

Machines à signaux et modèles de calcul analogiques

Jérôme Durand-Lose



Laboratoire d'Informatique Fondamentale d'Orléans,
Université d'Orléans, Orléans, FRANCE

Séminaire du LIFO, 19 octobre 2009

- 1 Introduction, machines à signaux
- 2 i i Nombre réel ??
- 3 Liens avec BSS
- 4 Liens avec l'Analyse récursive
- 5 Conclusion

- 1 Introduction, machines à signaux
- 2 \mathbb{R} Nombre réel ??
- 3 Liens avec BSS
- 4 Liens avec l'Analyse récursive
- 5 Conclusion

Contexte

Automates cellulaires

- parallélisme massif, uniforme et synchrone
- prise en compte des contraintes spatiales
- états, cellules / espace, itérations / temps *discrets*

Contexte

Automates cellulaires

- parallélisme massif, uniforme et synchrone
- prise en compte des contraintes spatiales
- états, cellules / espace, itérations / temps *discrets*

Machines à signaux

- abstraction des AC se concentrant sur les signaux
- espace et temps *continus*

Contexte

Automates cellulaires modèle de calcul discret

- parallélisme massif, uniforme et synchrone
- prise en compte des contraintes spatiales
- états, cellules / espace, itérations / temps *discrets*

Machines à signaux modèle de calcul continue et analogique

- abstraction des AC se concentrant sur les signaux
- espace et temps *continus*

Contexte

Automates cellulaires modèle de calcul discret

- parallélisme massif, uniforme et synchrone
- prise en compte des contraintes spatiales
- états, cellules / espace, itérations / temps *discrets*

Machines à signaux modèle de calcul continue et analogique

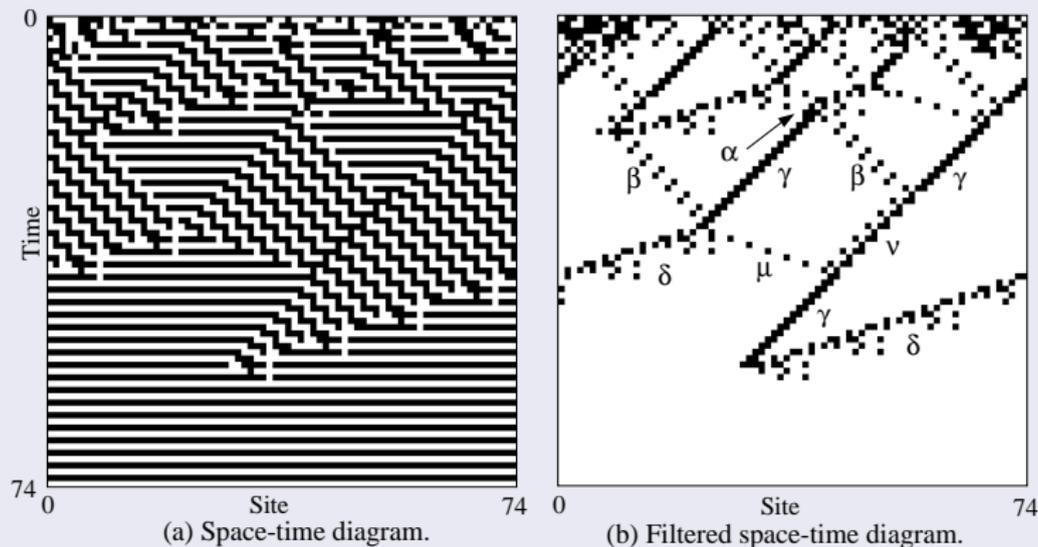
- abstraction des AC se concentrant sur les signaux
- espace et temps *continus*

Liens avec d'autres modèles analogiques

- Modèle de Blum, Shub et Smale
[Durand-Lose, 2007, Durand-Lose, 2008]
- Analyse récursive [Durand-Lose, 2009]

