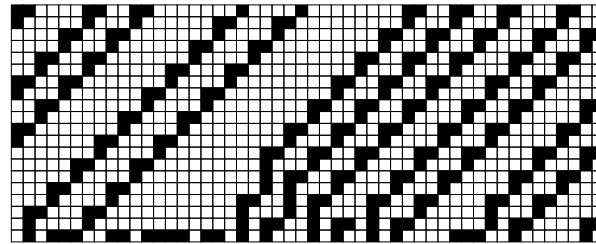
## Diagramme espace-temps



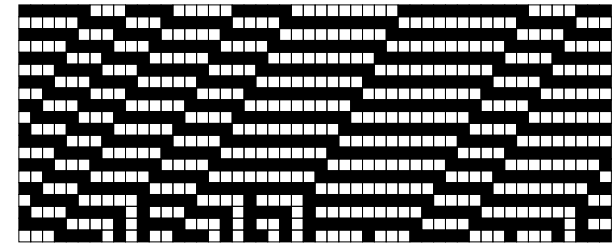
# Automates cellulaires élémentaires



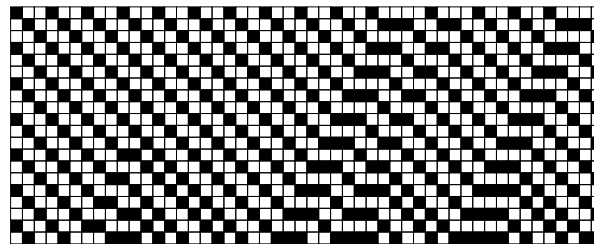
Règle 14



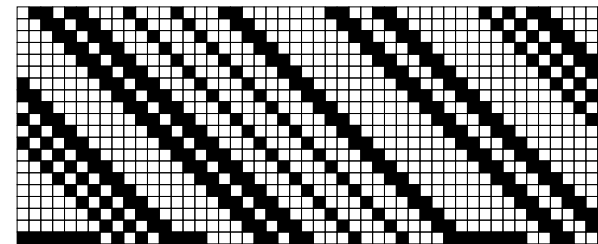
Règle 20



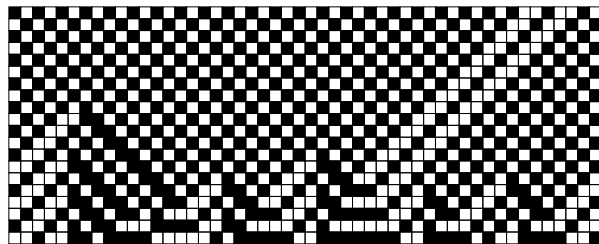
Règle 31



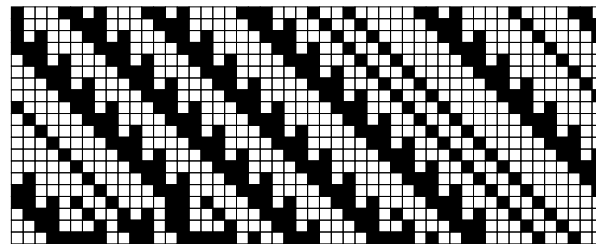
Règle 35



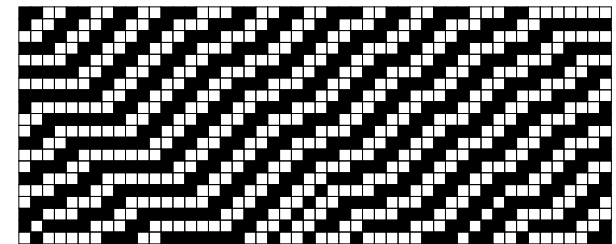
Règle 42



Règle 57



Règle 74



Règle 113

# Particules, solitons...

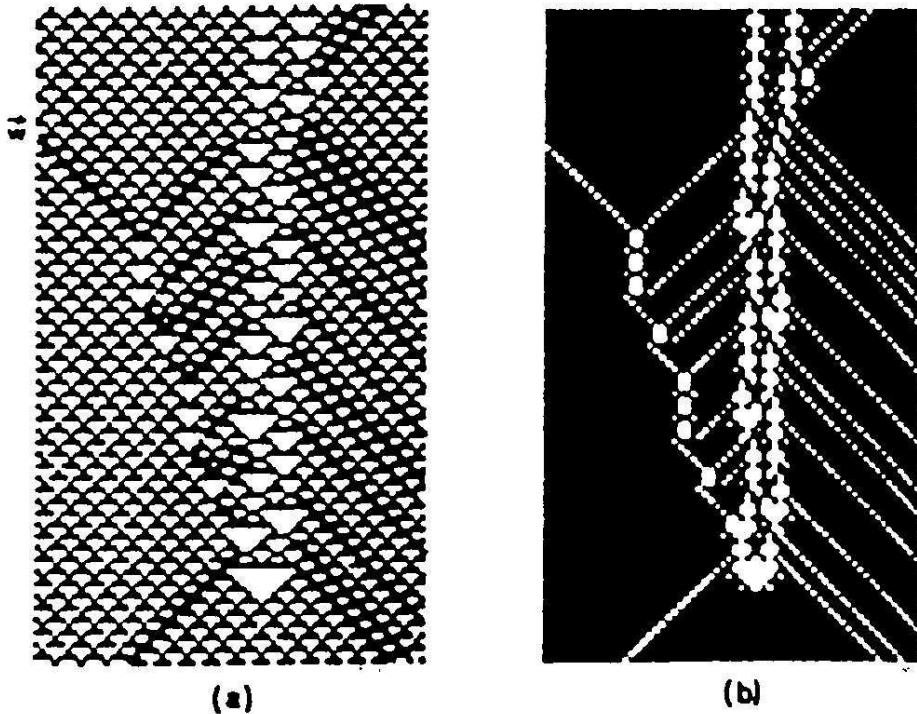


FIG. 7. Rule 54. (a) Annihilation of the radiating particle. (b) The same as (a) with the mapping defined in Fig. 6.

[Boccaro et al., 1991, Fig. 7]

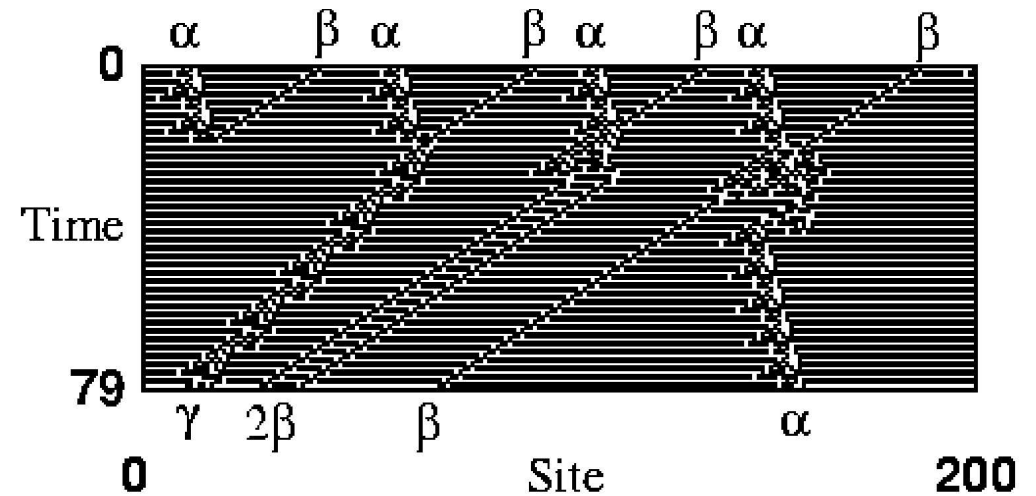


FIG. 7. The four different (out of 14 possible) interaction products for the  $\alpha + \beta$  interaction.

[Hordijk et al., 2001, Fig. 7]

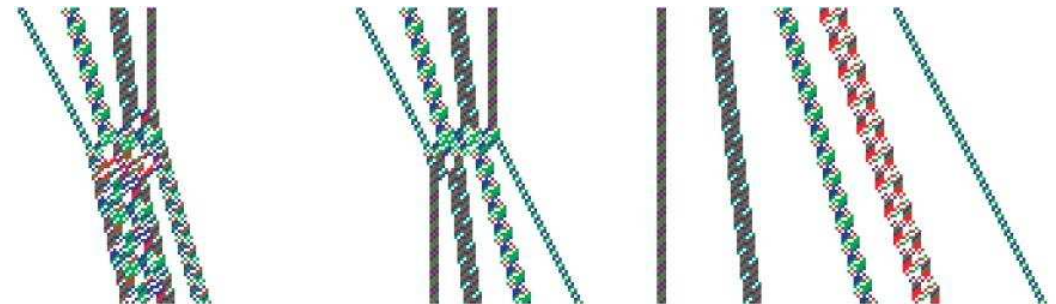


Figure 5. Two collisions of filtrons, and five free filtrons supported by the FPS model; ST diagram applies  $q = 1$ .

[Siwak, 2001, Fig. 5]

# Pour construire un AC Turing-universel

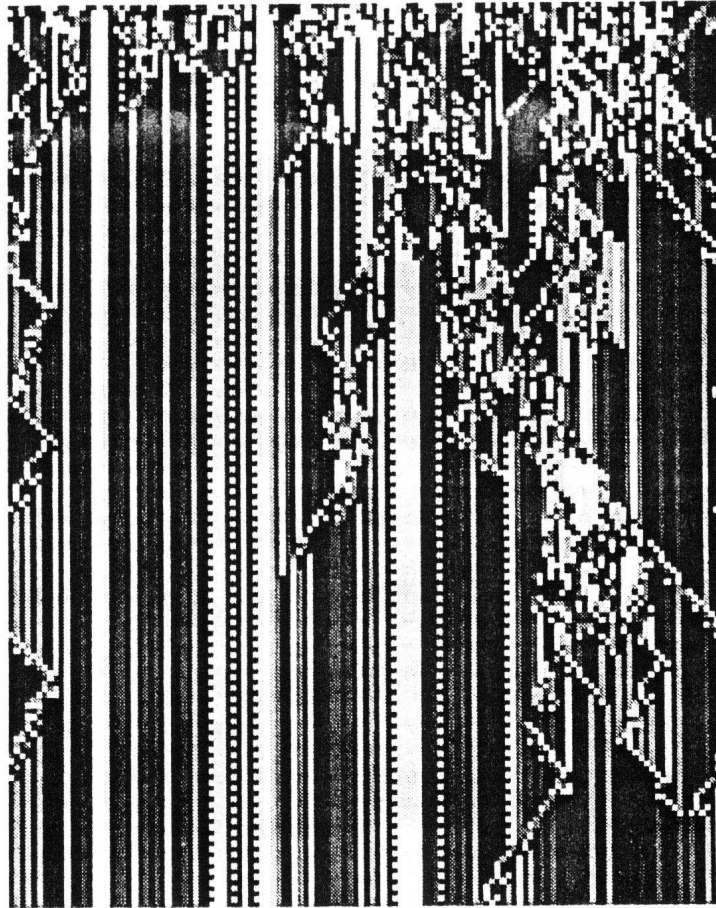



Figure 3: A simulation of the  $k = 7$ ,  $r = 1$  universal CA of table 3 for an uncorrelated initial state (with a density of blanks equal to 0.76). Symbols  $y$ , 0, 1,  $A$ ,  $B$ ,  $\sqcup$ , and  $T$  are represented by 

[Lindgren and Nordahl, 1990, Fig. 4]

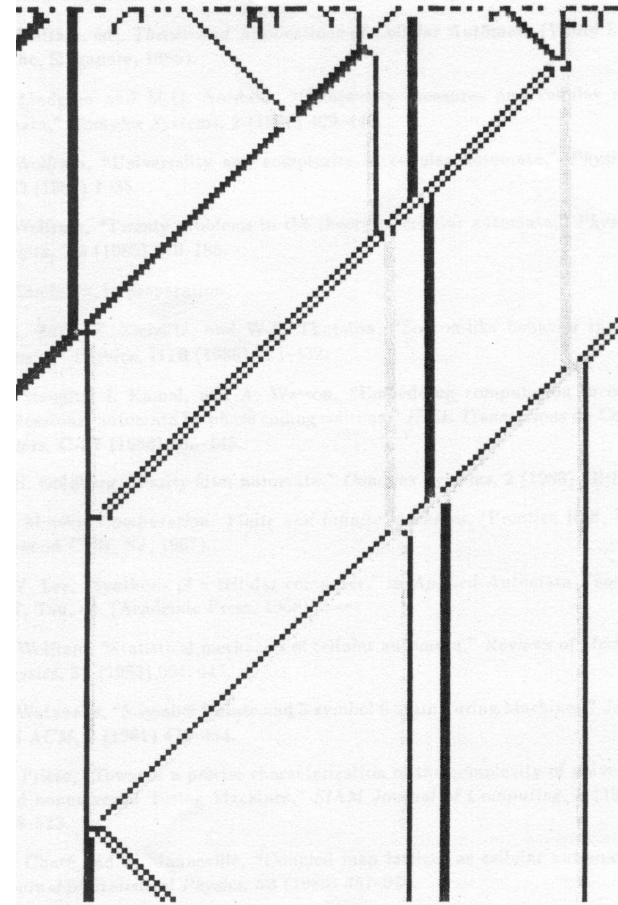



Figure 4: The  $k = 4$ ,  $r = 2$  universal cellular automaton of table 4 simulated starting from a random initial state. The symbols 0, 1,  $\sqcup$ , and  $+$  are represented by 

[Lindgren and Nordahl, 1990, Fig. 3]

# Algorithmique géométrique

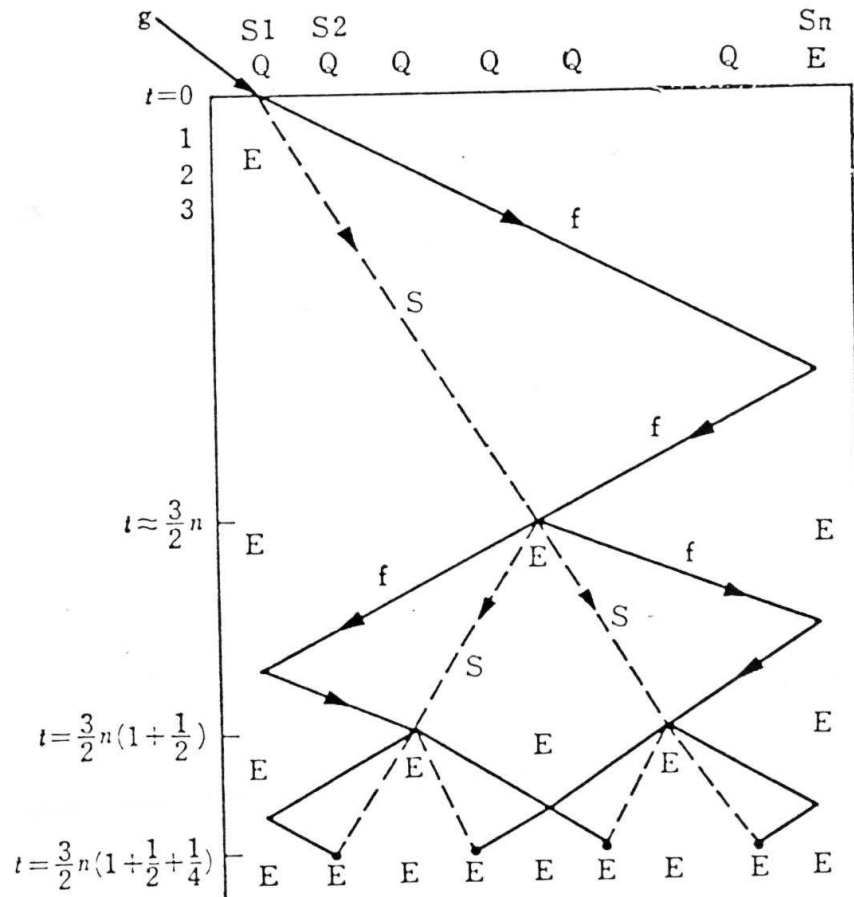


図 3.5 一斉射撃の問題 (連続近似)

[Goto, 1966, Fig. 3]

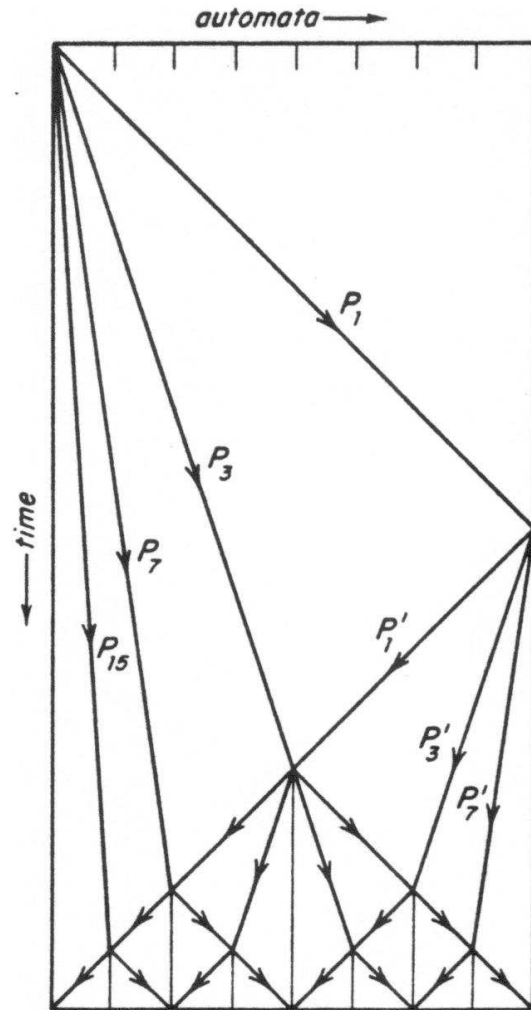
G	s <sub>1</sub>	s <sub>2</sub>	s <sub>3</sub>	s <sub>4</sub>	s <sub>5</sub>	s <sub>6</sub>
g	Q	Q	Q	Q	Q	E
t=0	f's'Es	Q	Q	Q	Q	E
1	E	Q2f	Q	Q	Q	E
2	E	Q1	Qf	Q	Q	E
3	E	Q&	Q	Qf	Q	E
4	E	Q	Q2	Q	Qf	E
5	E	Q	Q1	Q	Q	f'Ef
6	E	Q	QS	Q	f'Q	E
7	E	Q	Q	a'Q*	Q	E
8	E	Q	f'S'ESf	f's'Esf	Q	E
9	E	f'2Q	E	E	Q2f	E
10	f'Ef	1Q	E	E	Q1	f'Ef
11	E	f'S'ESf	E	E	f's'Esf	E
12	a'Ea	E	a'Ea	a'Ea	E	a'Ea
13	F	F	F	F	F	F

図 3.6 一斉射撃解 (n=6)

