

Les Machines à signaux : des systèmes dynamiques à base de géométrie euclidienne

Jérôme Durand-Lose



Laboratoire d'Informatique Fondamentale d'Orléans,
Université d'Orléans, Orléans, FRANCE



Journées Informatique et Géométrie 2015 (JIG)
— 8 octobre 2015 —
ESIEE Paris, Marne-la-Vallée

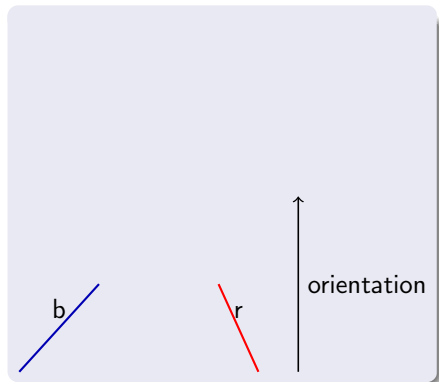
- 1 Introduction
- 2 Définition
- 3 Calculer
- 4 Fractales
- 5 Plus loin
- 6 Conclusion

- 1 Introduction
- 2 Définition
- 3 Calculer
- 4 Fractales
- 5 Plus loin
- 6 Conclusion

Dessin qui s'auto-complète

Espace Euclidien à deux dimensions

- segments de droite colorés
- orientation (évite les retours)

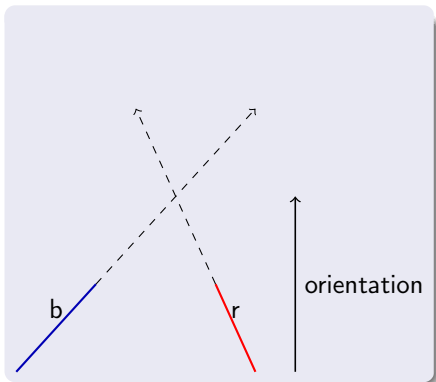


Dessin qui s'auto-complète

Espace Euclidien à deux dimensions

- segments de droite colorés
- orientation (évite les retours)

- Prolongation potentielle
- Intersection

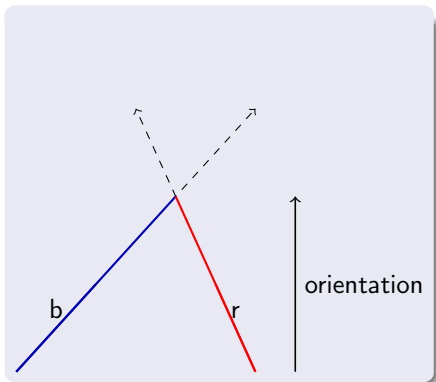


Dessin qui s'auto-complète

Espace Euclidien à deux dimensions

- segments de droite colorés
- orientation (évite les retours)

- Prolongation potentielle
- Intersection
- Prolongation



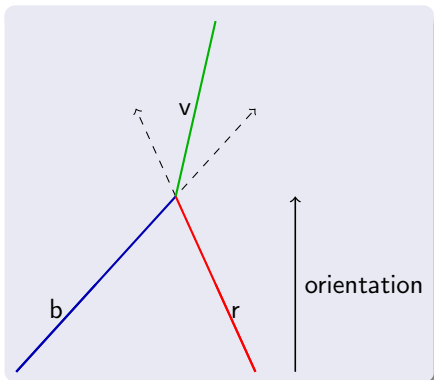
Dessin qui s'auto-complète

Espace Euclidien à deux dimensions

- segments de droite colorés
- orientation (évite les retours)

- Prolongation potentielle
- Intersection
- Prolongation

- Règle de ré-écriture
- $\{b, r\} \longrightarrow \{v\}$



Dessin qui s'auto-complète

Espace Euclidien à deux dimensions

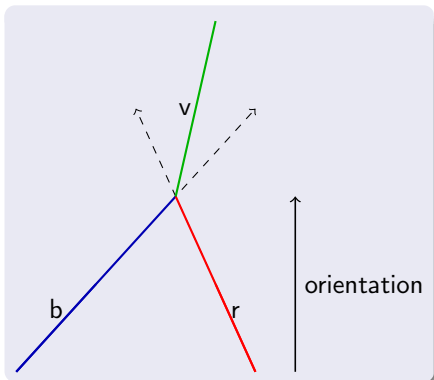
- segments de droite colorés
- orientation (évite les retours)