Origine de l'approche par signaux

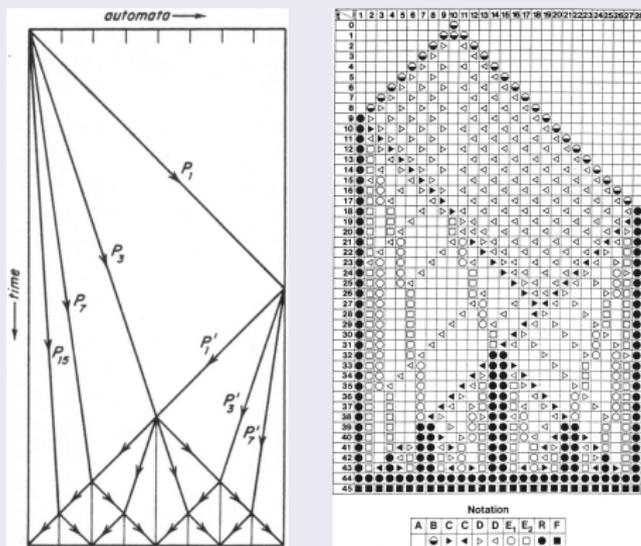
Automates cellulaires — analyse



[Das et al., 1995, Fig. 1]

Origine de l'approche par signaux

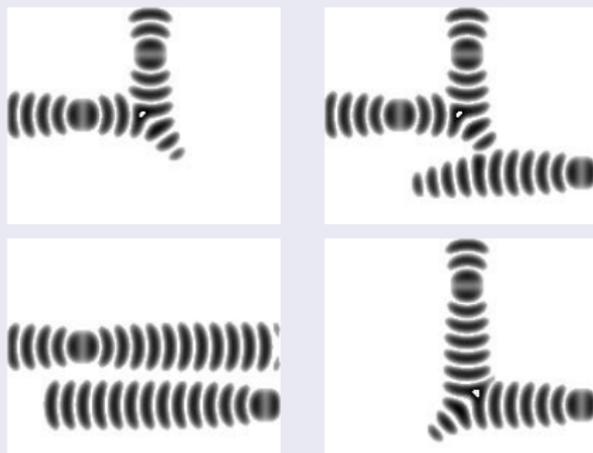
Automates cellulaires — conception



[Varshavsky et al., 1970, Fig 1 and 3]

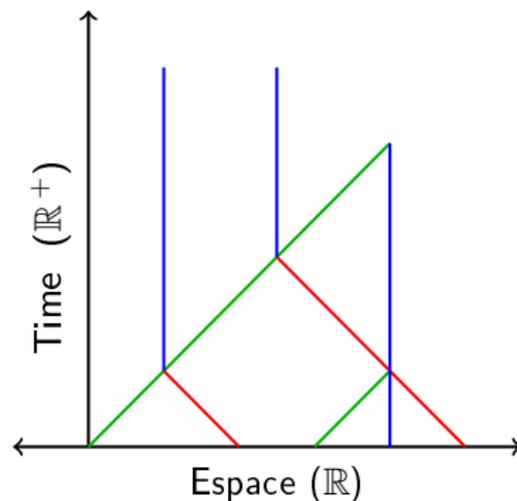
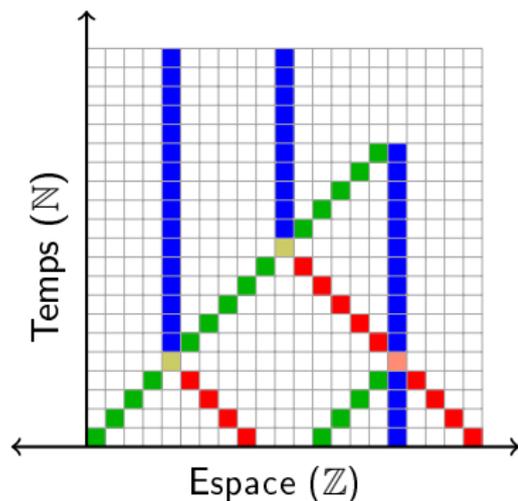
Origine de l'approche par signaux