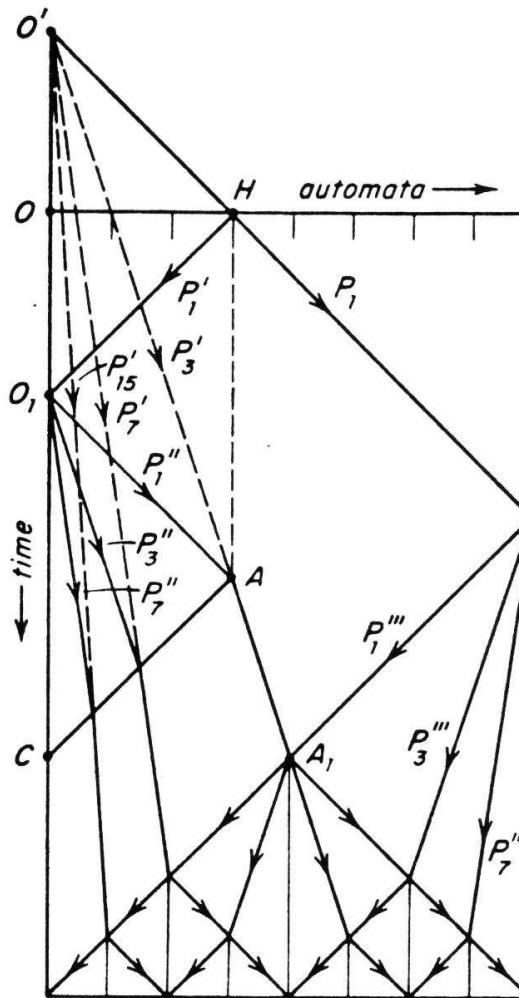
[Goto, 1966, Fig. 6]



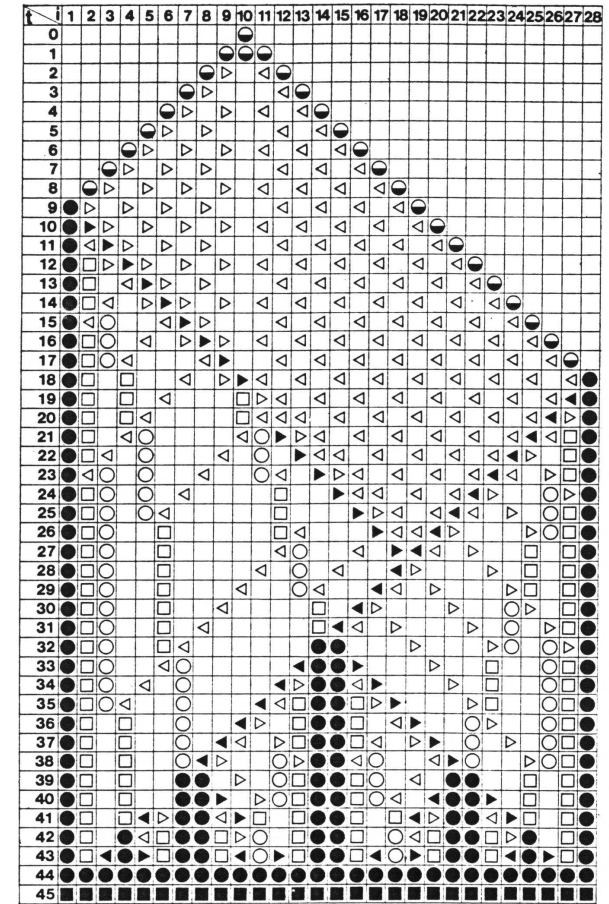
# Algorithmique géométrique - 2



[Varshavsky et al., 1970, Fig. 1]



[Varshavsky et al., 1970, Fig. 2]



Notation

A	B	C	D	D	E <sub>1</sub>	E <sub>2</sub>	R	F
●	◀	▶	◁	▷	○	□	●	■

[Varshavsky et al., 1970, Fig. 3]

# Algorithmique des signaux

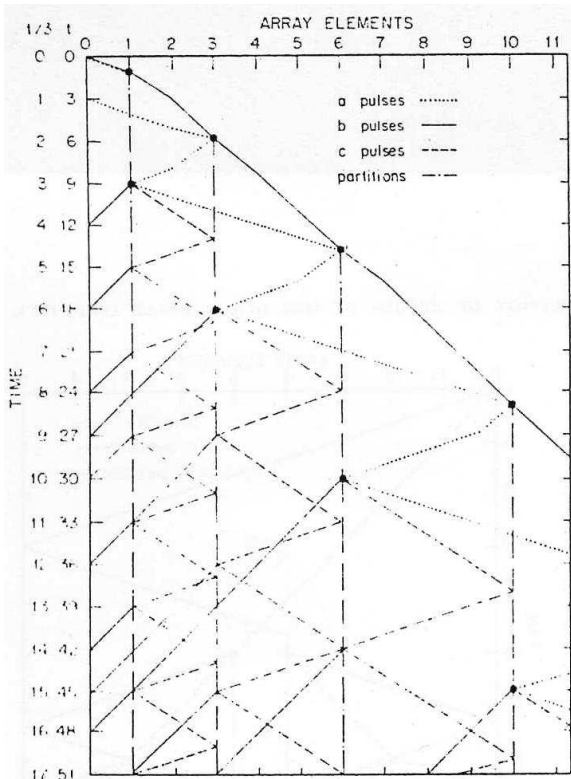


FIG. 2. Solution to the prime problem

[Fischer, 1965, Fig. 2]

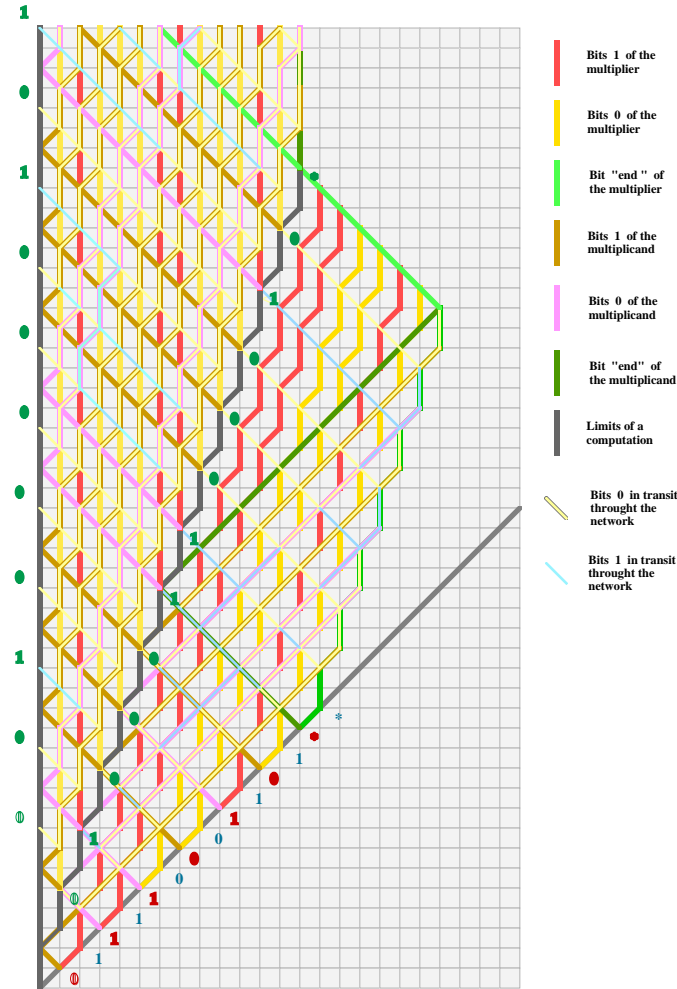


Figure 8: Computing  $(ab)^2$ .

[Mazoyer, 1996, Fig. 8]

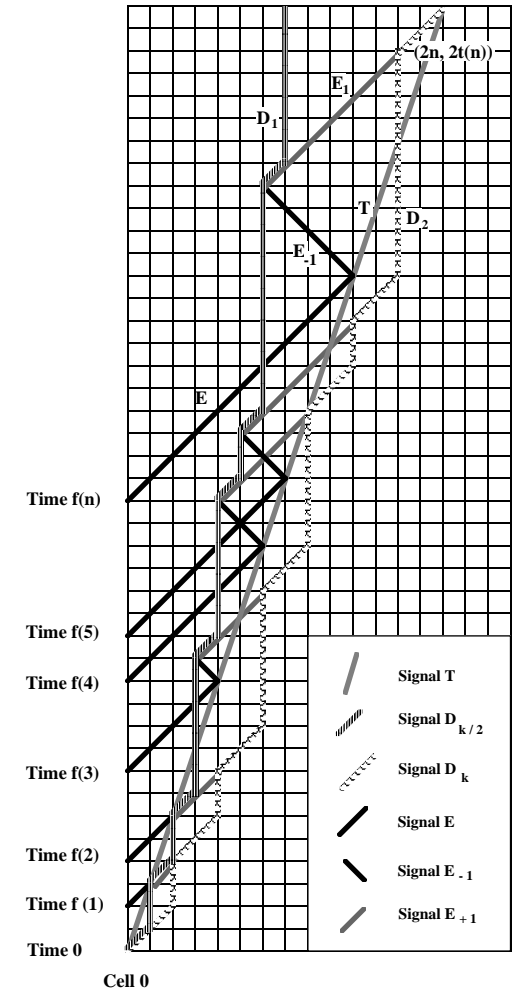


Figure 18: Characterization of the sites  $(n, f(n))$ .

[Mazoyer and Terrier, 1999, Fig. 18]

# Origine

Diagrammes espace-temps (discrets)

Observation



Implantation

Lignes discrètes

Interprétation



Discretisation

Lignes sur le plan

Dynamiques



Conception

# Origine

Diagrammes espace-temps (discrets)

Observation



Implantation

Lignes discrètes

Interprétation



Discretisation

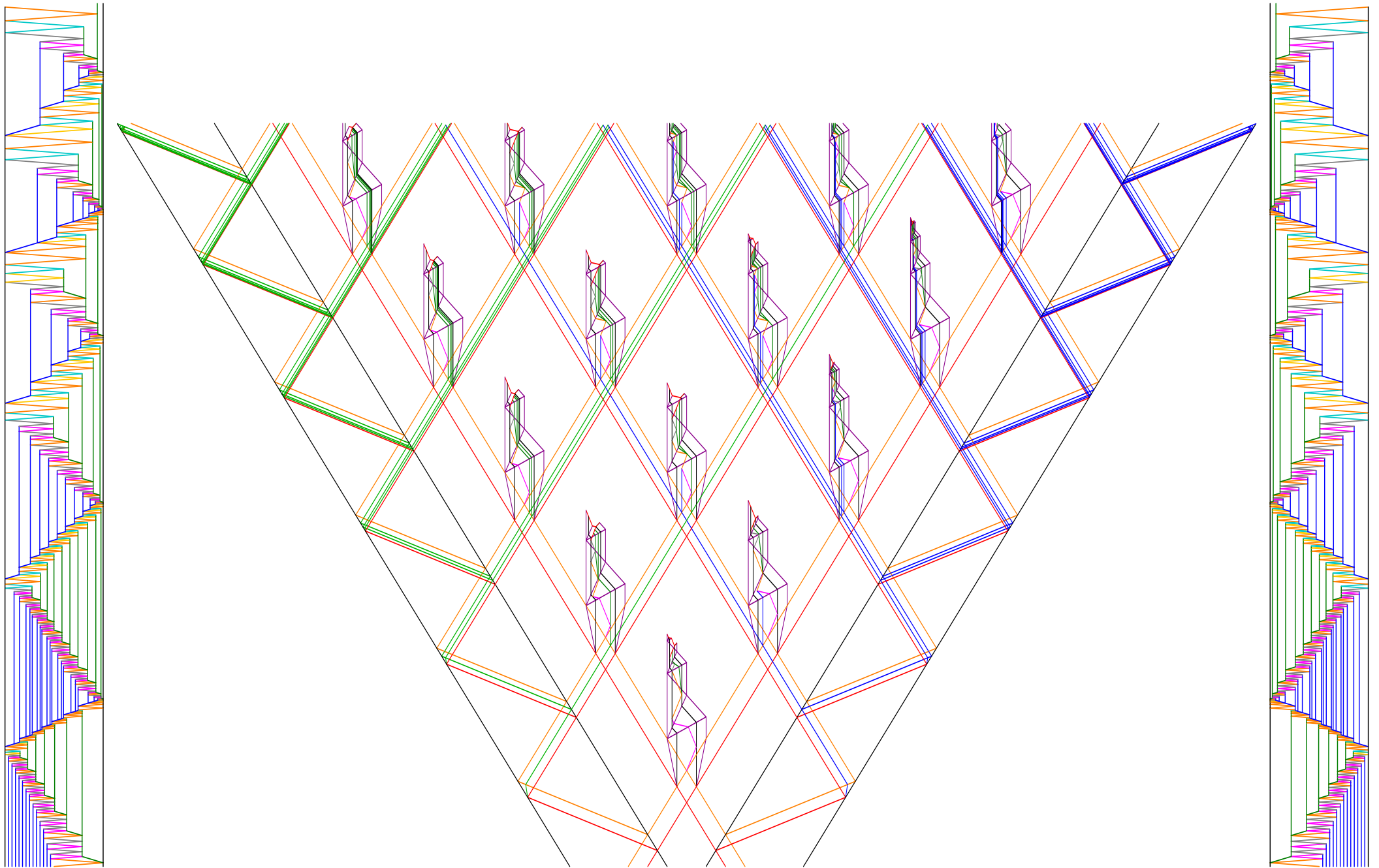
Lignes sur le plan

Dynamiques



Conception

Modèle en lui-même

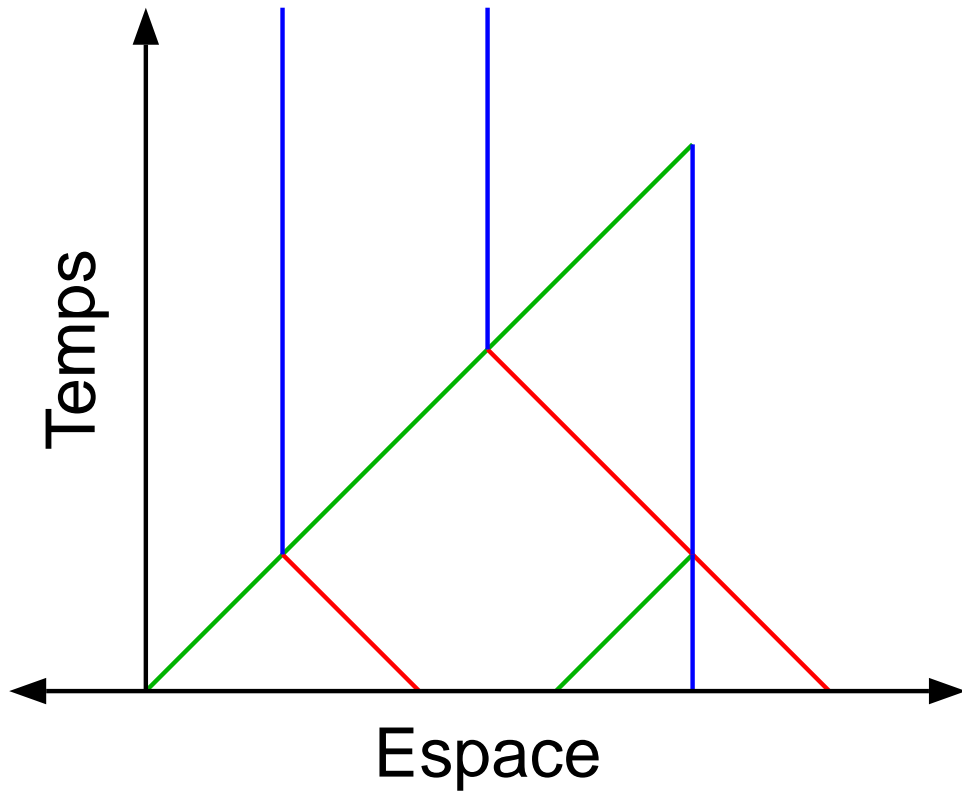


# Machines à signaux

# Analyse du modèle

~~$\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$~~

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$



# Analyse du modèle

~~$\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$~~

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$

*Signal*

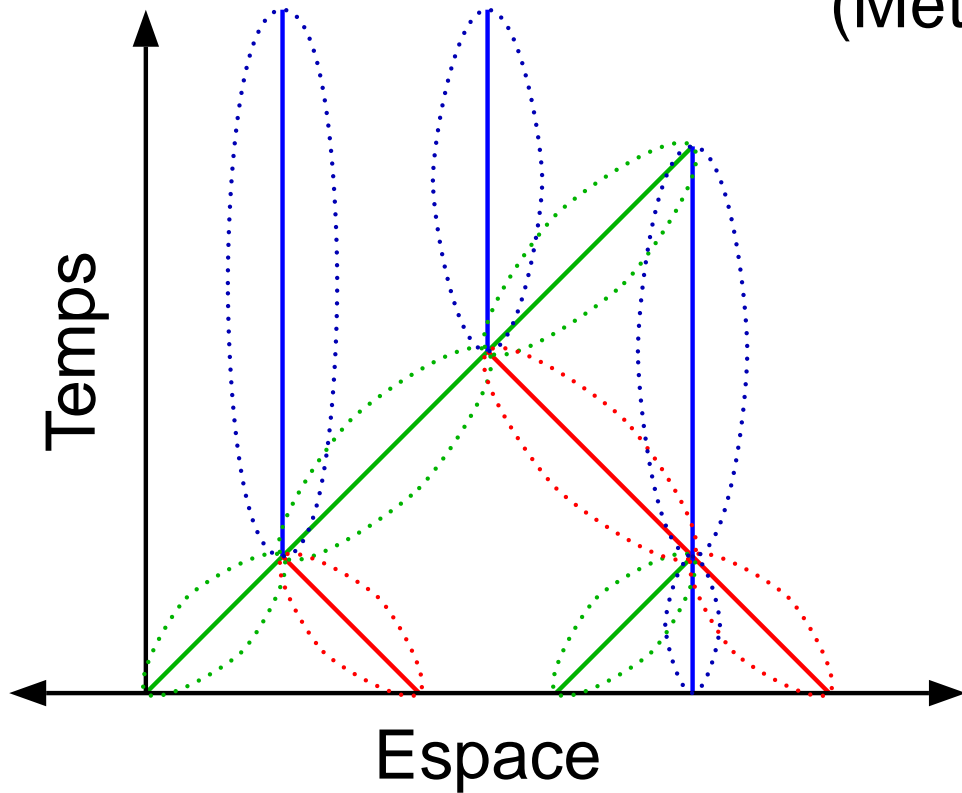
(Méta-signal, position)