- Prolongation potentielle
- Intersection
- Prolongation

- Règle de ré-écriture
- $\{b, r\} \longrightarrow \{v\}$

Direction imposée par la couleur

- (plus simple)
- origine du modèle



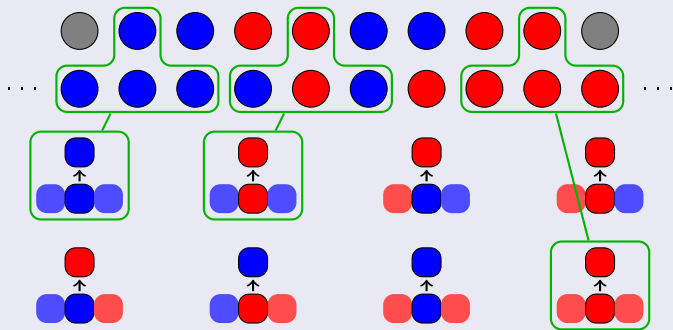
Automate cellulaire



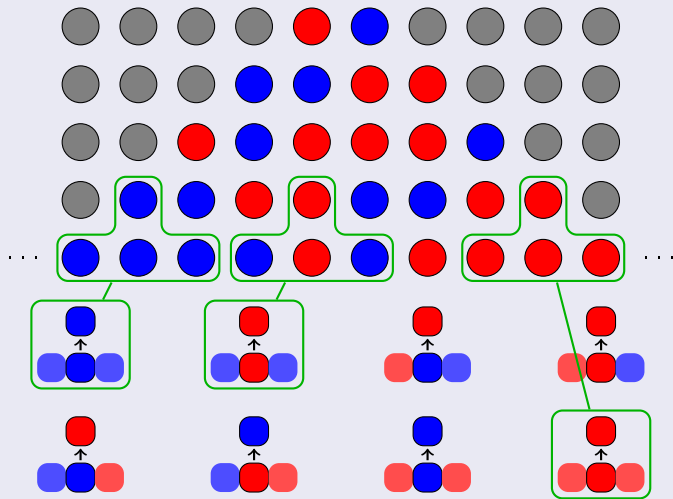
Automate cellulaire



Automate cellulaire



Automate cellulaire



Automates cellulaire : utilisation de signaux

Synchronisation d'une ligne de fusiliers [Goto, 1966]

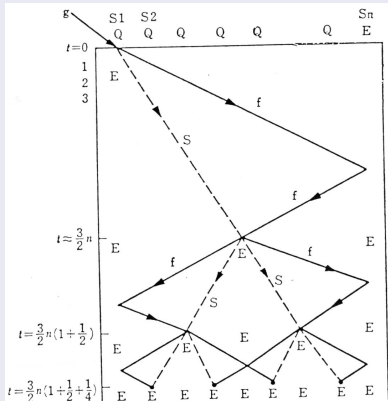


図 3-5 一斉射撃の問題 (連続近似)

G	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
g	Q	Q	Q	Q	Q	E
t=0	f's'Ef's	Q	Q	Q	Q	E
1	E	Q2f	Q	Q	Q	E
2	E	Q1	Qf	Q	Q	E
3	E	Q&	Q	Qf	Q	E
4	E	Q	Q2	Q	Qf	E
5	E	Q	Q1	Q	Q	f'Ef
6	E	Q	QS	Q	f'Q	E
7	E	Q	Q	a'Q'	Q	E
8	E	Q	f'S'ESf	f's'Esf	Q	E
9	E	f2Q	E	E	Q2f	E
10	f'Ef	1Q	E	E	Q1	f'Ef
11	E	f'S'ESf	E	E	f's'Esf	E
12	a'Ea	E	a'Ea	a'Ea	E	a'Ea
13	F	F	F	F	F	F

図 3-6 一斉射撃解 (n=6)

AC : Conception avec des signaux

[Fischer, 1965]

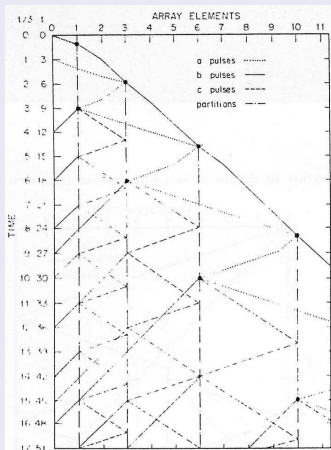
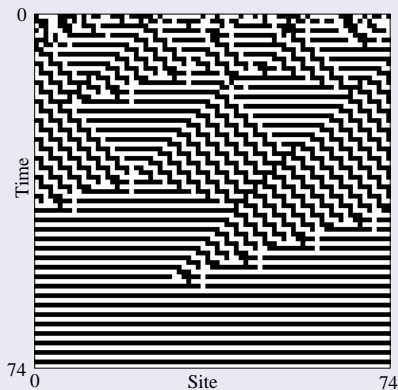