*Position*

$(x, t)$

*Méta-signal*

$\mu = (\iota, \nu)$

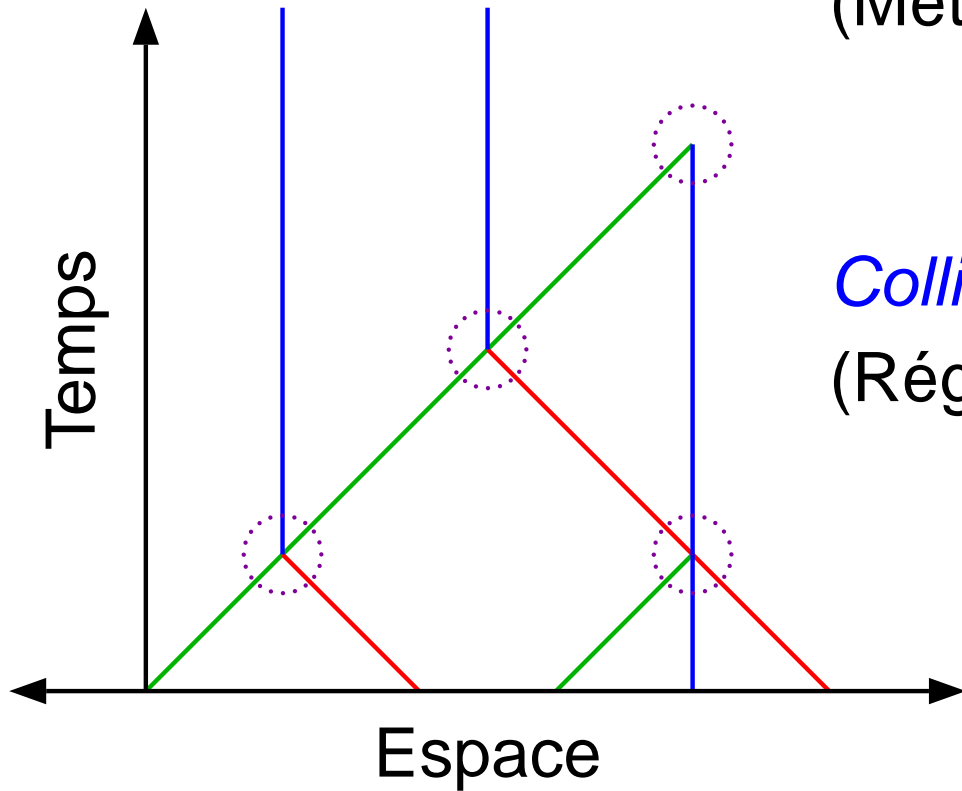




# Analyse du modèle

~~$\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$~~

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$



*Signal*

(Méta-signal, position)

*Position*

$(x, t)$

*Collision*

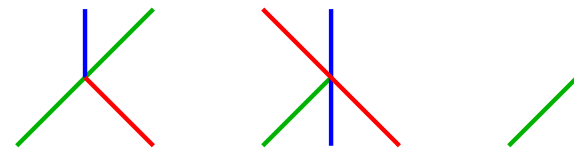
(Règle, position)

*Méta-signal*

$\mu = (\iota, \nu)$

*Règle*

$\rho = \{\mu_i^-\}_i \rightarrow \{\mu_j^+\}_j$



# Définition du modèle

*Machine*

$$\mathcal{M} = (\{\mu_i\}_i, \{\rho_j\}_j)$$

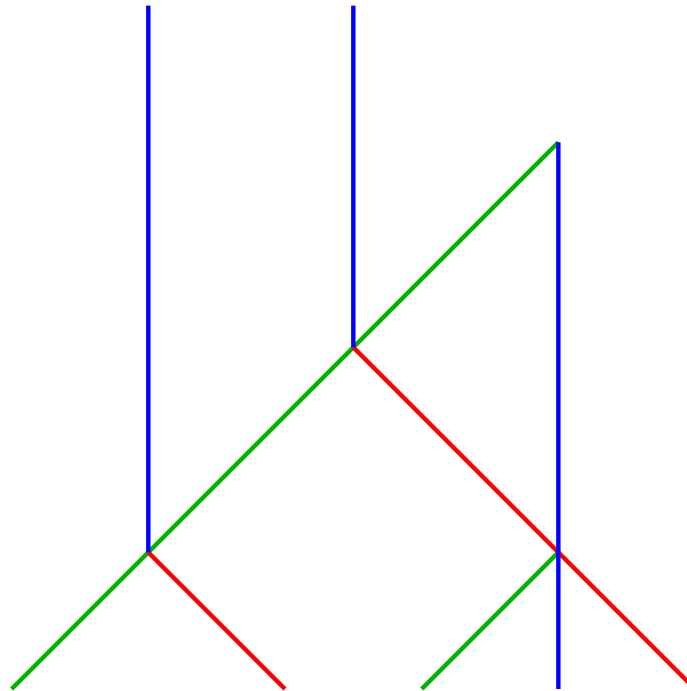
Description finie

Déterministe

*Configuration* (à  $t$ )

Positions des  
signaux et collisions

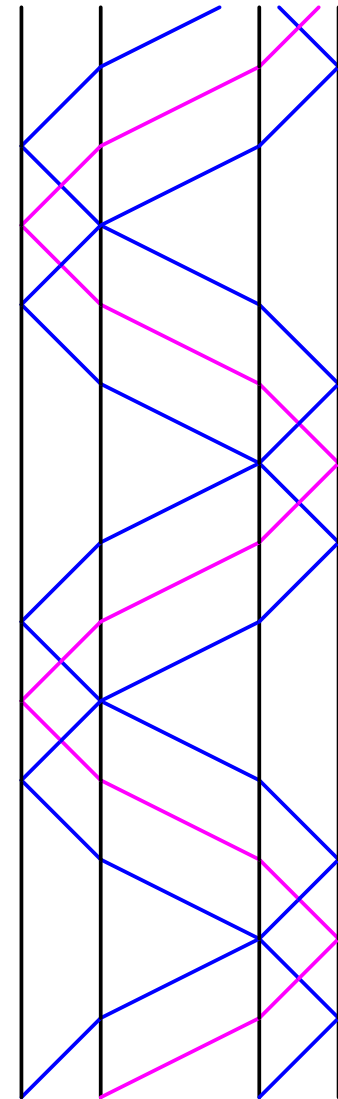
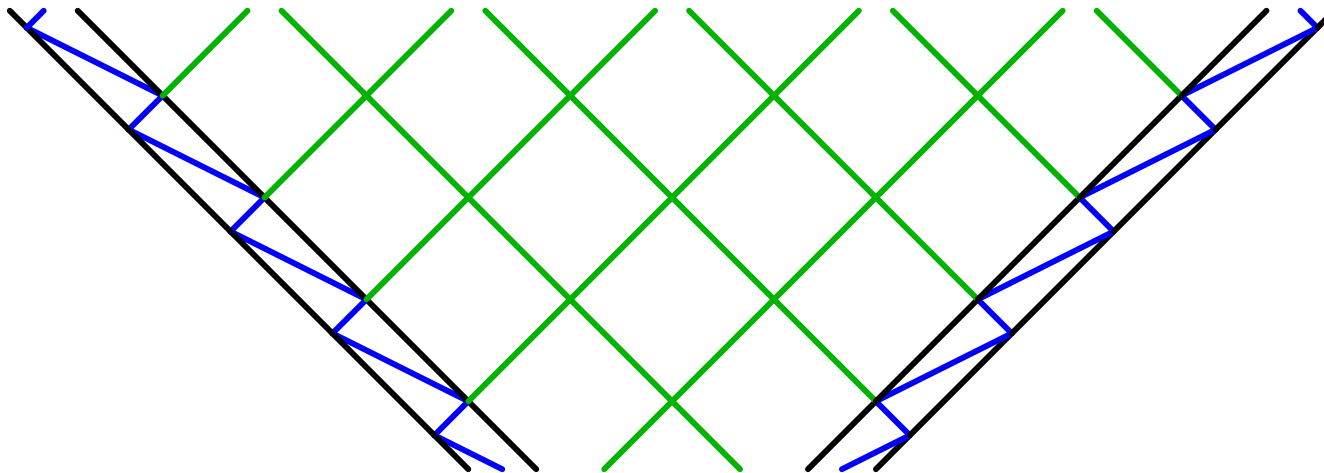
*Diagramme espace-temps*



*Calcul*  
collisions +  
ordre de dépendance

# Propriétés

- Uniforme dans le temps et l'espace
- Local
- Cône de lumière
- Nombre fini de valeurs et de règles
- Espace et temps continus



# Calculer

# Turing-universalité

## Simulation automate à deux compteurs

```

beg: B++
    A--
    A != 0 beg1
    B != 0 imp
beg1: A--
    A != 0 beg
pair: B--
    A++
    B != 0 pair
    A != 0 beg
imp: B--
    A++
    A++
    B != 0 imp1
    A != 0 beg
imp1: B--
    A++
    A++
    A++
    B != 0 imp1
    A != 0 beg
    
```

A et B deux compteurs à valeurs dans  $\mathbb{N}$

### Opérations

A++

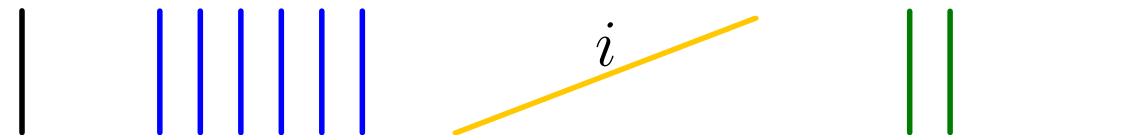
B++

A--

A--

A != 0 <label>    B != 0 <label>

### Codage

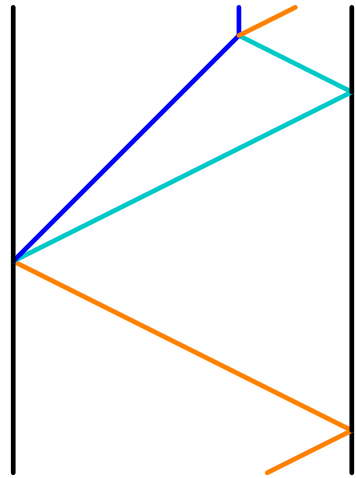


bord     $a_0 = 6$     instruction  $i$      $b_0 = 2$     bord

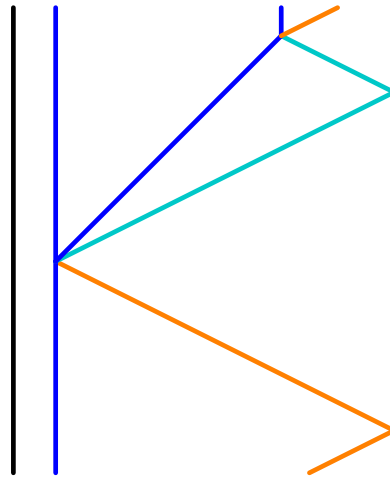
*Place illimitée pour les signaux*

# Transcription des instructions

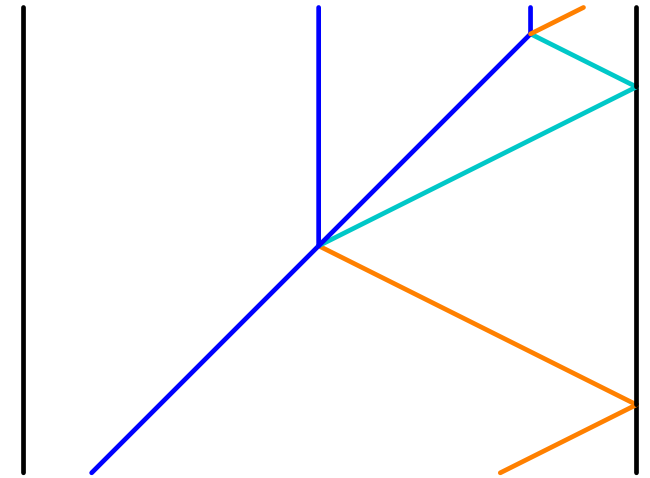
$A++$



$a = 0$

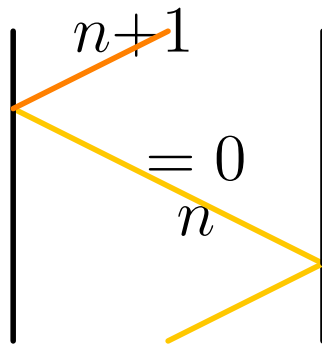


$a \neq 0$

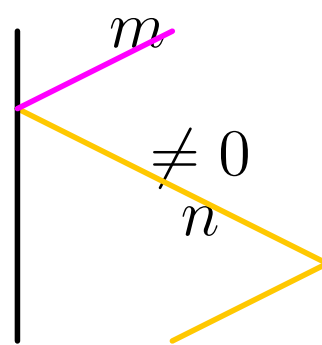


Après  $A++$

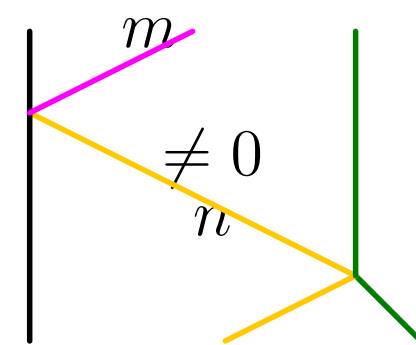
$B \neq 0$   $m$



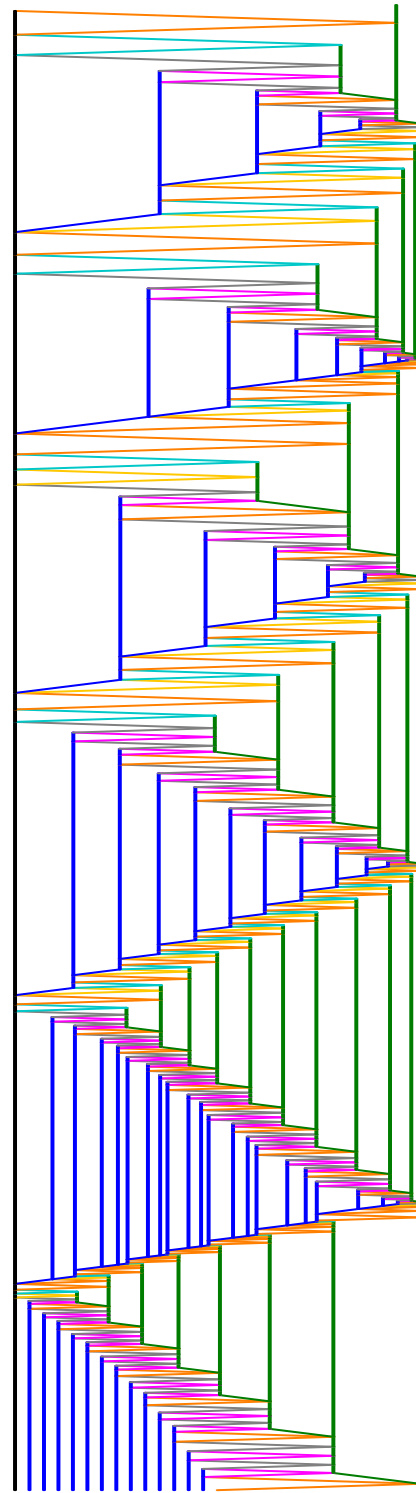
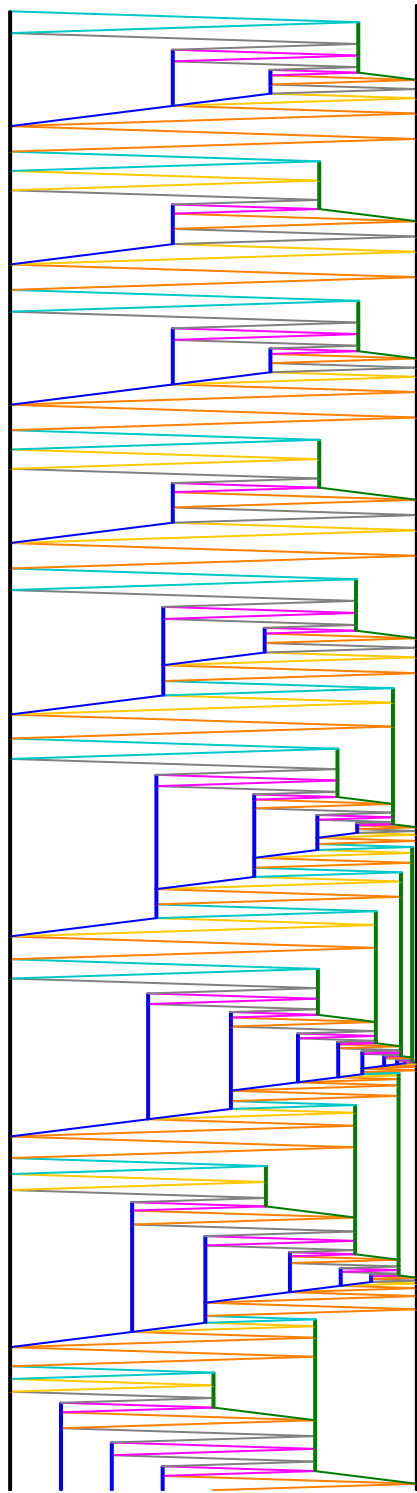
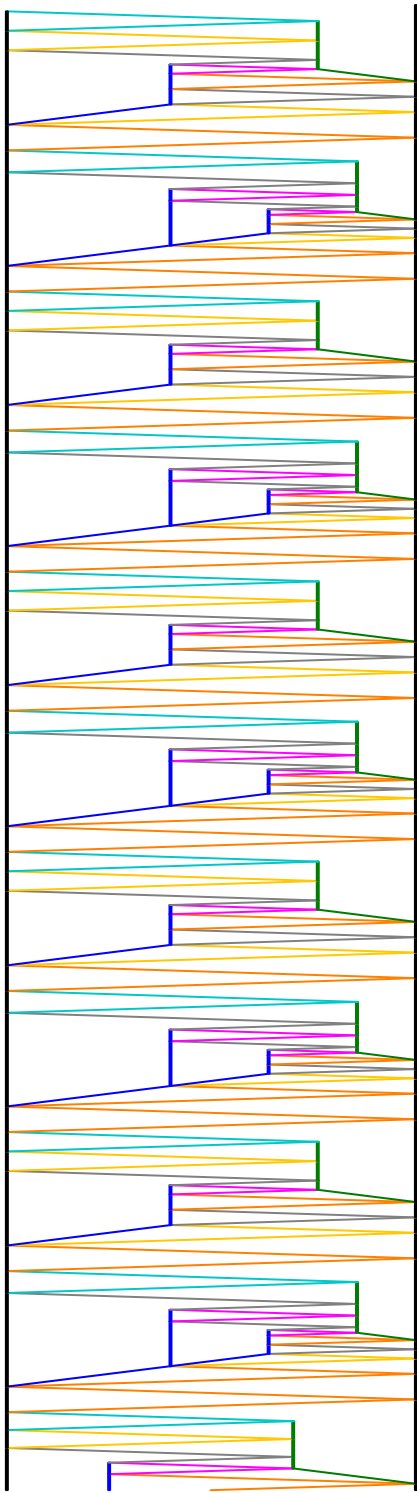
$= 0$