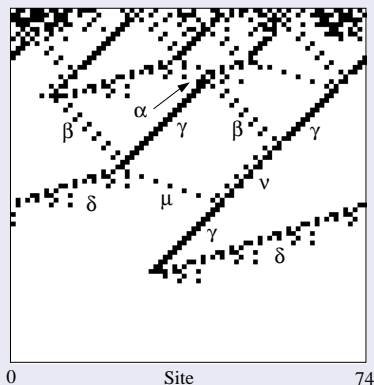
FIG. 2. Solution to the prime problem

AC : Analyse en terme de signaux

[Das et al., 1995]

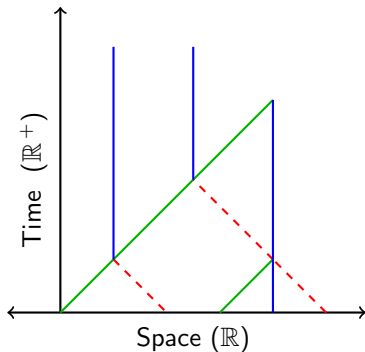
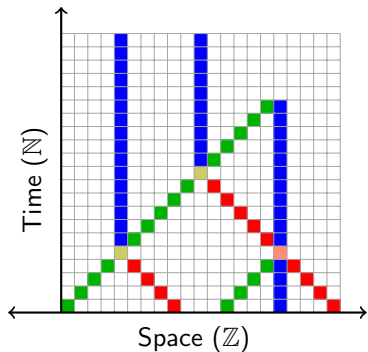


(a) Space-time diagram.



(b) Filtered space-time diagram.

Signaux



- Signal (meta-signal)
- Collision (règle)

- 1 Introduction
- 2 Définition**
- 3 Calculer
- 4 Fractales
- 5 Plus loin
- 6 Conclusion

Vocabulaire et exemple : trouver le milieu

 $M \mid$ $M \mid$

Meta-signaux (vitesse)

 $M \quad (0)$

Règles de collision

Vocabulaire et exemple : trouver le milieu

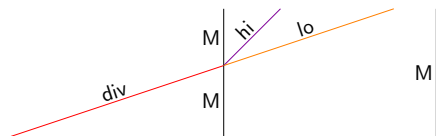


Meta-signaux (vitesse)

M	(0)
div	(3)

Règles de collision

Vocabulaire et exemple : trouver le milieu



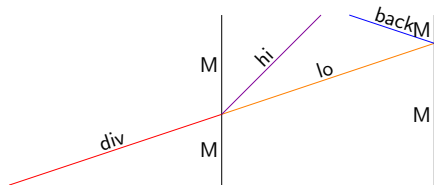
Meta-signaux (vitesse)

M	(0)
div	(3)
hi	(1)
lo	(3)

Règles de collision

$$\{ \text{div}, M \} \rightarrow \{ M, \text{hi}, \text{lo} \}$$

Vocabulaire et exemple : trouver le milieu



Meta-signaux (vitesse)

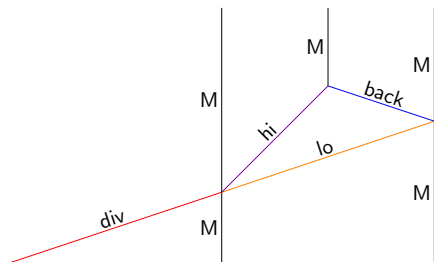
M	(0)
div	(3)
hi	(1)
lo	(3)
back	(-3)

Règles de collision

$$\{ \text{div}, M \} \rightarrow \{ M, \text{hi}, \text{lo} \}$$

$$\{ \text{lo}, M \} \rightarrow \{ \text{back}, M \}$$

Vocabulaire et exemple : trouver le milieu



Meta-signaux (vitesse)

M	(0)
div	(3)
hi	(1)
lo	(3)
back	(-3)