$\neq 0$



$\neq 0$



# Turing-universel

Tout calcul récursif peut être réalisé

↪ *Imprédictible*

e.g. sont indécidables

- nombre fini de collisions
- apparition d'un méta-signal



# Modifications géométriques

# Constructions géométriques

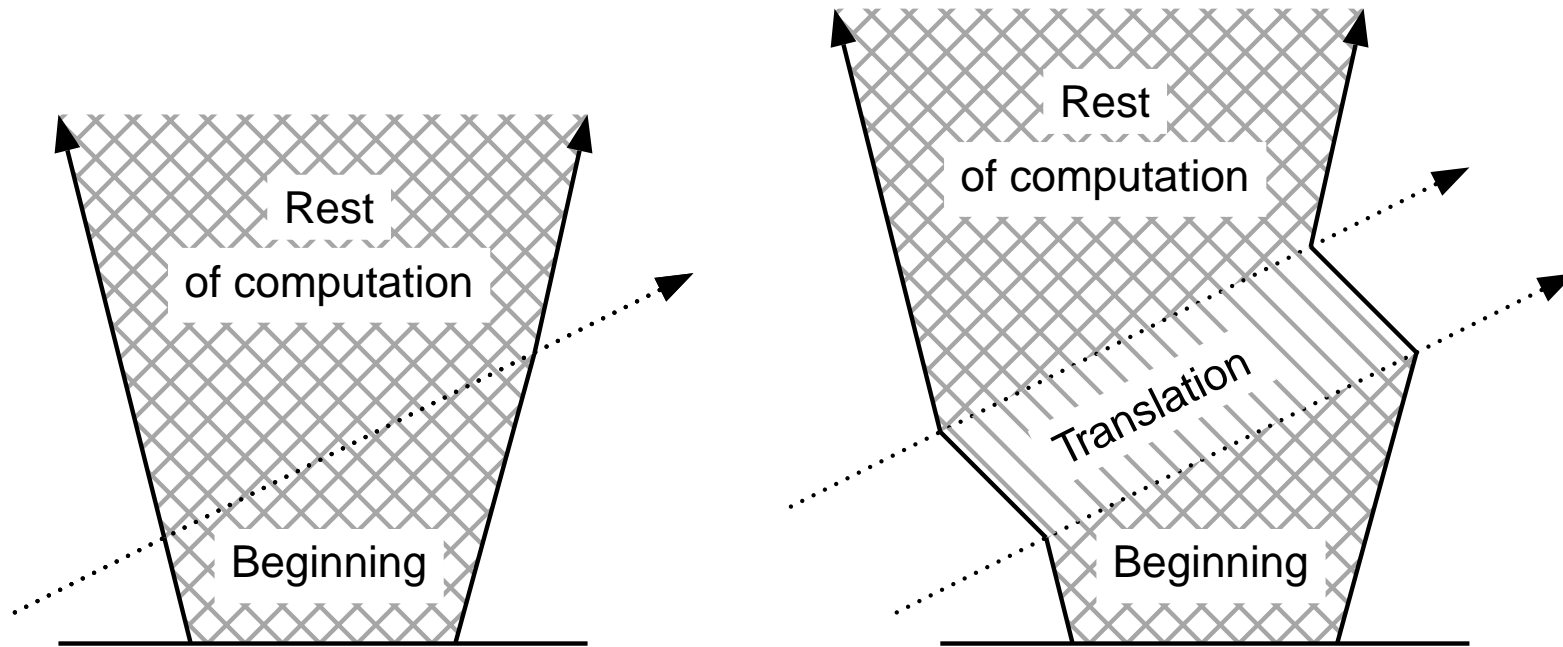
Modifications du diagramme espace-temps

*mais* préserve le calcul (*i.e.* ordre des collisions)

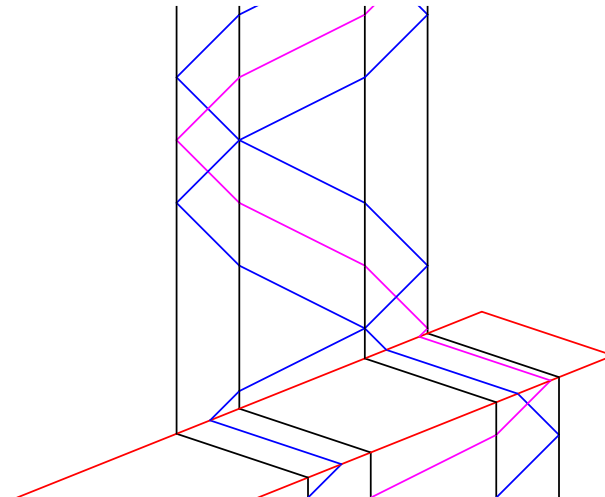
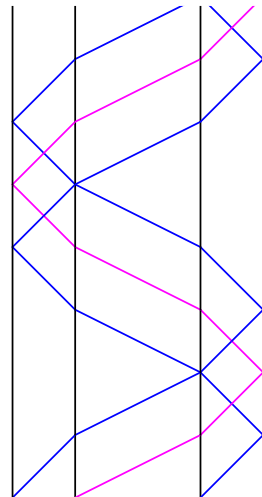
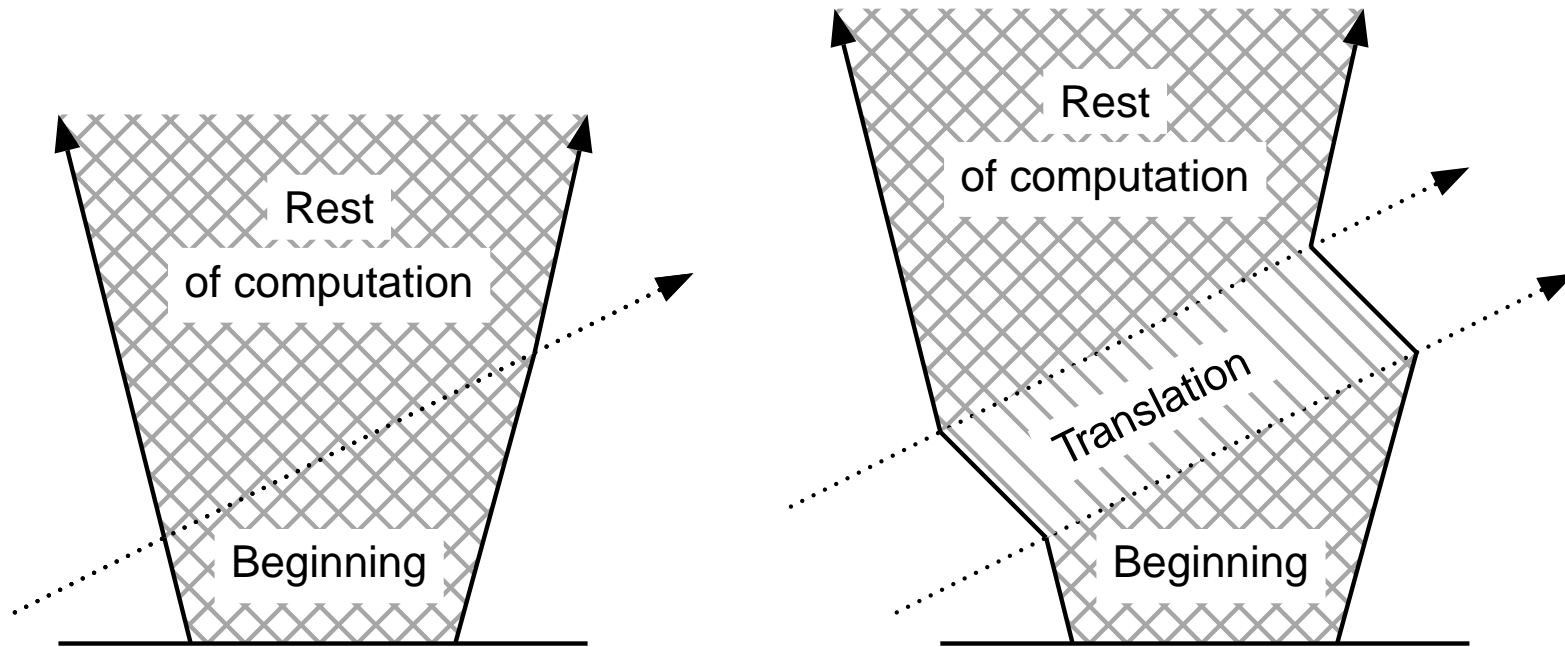
- Dynamique
  - Gel et translation
  - Homothéties
- Construction de plus haut niveau
  - Contractions
  - Itérations

Seuls modifications : ajouts de méta-signaux et de règles

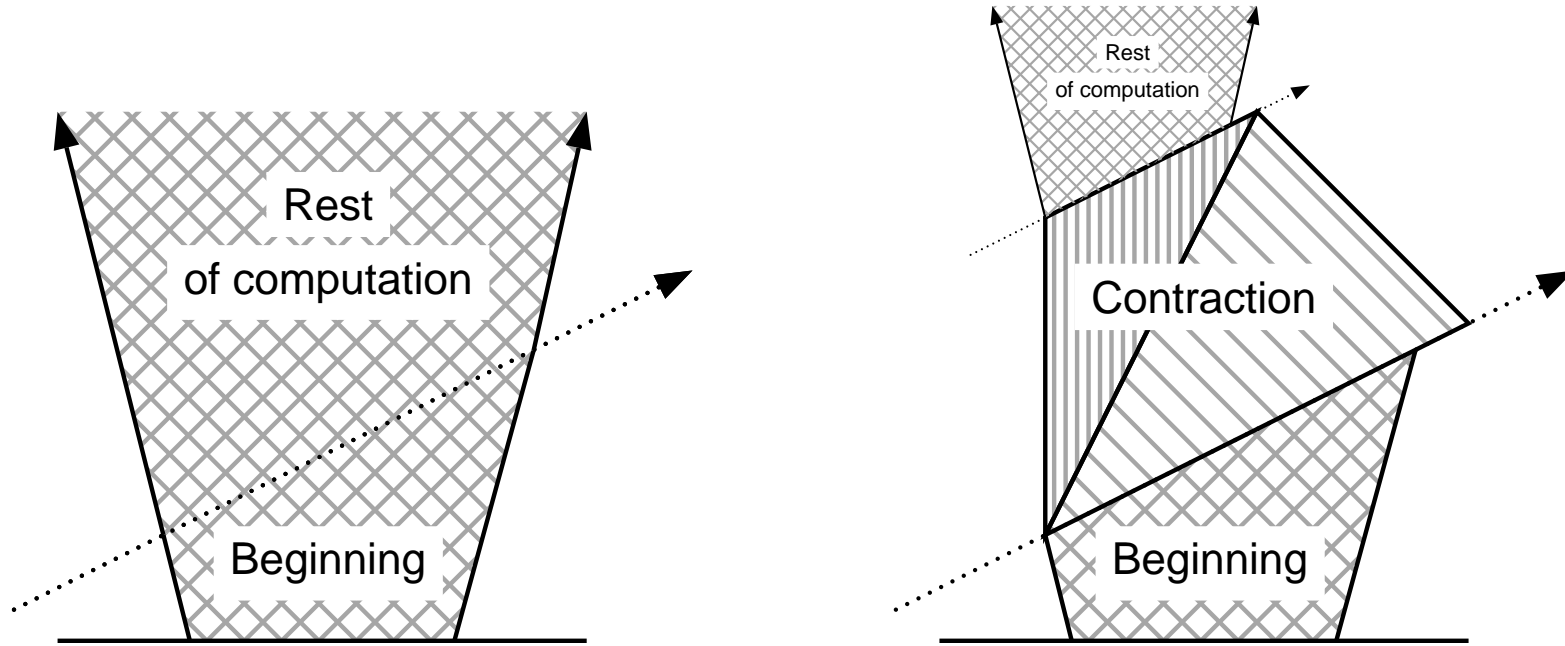
# Gel puis dégel du calcul



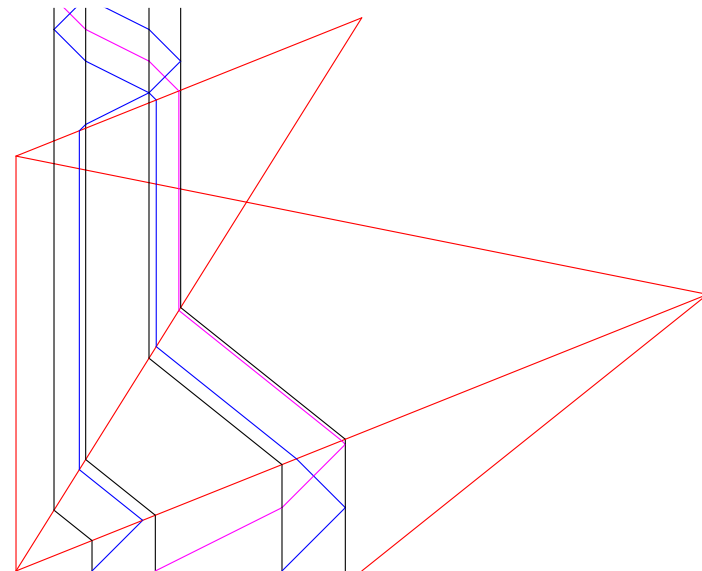
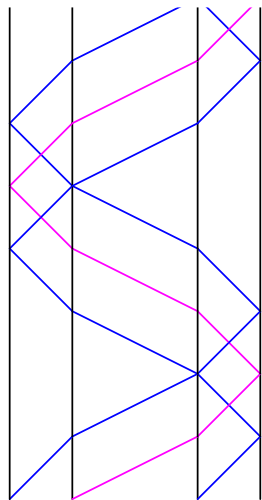
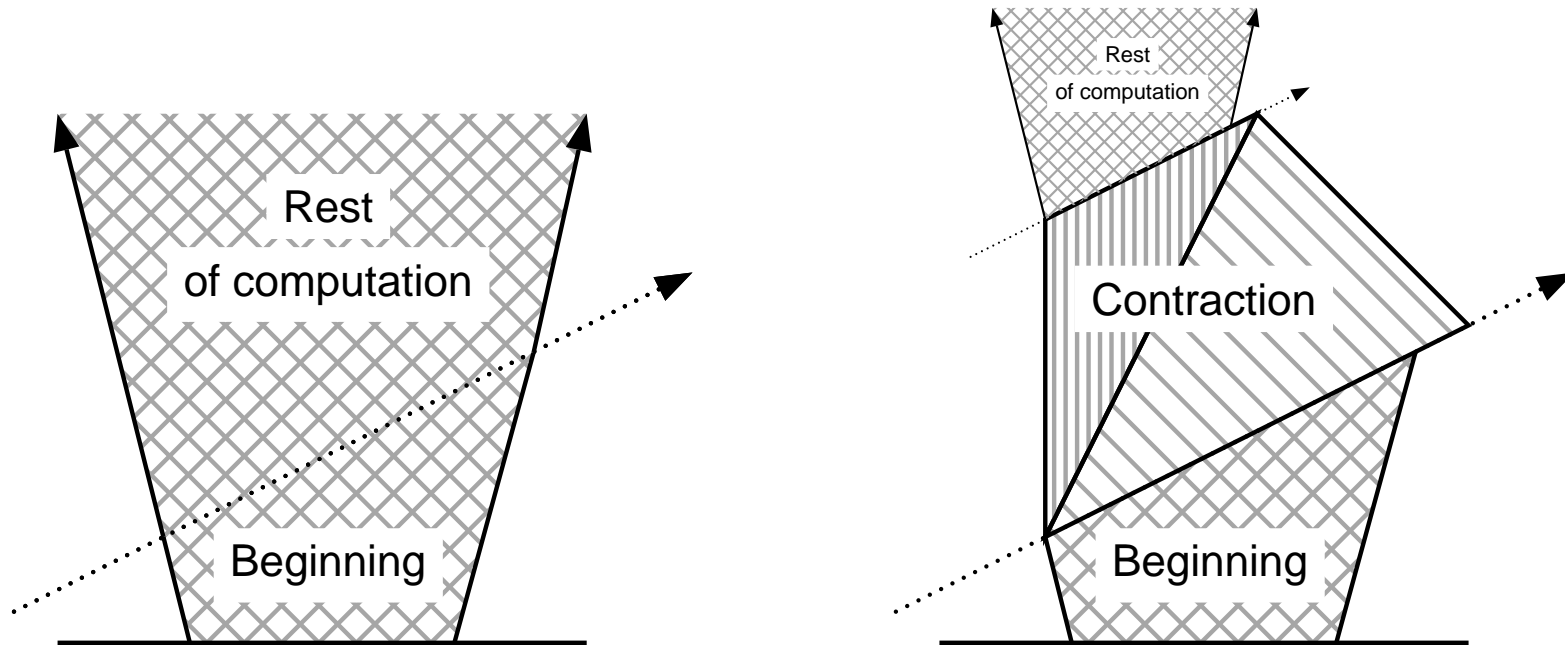
# Gel puis dégel du calcul



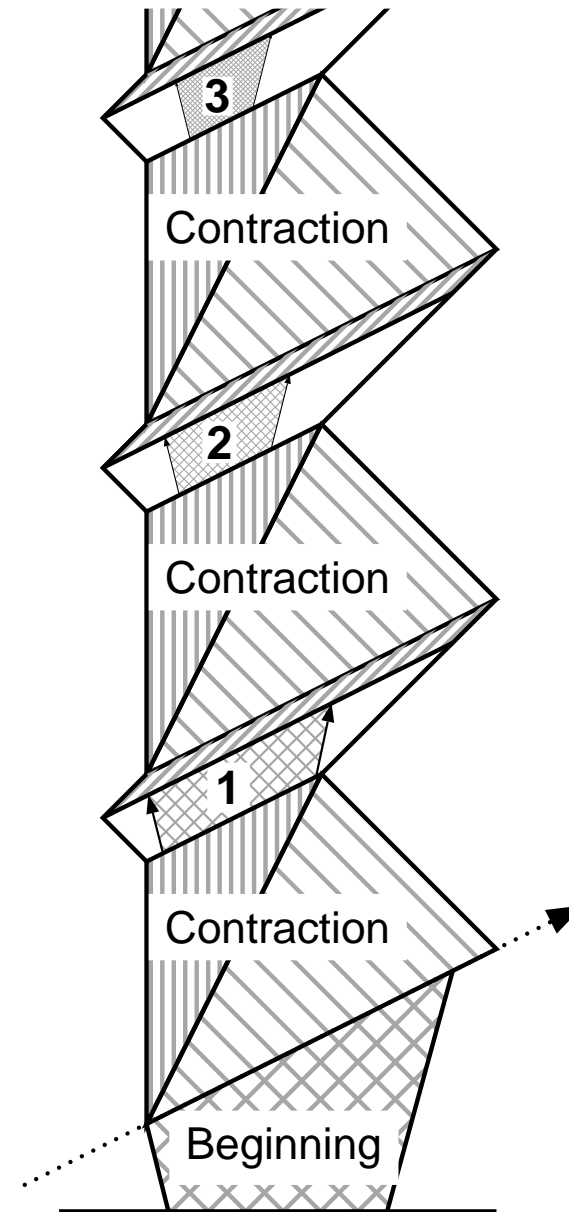
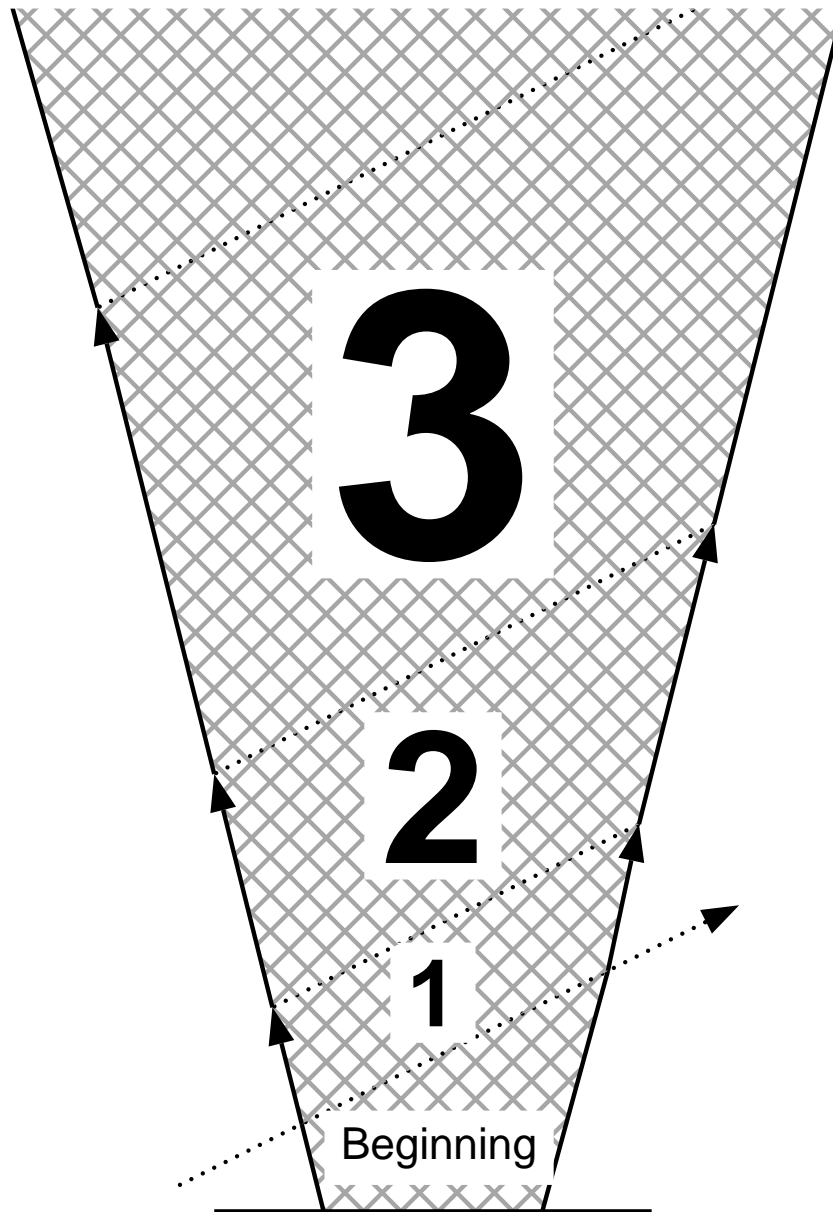
# Contraction