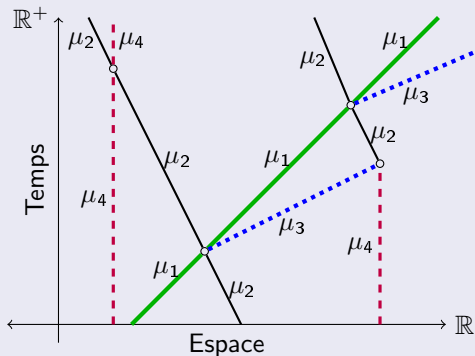
Règles de collision

$$\{ \text{div}, M \} \rightarrow \{ M, \text{hi}, \text{lo} \}$$

$$\{ \text{lo}, M \} \rightarrow \{ \text{back}, M \}$$

$$\{ \text{hi}, \text{back} \} \rightarrow \{ M \}$$

Autre exemple



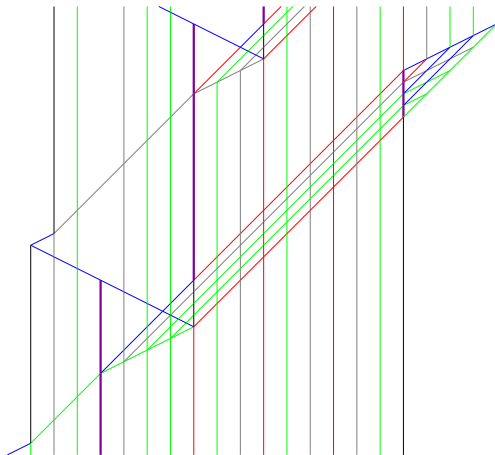
	Vitesse
μ_1	1
μ_2	$-1/2$
μ_3	3
μ_4	0

$$\{\mu_1, \mu_2\} \rightarrow \{\mu_2, \mu_1, \mu_3\}$$

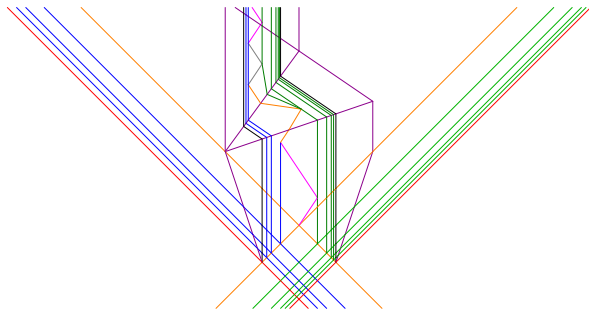
$$\{\mu_3, \mu_4\} \rightarrow \{\mu_2\}$$