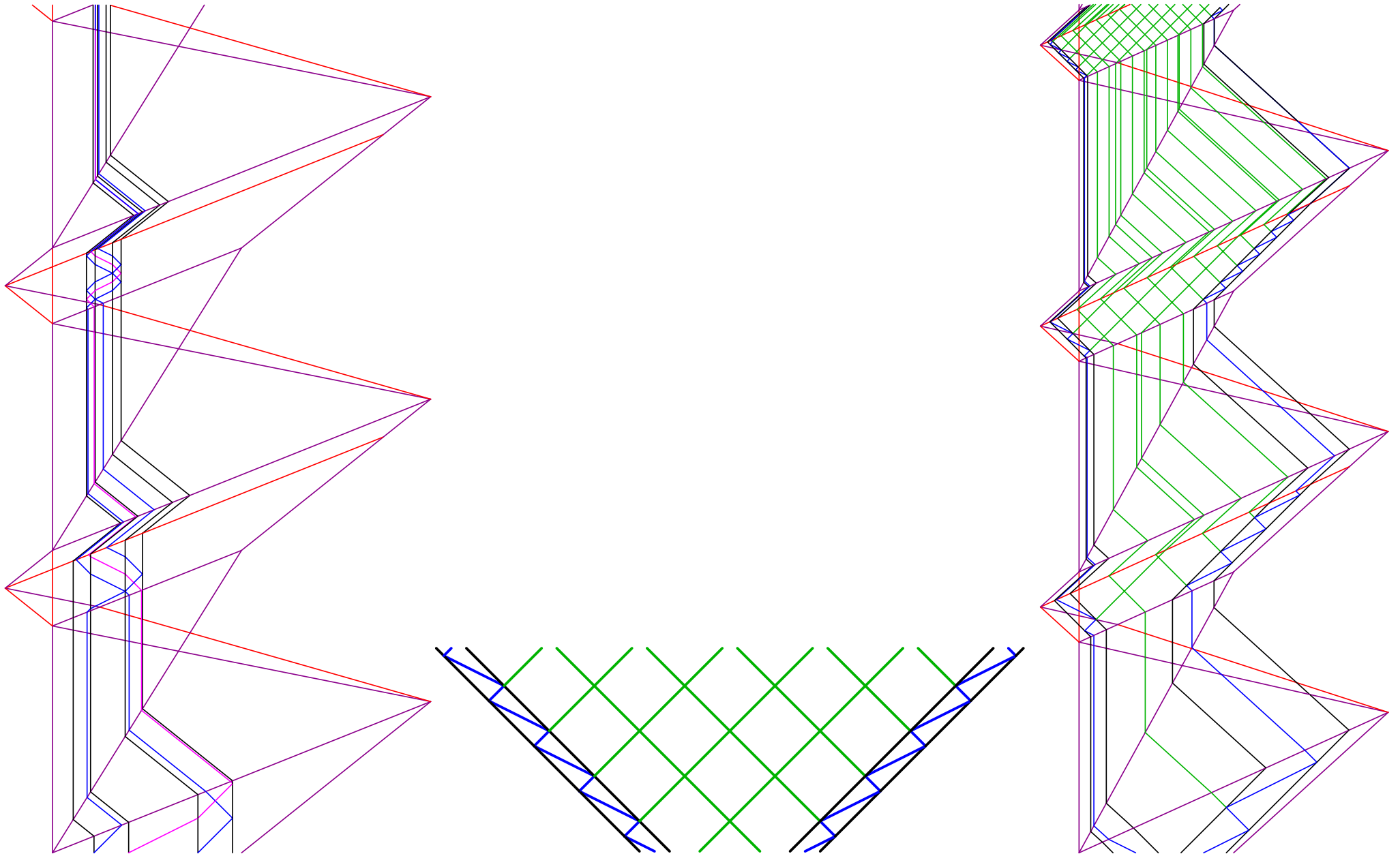
# Contraction



# Contraction à une bande

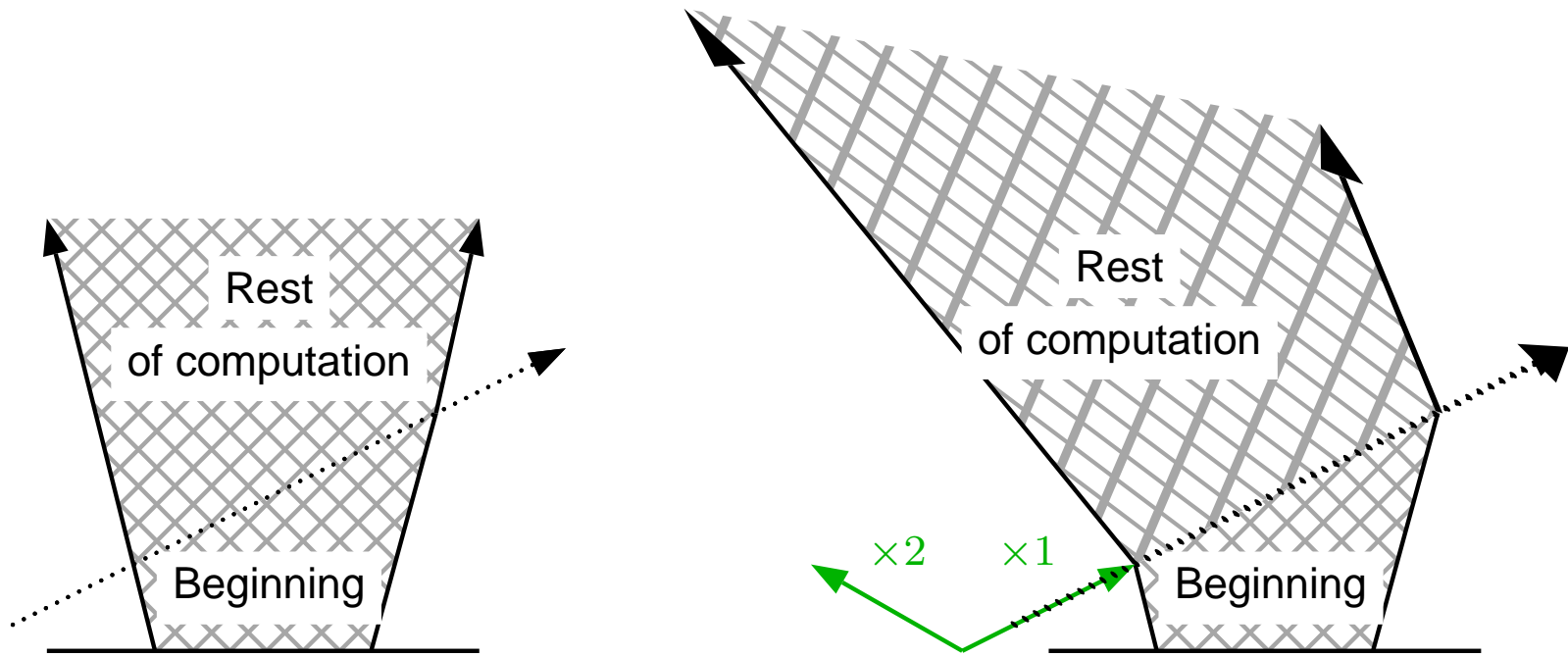


# Contraction à une bande

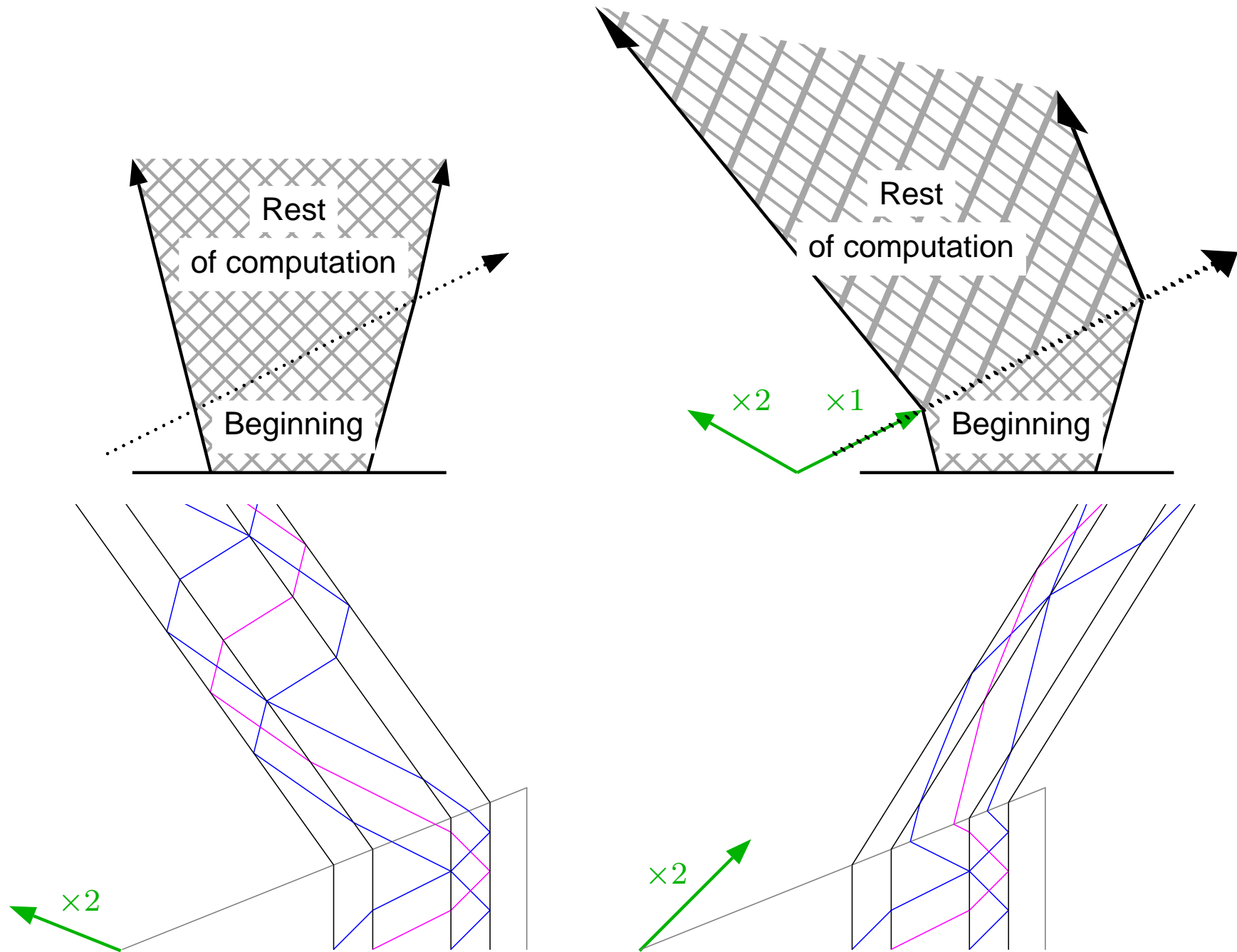




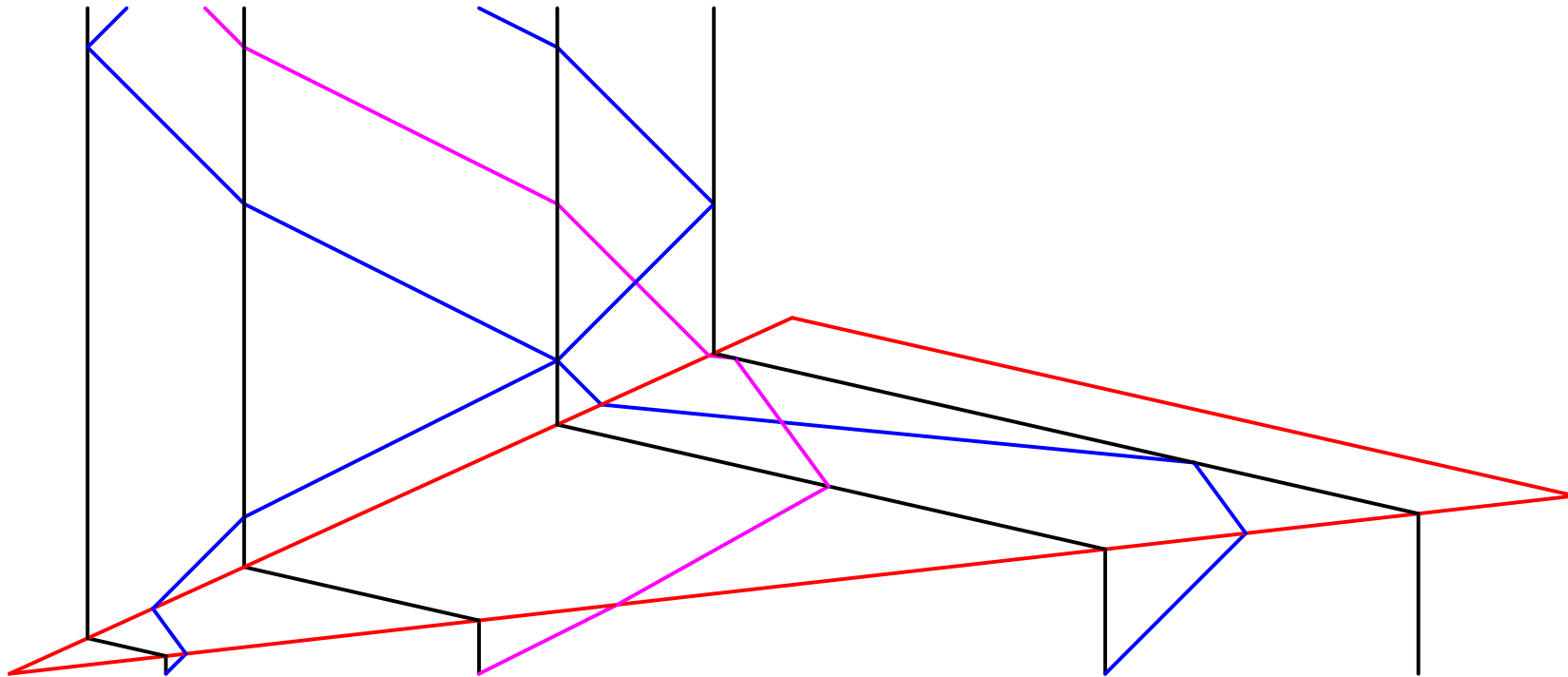
# Homothétie



# Homothétie



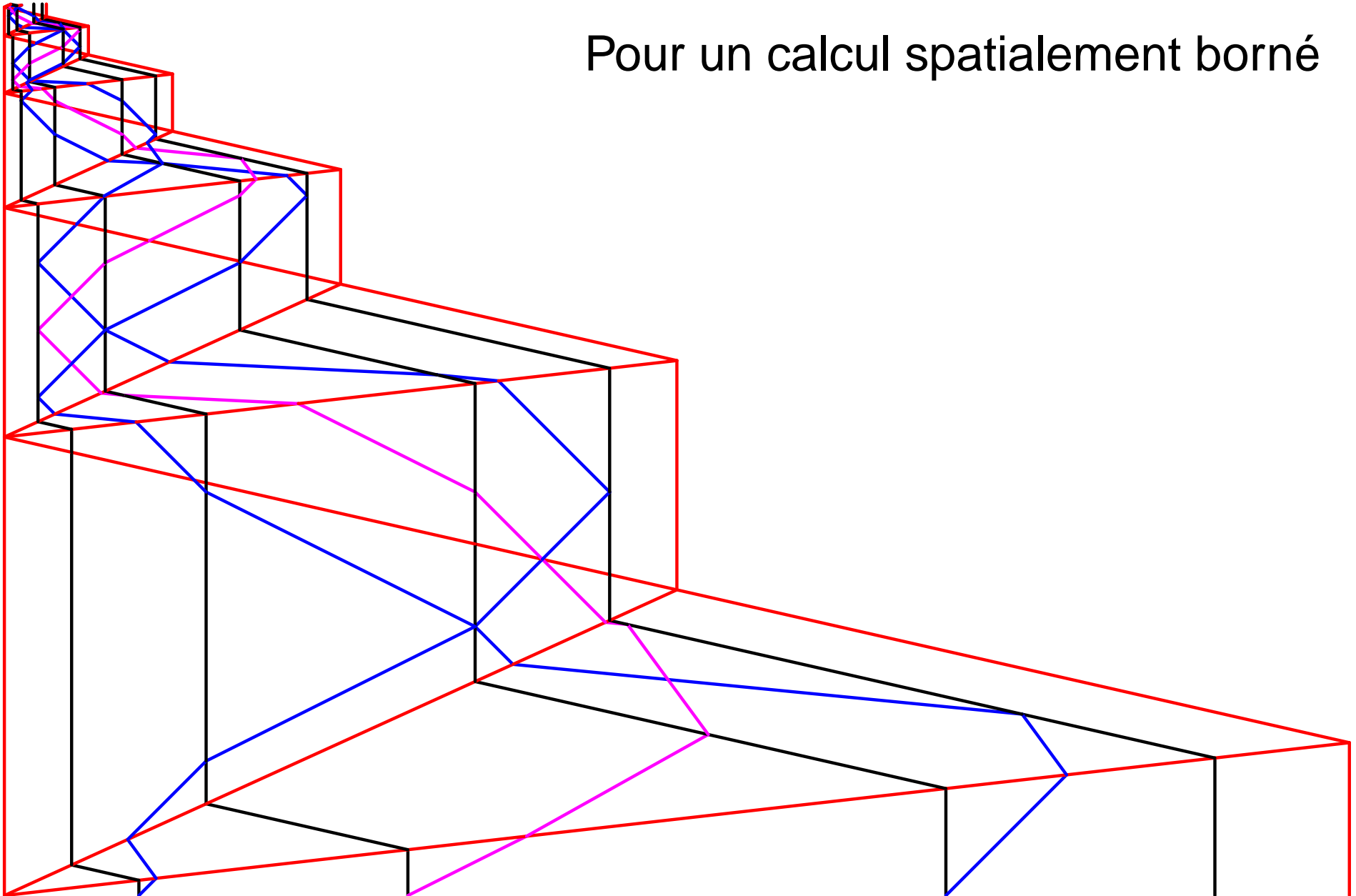
# Contraction continue

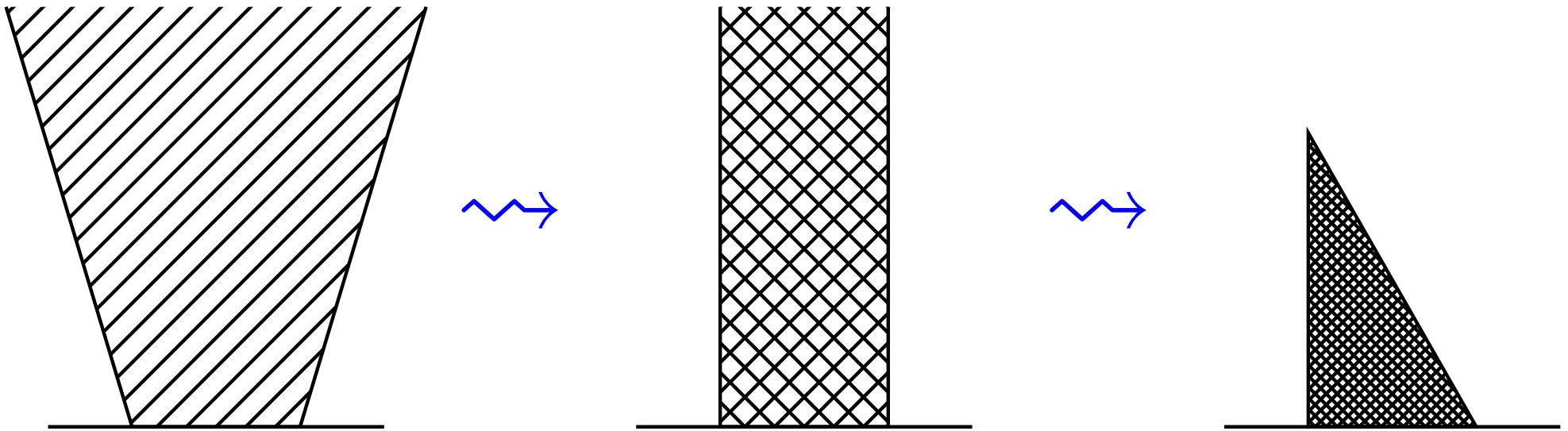


Si le calcul reste borné on peut itérer

# Contraction à un triangle

Pour un calcul spatialement borné

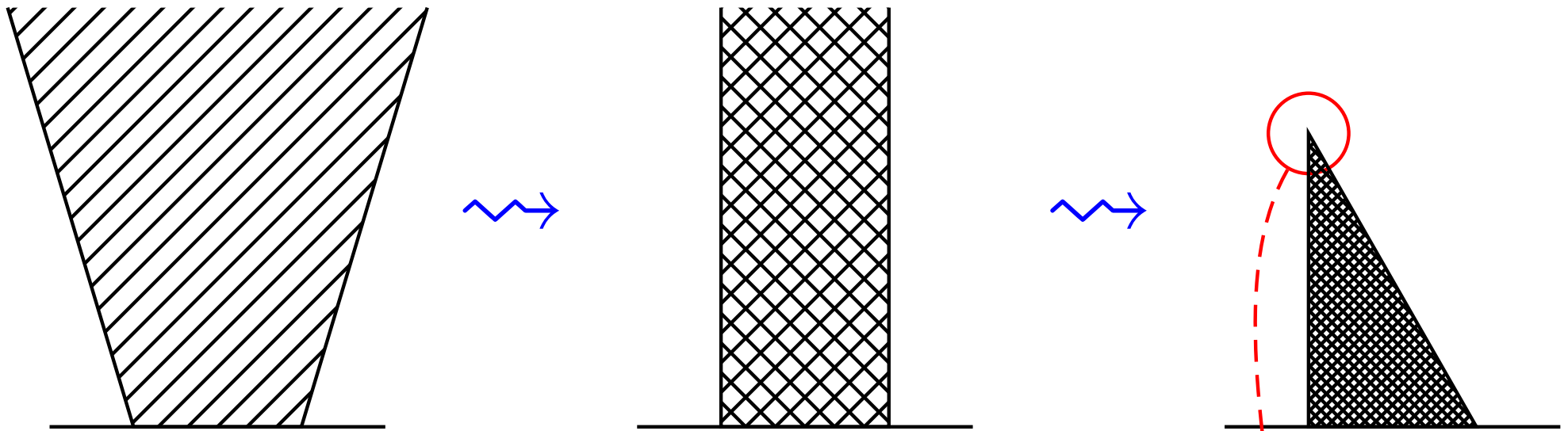




*Tout calcul peut être contenu dans un triangle*

L'espace et le temps sont « malléables »

*Problème*



*Tout calcul peut être contenu dans un triangle*

L'espace et le temps sont « malléables »

*Problème* Apparition d'un point d'accumulation

# Accumulations

# Apparition d'une accumulation

## Instance

$\mathcal{M}$ : machine à signaux,  
 $c_0$ : configuration initiale finie,  
(*Toutes les valeurs sont dans  $\mathbb{Q}$* )

## Question

Va-t-il y avoir une accumulation ?

$\exists (x, t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},$

Il y a au moins  $n$  collisions dans le  
cône de lumière aboutissant à  $(x, t)$



# Apparition d'une accumulation

## Instance

$\mathcal{M}$ : machine à signaux,  
 $c_0$ : configuration initiale finie,  
(Toutes les valeurs sont dans  $\mathbb{Q}$ )

## Question

Va-t-il y avoir une accumulation ?

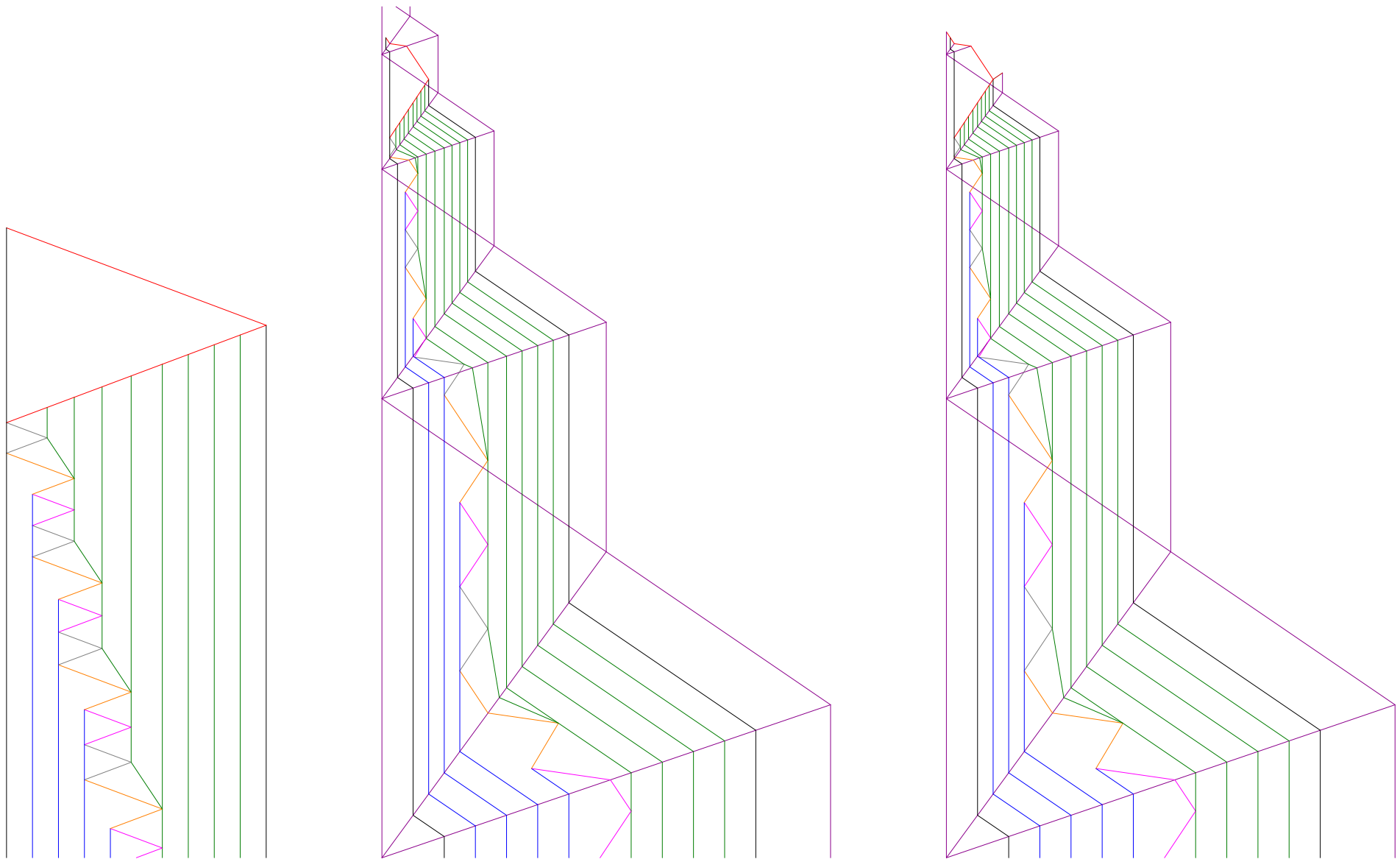
prédicat récursif  
total

$\exists (x, t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},$

Il y a au moins  $n$  collisions dans le  
cône de lumière aboutissant à  $(x, t)$

$\rightsquigarrow$  dans  $\Sigma_2^0$  (hiérarchie arithmétique)