$$\{\mu_4, \mu_2\} \rightarrow \{\mu_2, \mu_4\}$$

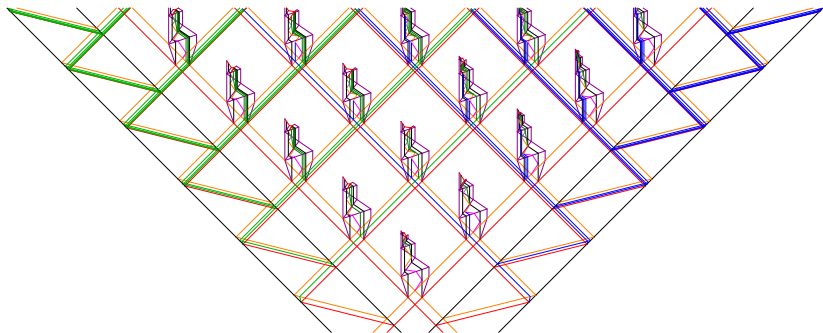
Dynamique complexe



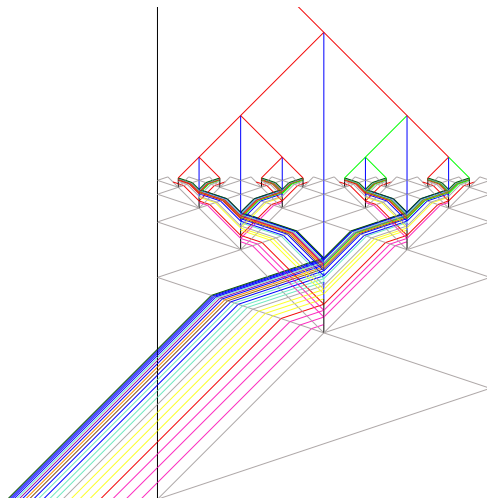
Dynamique complexe



Dynamique complexe

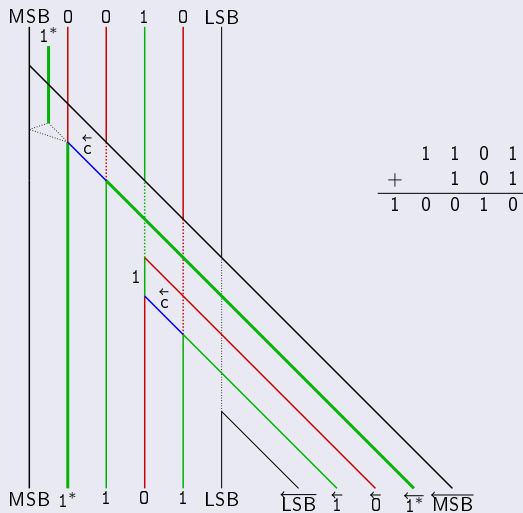


Dynamique complexe



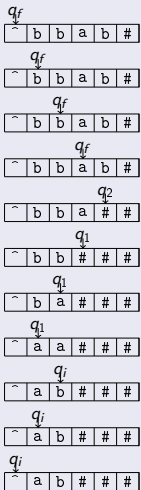
- 1 Introduction
- 2 Définition
- 3 Calculer**
- 4 Fractales
- 5 Plus loin
- 6 Conclusion

Additionner

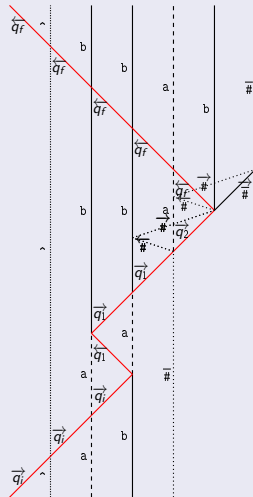


Calculer (au sens de Turing)

Machine de Turing

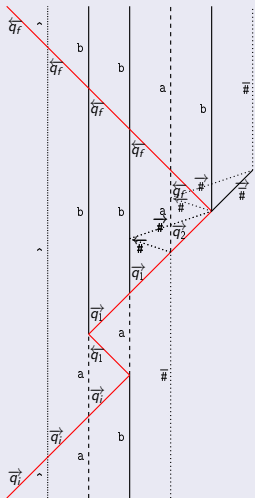


Simulation



Calculer (au sens de Turing)

Simulation



Machines rationnelle

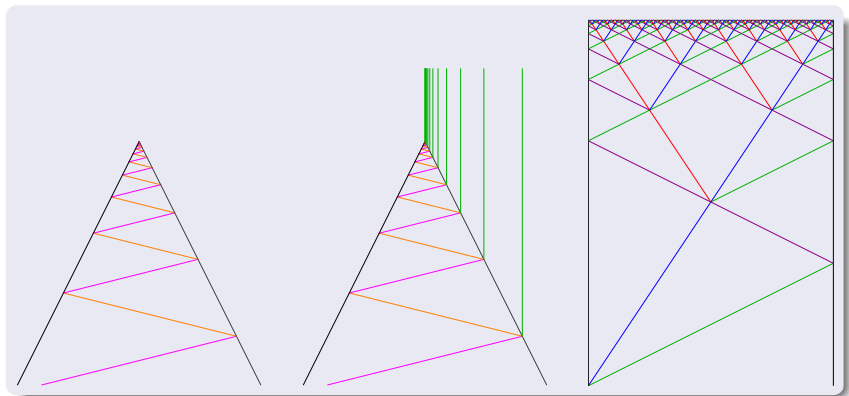
- vitesses $\in \mathbb{Q}$
- positions initiales $\in \mathbb{Q}$
- \Rightarrow coordonnée des collisions $\in \mathbb{Q}$
- implantable exactement

Indécidabilité

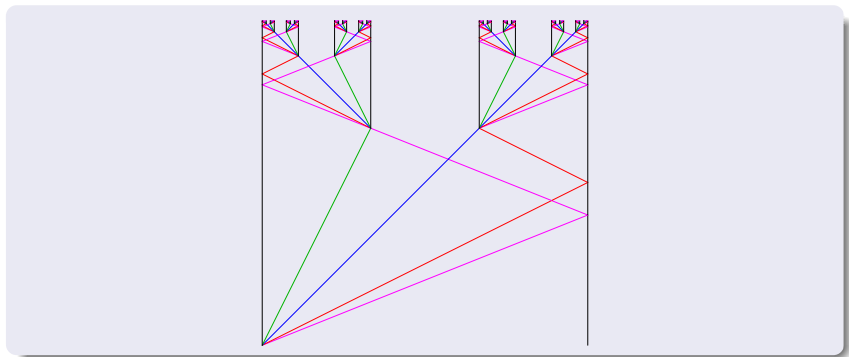
- nombre fini de collisions
- apparition d'un méta-signal
- utilisation d'une règle
- disparition des signaux
- participation d'un signal à une collision
- extension sur le coté...