# Réduction pour $\Pi_1^0$ -difficile

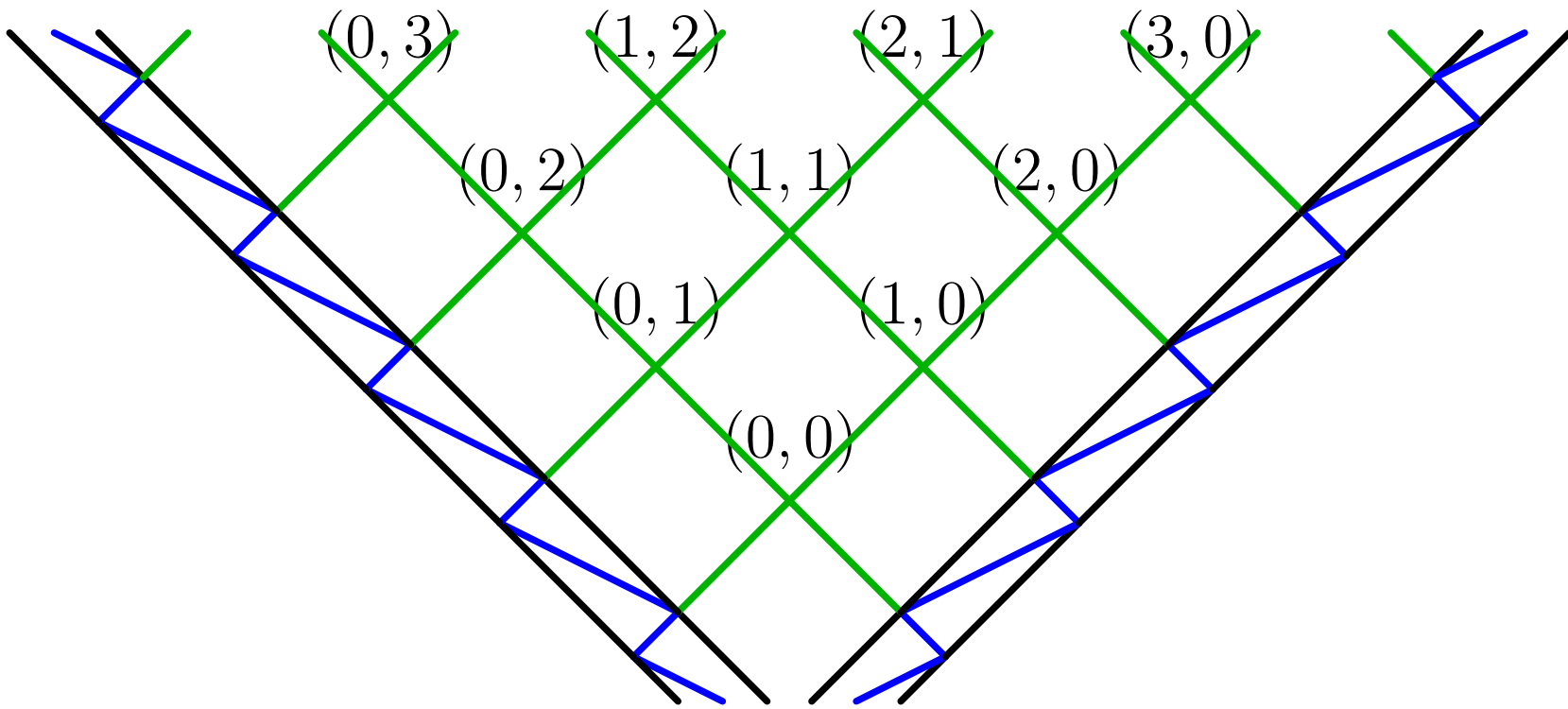


Accumulation  $\Leftrightarrow$  L'automate à deux compteurs ne s'arrête pas

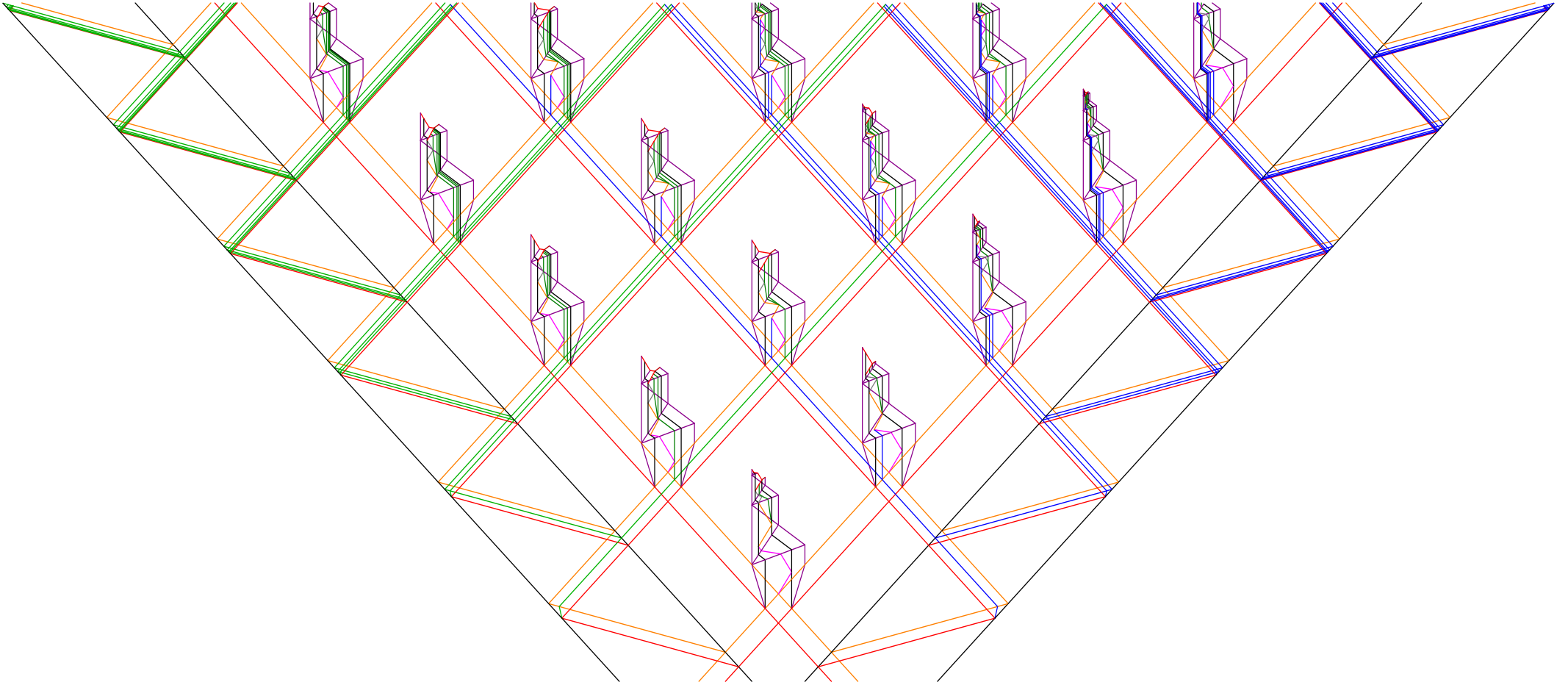
# Tester toutes les calculs possibles

$\Sigma_2^0$ -complet

**Instance**  
 $\mathcal{A}$ : Automate à deux compteurs,  
**Question**  
Existe-t-il un calcul sans fin ?

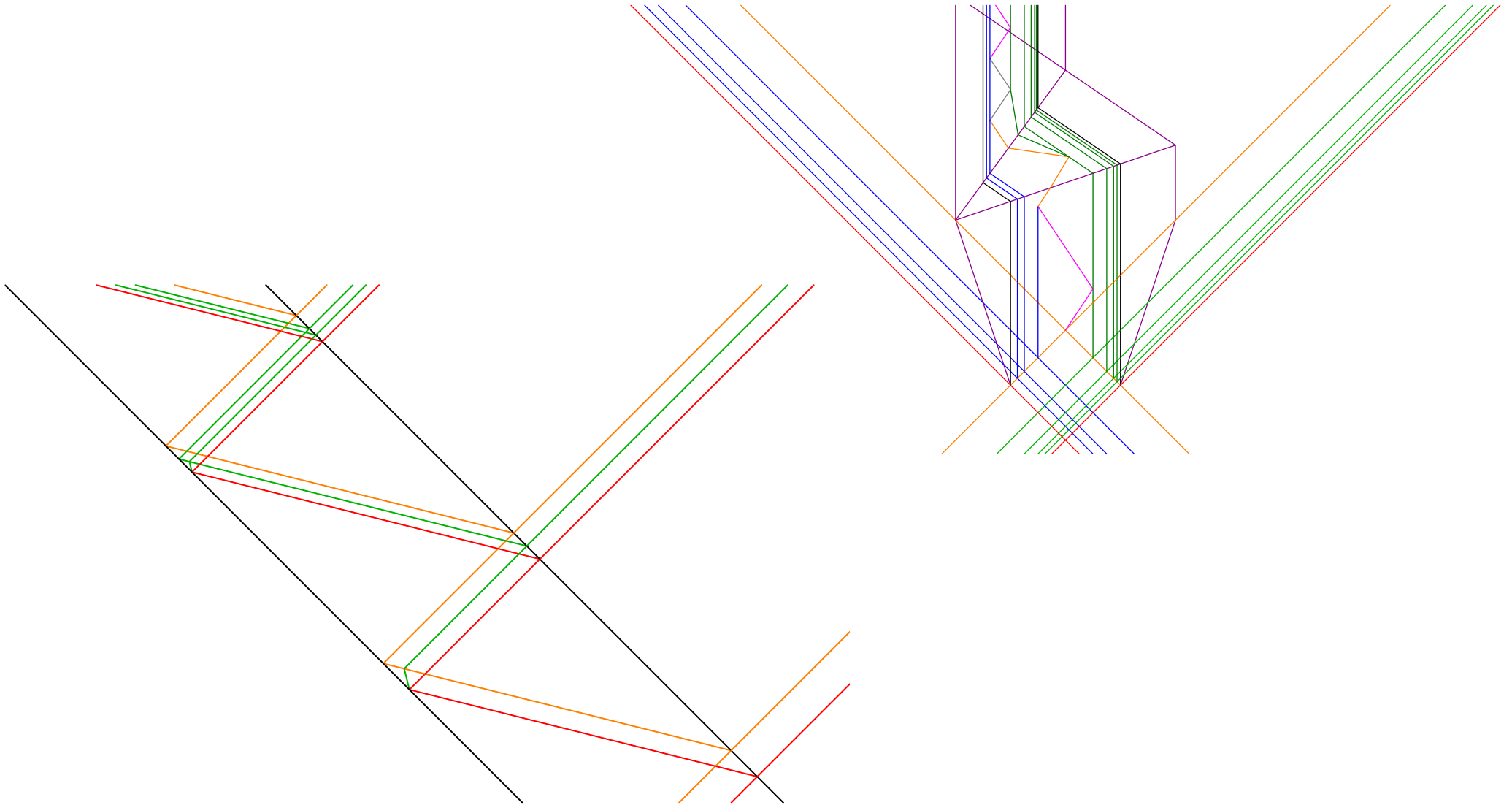


# $\Sigma_2^0$ -difficile



$\rightsquigarrow \Sigma_2^0$ -complet

# Éléments de la réduction



# « Traiter » les accumulations

# Changement de point de vue

Automates cellulaires

Pavages

## Diagramme espace-temps

Trace

Dessin

Dynamique



Statique

Temps



Dimension

Règles



Conditions locales

Orbite



Correction globale

Accumulation



Défaut (singularité)

# Reformulation topologique

## Diagramme espace-temps

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \xrightarrow{\mathbb{D}} \{\circ\} \cup \{\mu_i\}_i \cup \{\rho_j\}_j \cup \mathcal{S}$$

vide
singularités  
 $|\mathcal{S}| < \infty$

## Conditions

$$\mathbb{D}(p) = \circ \iff \exists r > 0, \mathbb{D}(ball(p, r)) = \text{circle}$$

$$\mathbb{D}(p) = \text{green line} \iff \exists r > 0, \mathbb{D}(ball(p, r)) = \text{circle with green line}$$

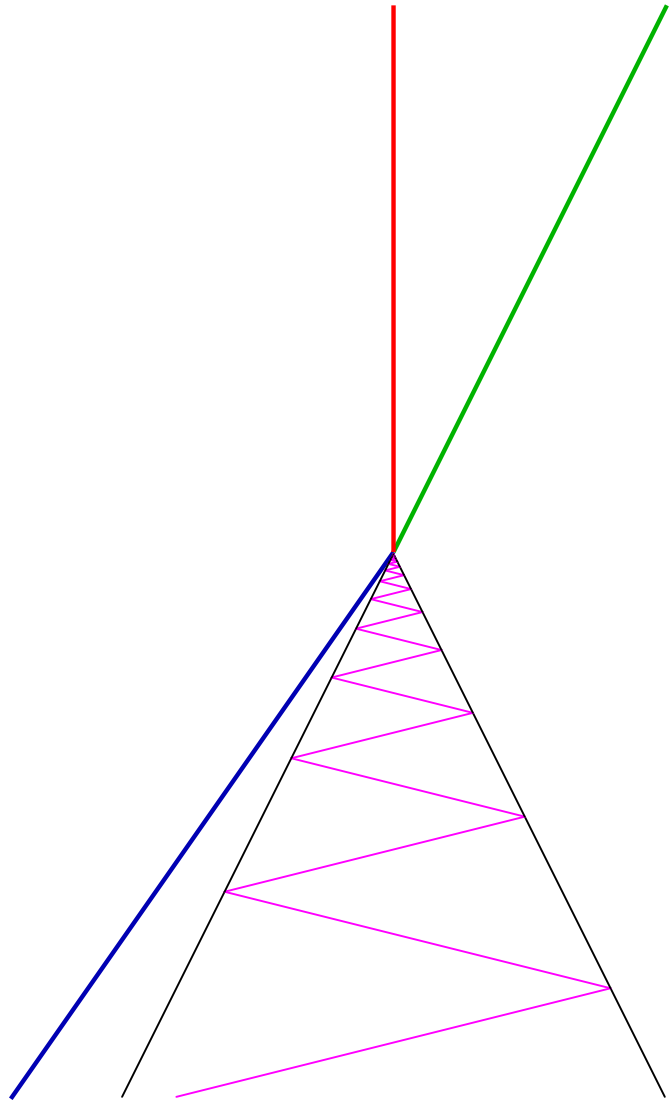
$$\mathbb{D}(p) = \text{Y-shape} \iff \exists r > 0, \mathbb{D}(ball(p, r)) = \text{circle with Y-shape}$$

Correspond à la définition par machine

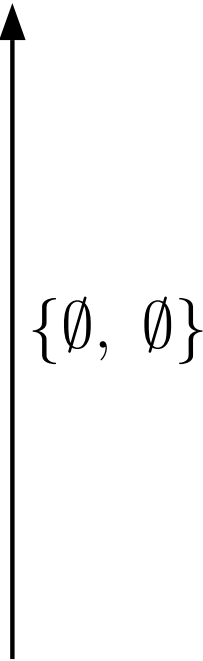
Regardons les *singularités isolées*



# Méta-singularités

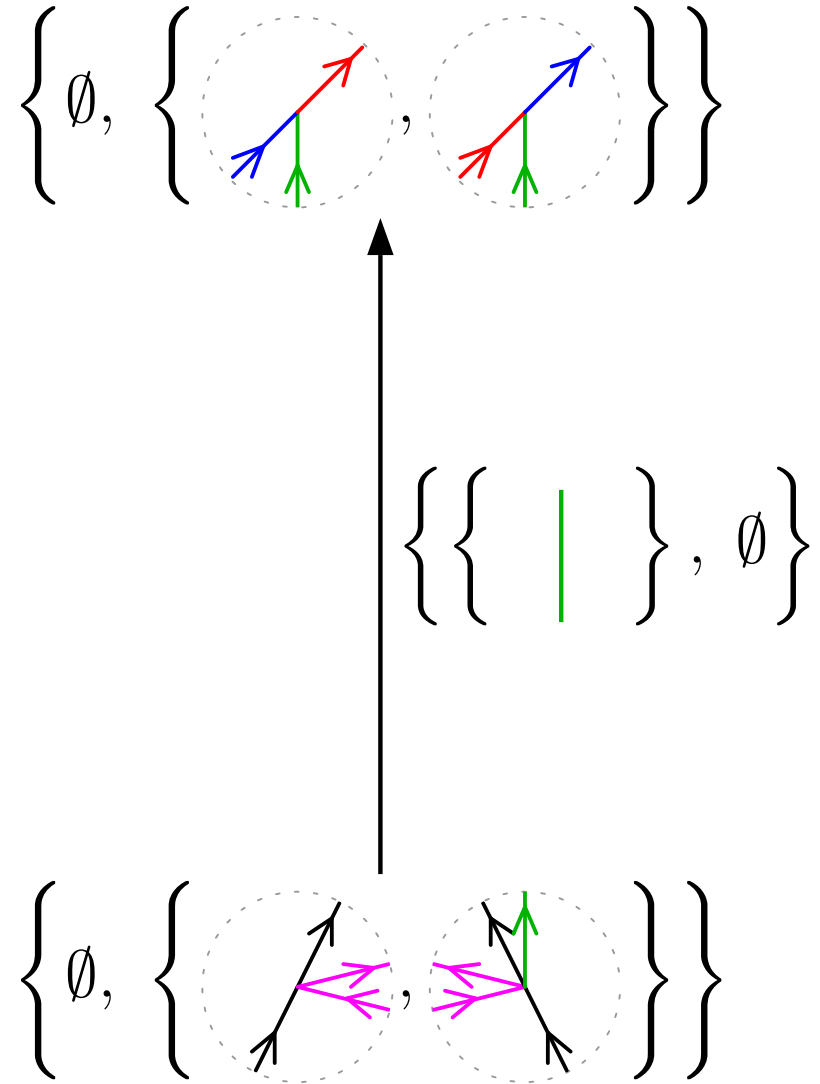
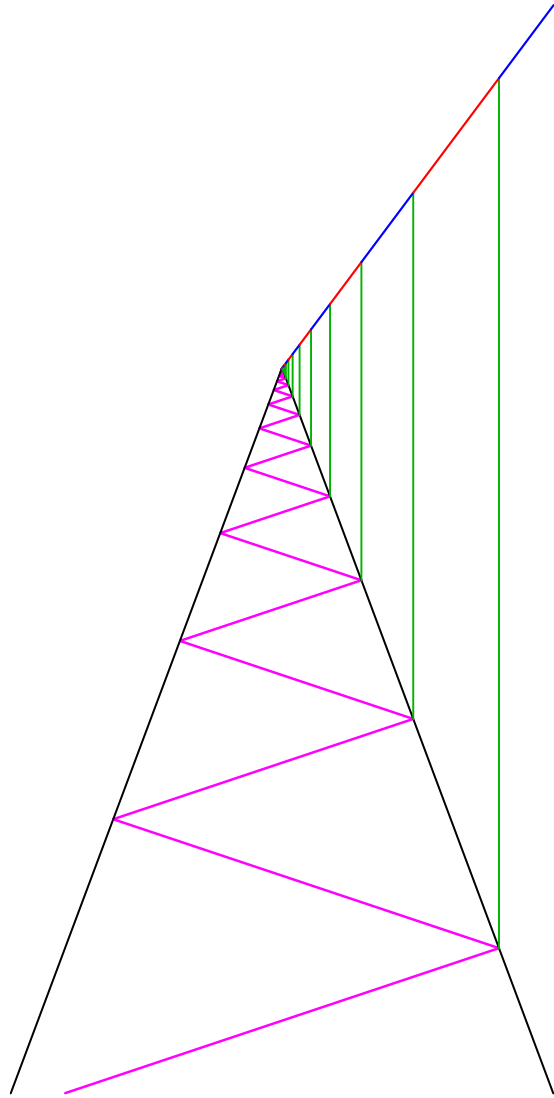


$$\left\{ \left\{ \begin{array}{c} | \\ \text{red} \end{array} , \begin{array}{c} / \\ \text{green} \end{array} \right\} , \emptyset \right\}$$

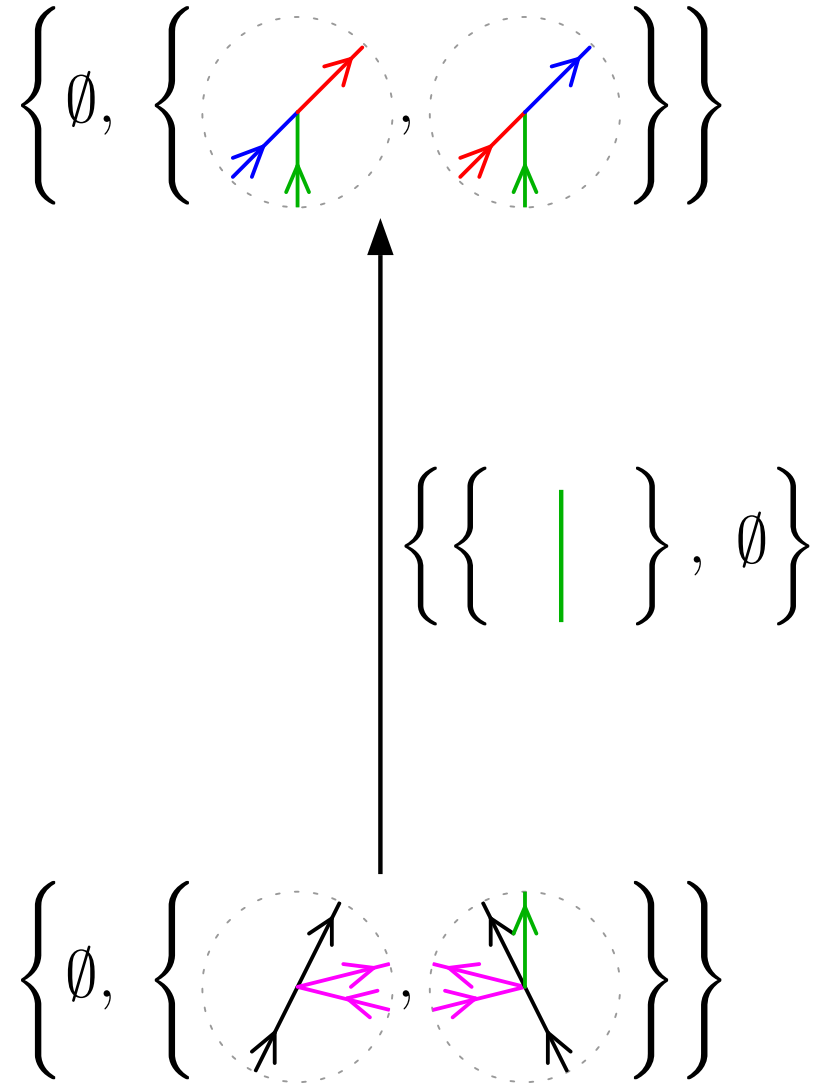
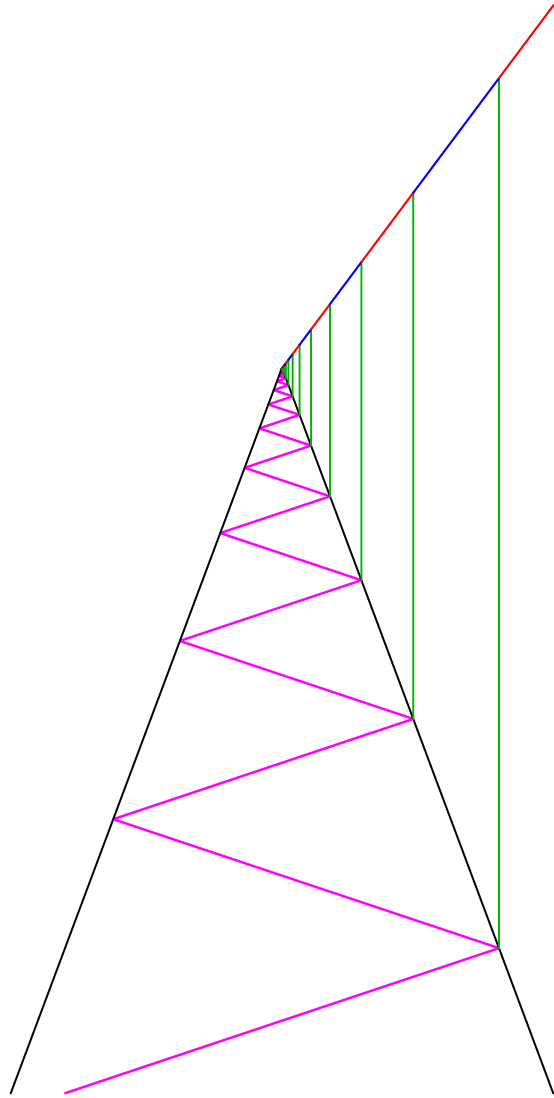


$$\left\{ \left\{ \begin{array}{c} / \\ \text{blue} \end{array} \right\} , \left\{ \begin{array}{c} \text{circle with magenta lines} \\ \text{circle with magenta lines} \end{array} \right\} \right\}$$