- 1 Introduction
- 2 Définition
- 3 Calculer
- 4 Fractales**
- 5 Plus loin
- 6 Conclusion

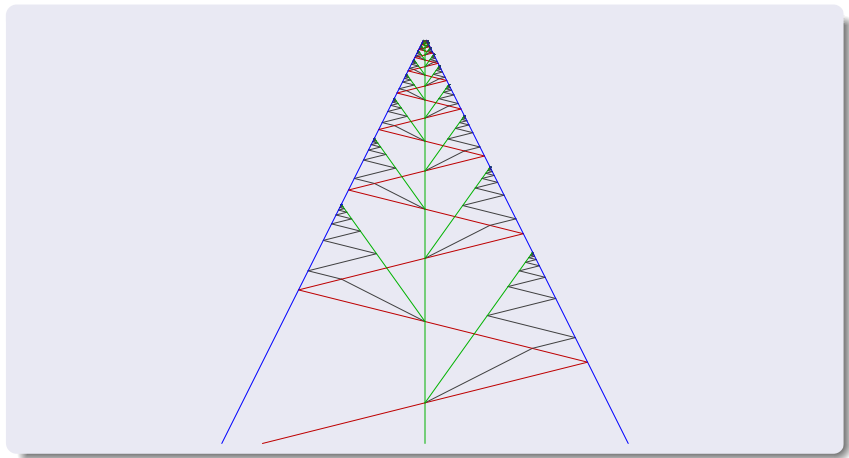
Exemples



Cantor de toute dimension de Hausdorff [Senot, 2013]

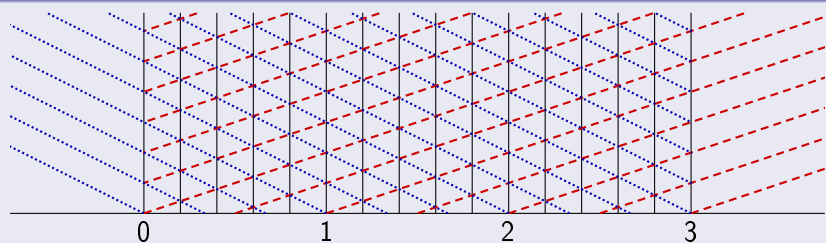


Ordre supérieur



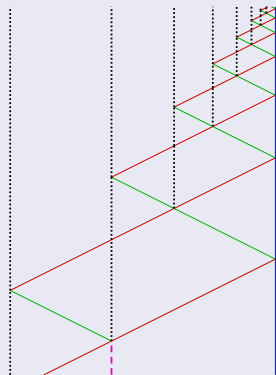
Fractale à 3 vitesses [Becker et al., 2013]

Cas rationnel : prisonnier d'un maillage

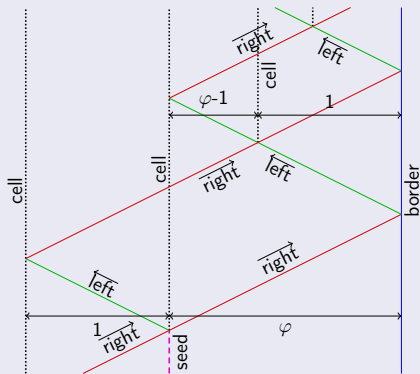


- Devient périodique

Fractale irrationnelle



Construction



Positions initiales *irrationnelles* $(-1, -0.6, 0, \varphi)$, vitesses $(-2, 0, 2)$

φ vérifie $\frac{\varphi}{1} = \frac{1}{\varphi - 1}$ φ est le *nombre d'or*

- 1 Introduction
- 2 Définition
- 3 Calculer
- 4 Fractales
- 5 Plus loin**
- 6 Conclusion

Calcul fractal

Résoudre QSAT

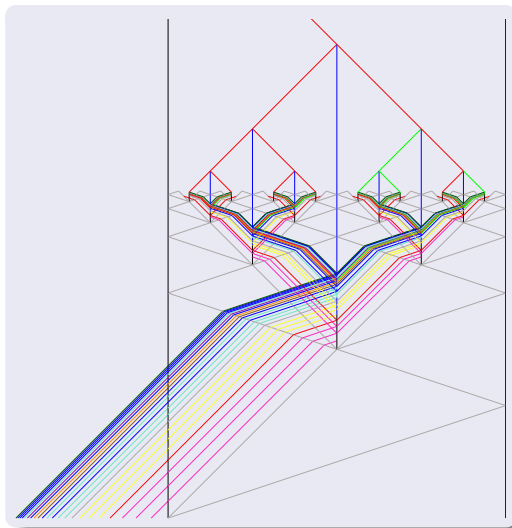
Machine générique

[Duchier et al., 2012]

Exemple

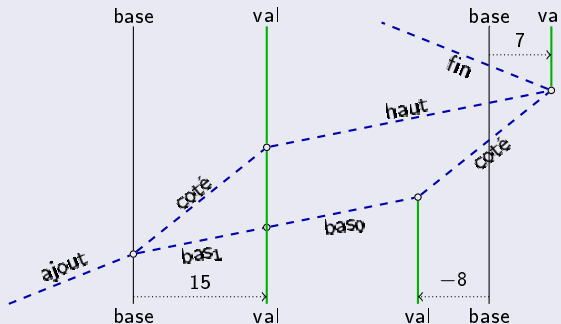
$\exists x_1 \forall x_2 \forall x_3$

$x_1 \wedge (\neg x_2 \vee x_3)$



Calculer avec des nombres réels exacts

Addition (valeur \approx distance)



Caractérisation hors accumulation : lin-BSS

- addition, soustraction
- multiplication par une constante
- test de signe, branchement...

- 1 Introduction
- 2 Définition
- 3 Calculer
- 4 Fractales
- 5 Plus loin
- 6 Conclusion**

Résultats

- modèles simple
- beaucoup de propriétés

Perspectives

- autre apparitions ?
- discrétisation automatique (thèse Tom Besson)

Autres modèles dynamiques euclidiens

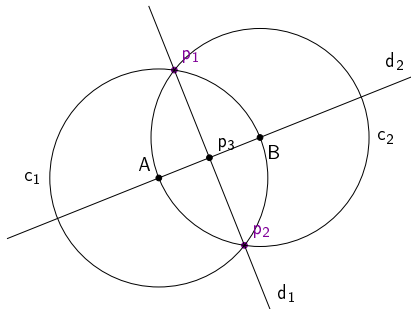
- EJC IM 2015
[Becker and Durand-Lose, 2015]

Règle et compas [Huckenbeck, 1989, Huckenbeck, 1991]

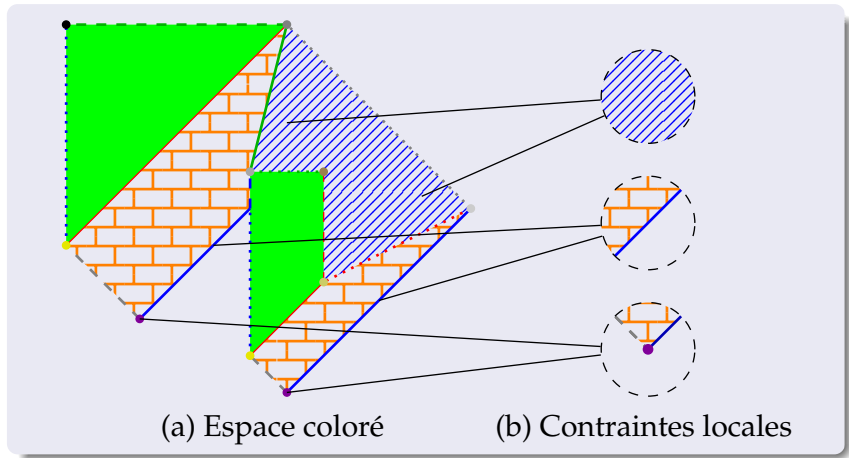
Exemple

- calcul du milieu de A et B

- 1: $c_1 \leftarrow$ Cercle (centre A, rayon $d(A,B)$)
- 2: $c_2 \leftarrow$ Cercle (centre B, rayon $d(A,B)$)
- 3: $p_1 \leftarrow$ Intersection (c_1, c_2)
- 4: $p_2 \leftarrow$ Intersection (c_1, c_2) différente p_1
- 5: $d_1 \leftarrow$ Droite (p_1, p_2)
- 6: $d_2 \leftarrow$ Droite (A, B)
- 7: $p_3 \leftarrow$ Intersection (d_1, d_2)
- 8: Écrire p_3
- 9: Fini