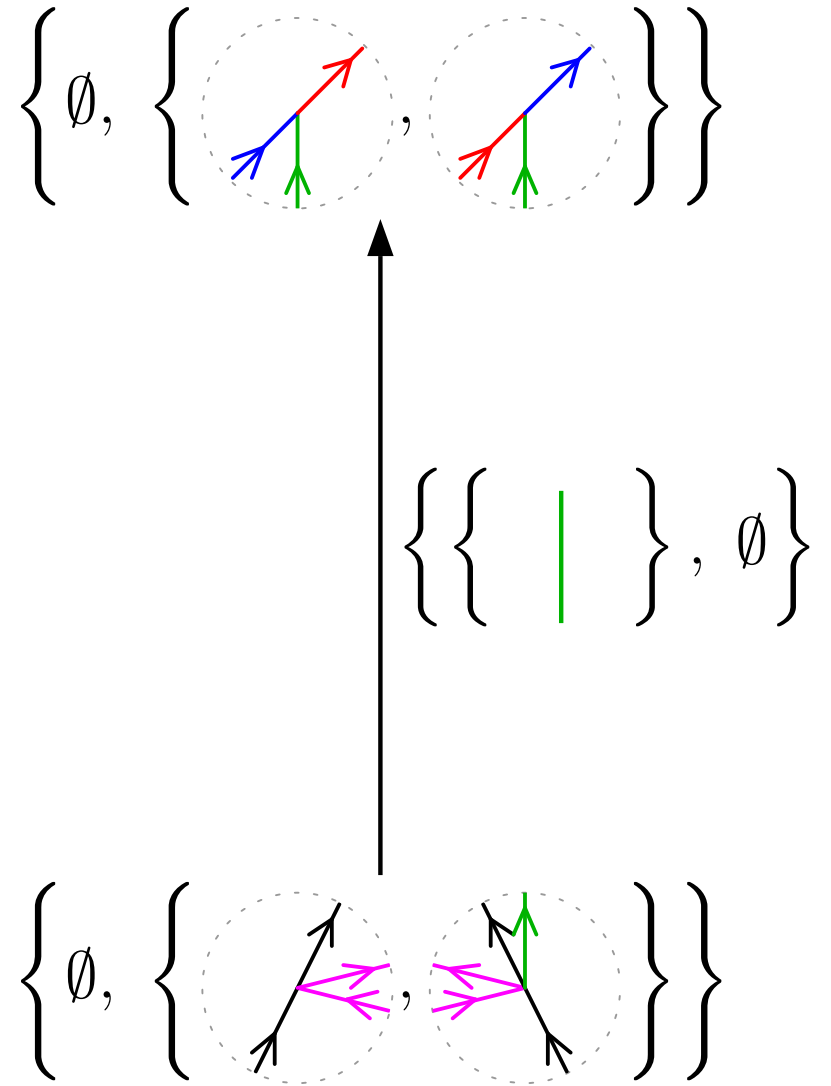
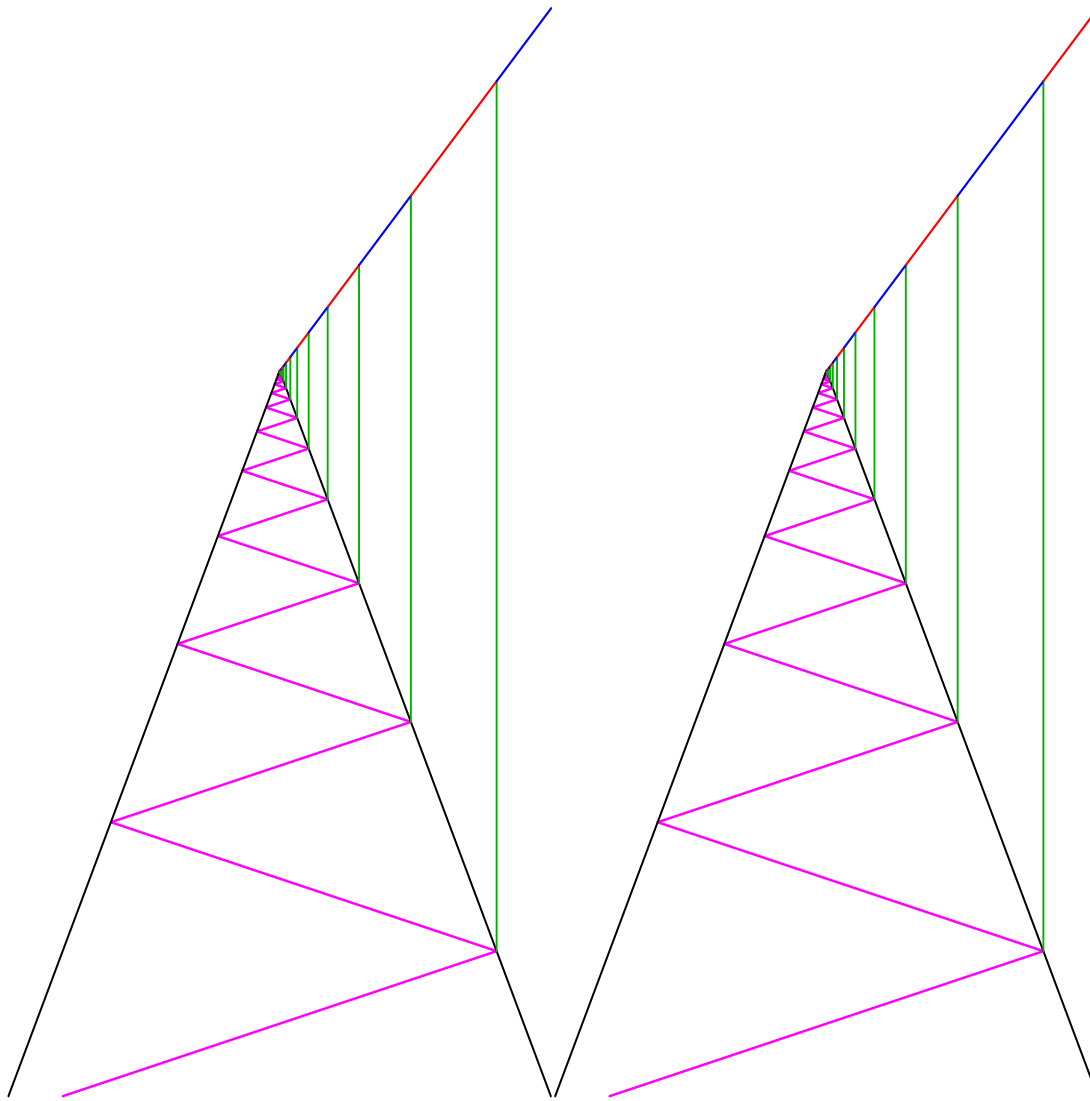
# Méta-singularités non déterministes



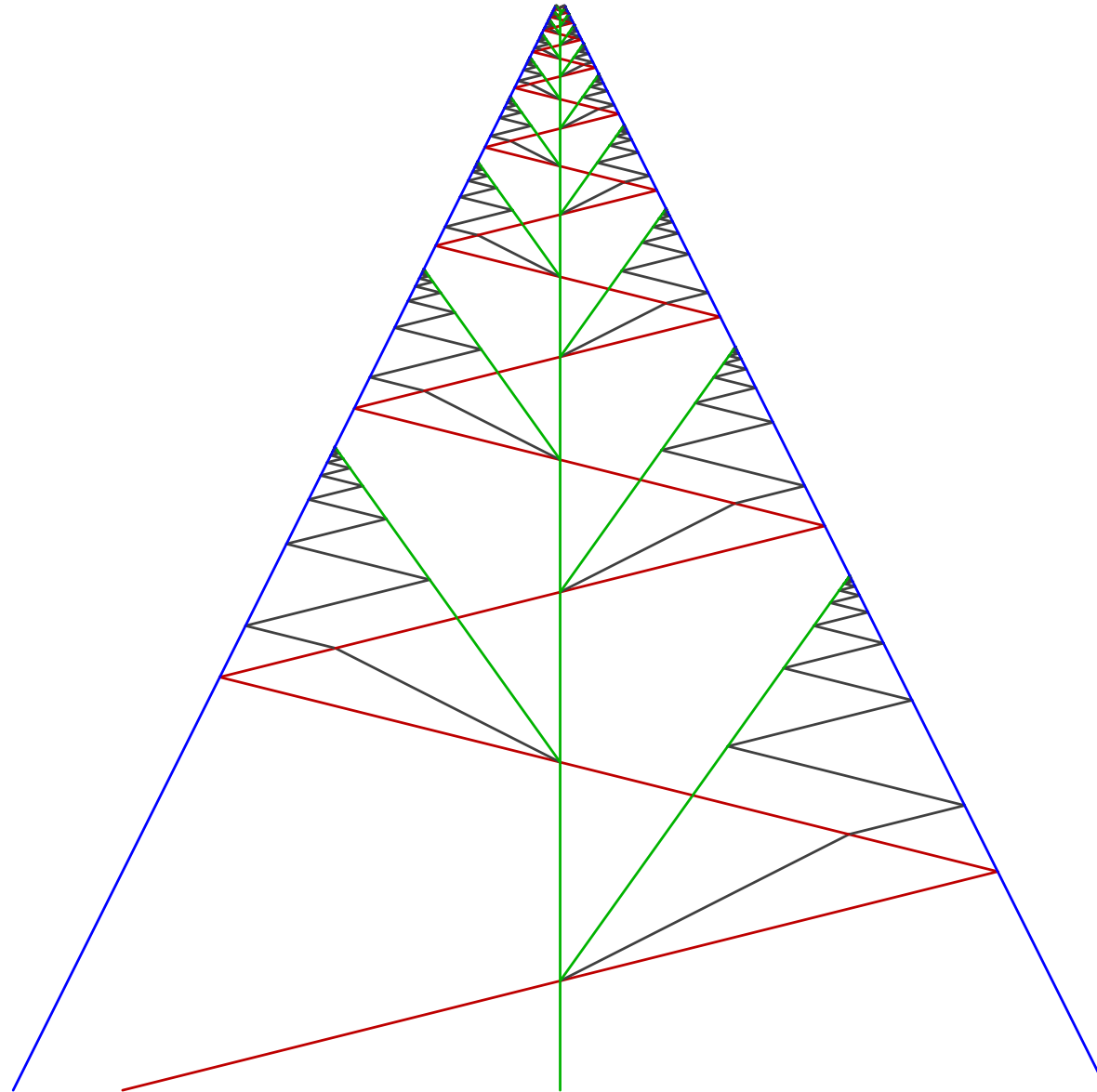
# Méta-singularités non déterministes



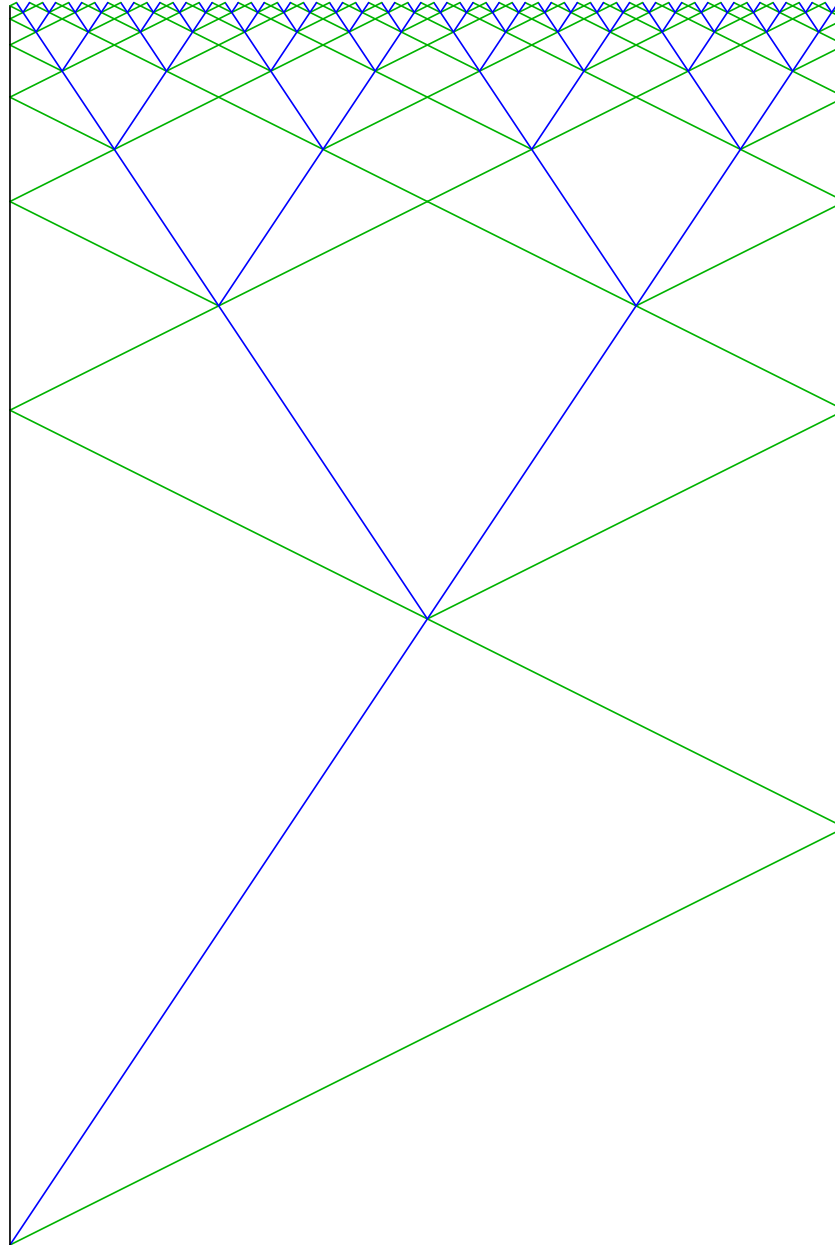
# Méta-singularités non déterministes



# Second ordre

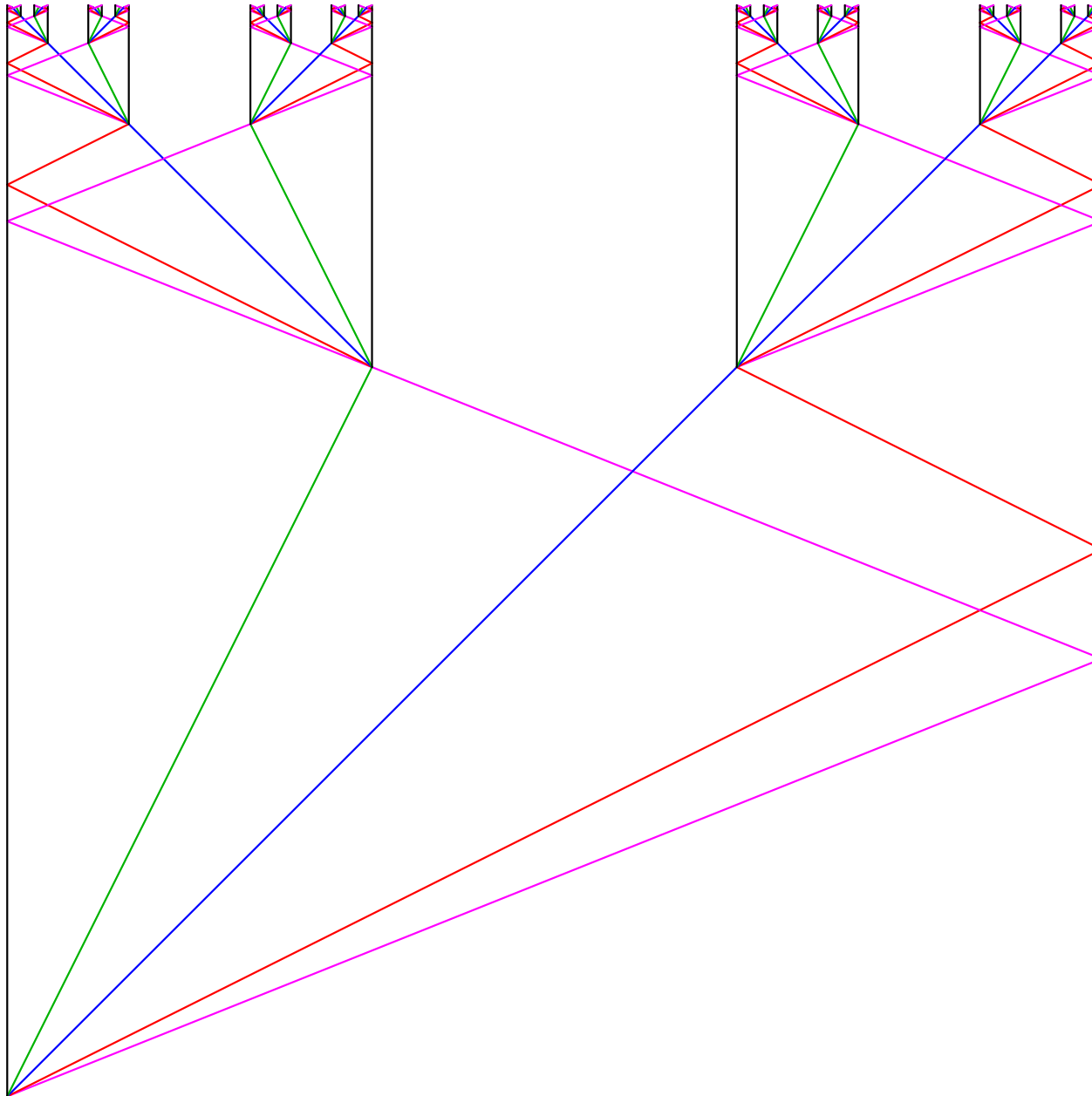


# Singularités non isolées



# Singularités non isolées

Cantor



# Conclusion et perspectives



# Conclusion

- Modèle de calcul géométrique
- Turing-universel
- Espace et temps continus mais valeurs finies
- Malléabilité de l'espace-temps
- Accumulations
  - Indécidabilité
  - Traitement partiel

# Perspectives – sur le modèle

- Positions réelles
- Principes algorithmiques
  - Complexité
  - Universalité intrinsèque
- Singularités
  - Compréhension
  - Utilisation

# Perspectives – hors du modèle

- Relier à d'autres modèles
  - Compréhension des modèles continus
  - Classes de complexité et de décidabilité continues
- Automates cellulaires
  - Discrétisation automatique
  - Théorèmes de transfert
  - Validation de preuves