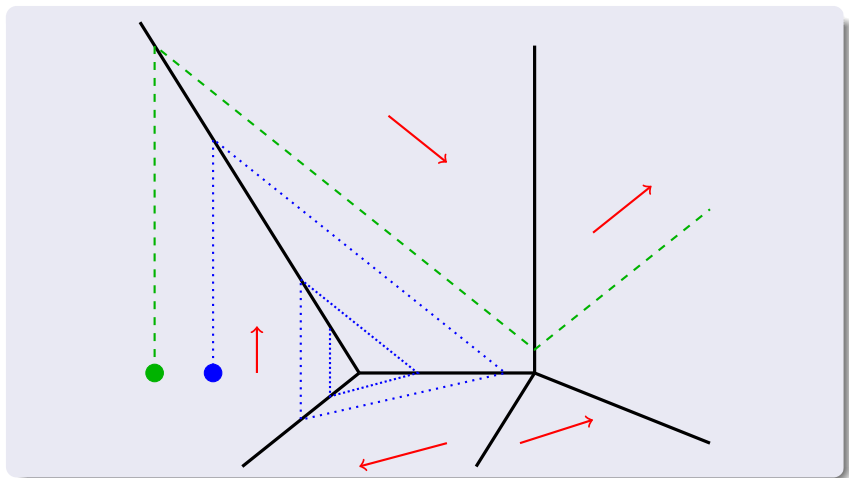


Automates de Mondrian [Jacopini and Sontacchi, 1990]



Dérivée constante par région

[Asarin et al., 1995, Bournez, 1999]



Références tout public et web

Pour la Science, rubrique de Jean-Paul Delahaye

- Page web de [Delahaye, 2014]

EJC IM 2015





- Accès direct à [Becker and Durand-Lose, 2015, Sect. 4.3]

Introduction visuelle (un peu pauvre)

- http://www.univ-orleans.fr/lifo/Members/Jerome.Durand-Lose/Recherche/AGC/intro_AGC.html

Articles de JDL et al. téléchargeables depuis

- <http://www.univ-orleans.fr/lifo/Members/Jerome.Durand-Lose/Recherche/publications.html>

-  Asarin, E., Maler, O., and Pnueli, A. (1995).
Reachability analysis of dynamical systems having piecewise-constant derivatives.
Theoret. Comp. Sci., 138(1) :35–65.
-  Becker, F., Chappelle, M., Durand-Lose, J., Levorato, V., and Senot, M. (2013).
Abstract geometrical computation 8: Small machines, accumulations & rationality.
Submitted.
-  Becker, F. and Durand-Lose, J. (2015).
Construire et calculer dans un monde 2d.
In Ollinger, N., editor, *Informatique Mathématique — une photographie en 2015*, pages 135–177. CNRS édition.
-  Bournez, O. (1999).

Achilles and the Tortoise climbing up the hyper-arithmetical hierarchy.

Theoret. Comp. Sci., 210(1) :21–71.



Das, R., Crutchfield, J. P., Mitchell, M., and Hanson, J. E. (1995).

Evolving globally synchronized cellular automata.

In Eshelman, L. J., editor, *International Conference on Genetic Algorithms '95*, pages 336–343. Morgan Kaufmann.



Delahaye, J.-P. (2014).

Une théorie rêvée du calcul.

Pour la Science, 437 :90–96.

in French.



Duchier, D., Durand-Lose, J., and Senot, M. (2012).

Computing in the fractal cloud: modular generic solvers for SAT and Q-SAT variants.

In Agrawal, M., Cooper, B. S., and Li, A., editors, *Theory and Applications of Models of Computations (TAMC '12)*, number 7287 in LNCS, pages 435–447. Springer.



Fischer, P. C. (1965).

Generation of primes by a one-dimensional real-time iterative array.

J. ACM, 12(3) :388–394.



Goto, E. (1966).

Ōtomaton ni kansuru pazuru [Puzzles on automata].

In Kitagawa, T., editor, *Jōhōkagaku eno michi [The Road to information science]*, pages 67–92. Kyoristu Shuppan Publishing Co., Tokyo.



Huckenbeck, U. (1989).

Euclidian geometry in terms of automata theory.

Theoret. Comp. Sci., 68(1) :71–87.



Huckenbeck, U. (1991).

A result about the power of geometric oracle machines.

Theoret. Comp. Sci., 88(2) :231–251.



Jacopini, G. and Sontacchi, G. (1990).

Reversible parallel computation: an evolving space-model.

Theoret. Comp. Sci., 73(1) :1–46.



Senot, M. (2013).

Modèle géométrique de calcul : fractales et barrières de complexité.

Thèse de doctorat, Université d'Orléans.