Collision based computing



©2009 A. Adamatzky

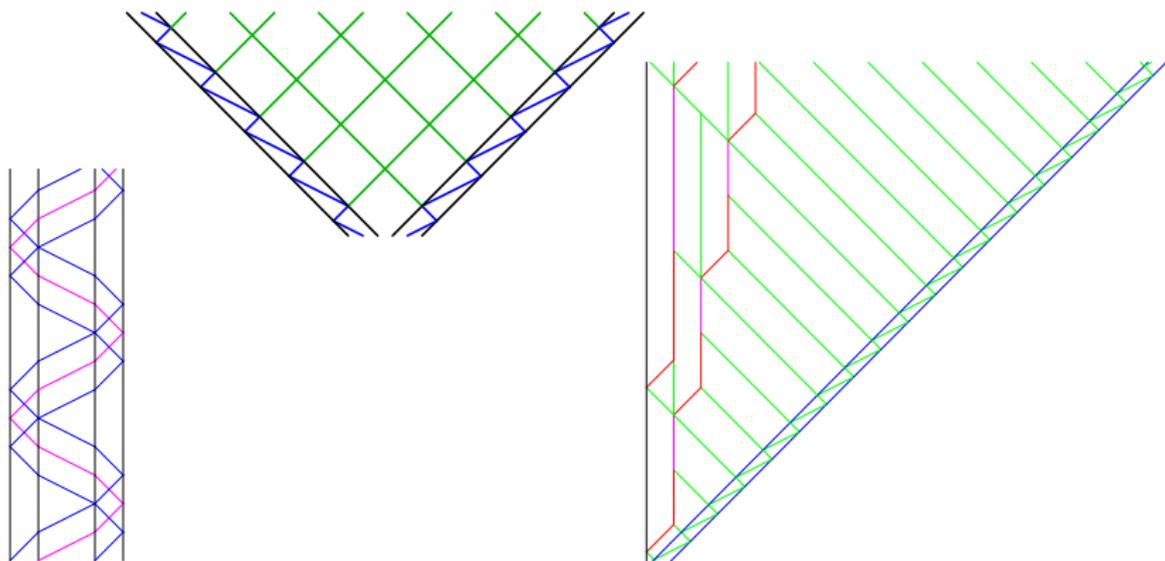
Machines à signaux : idéalisation continue



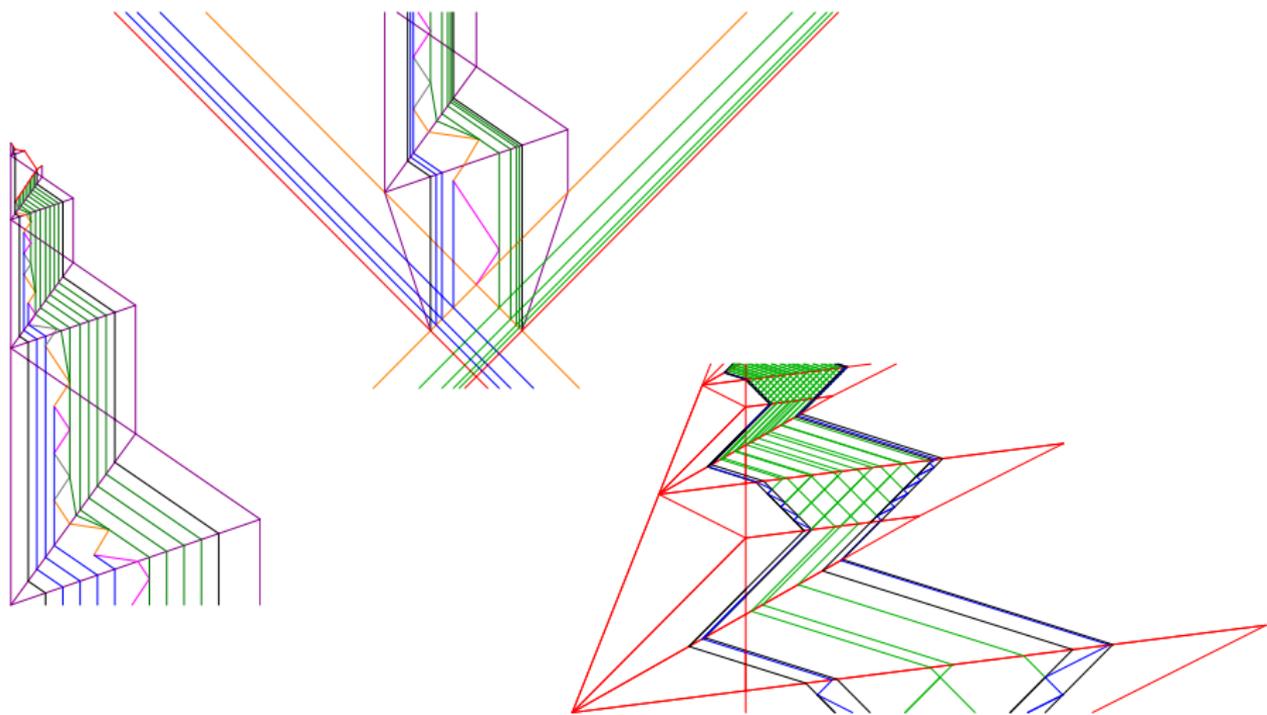
Vocabulaire

- Signal (meta-signal) même méta-signal \rightsquigarrow signaux parallèles
- Collision (règle de)

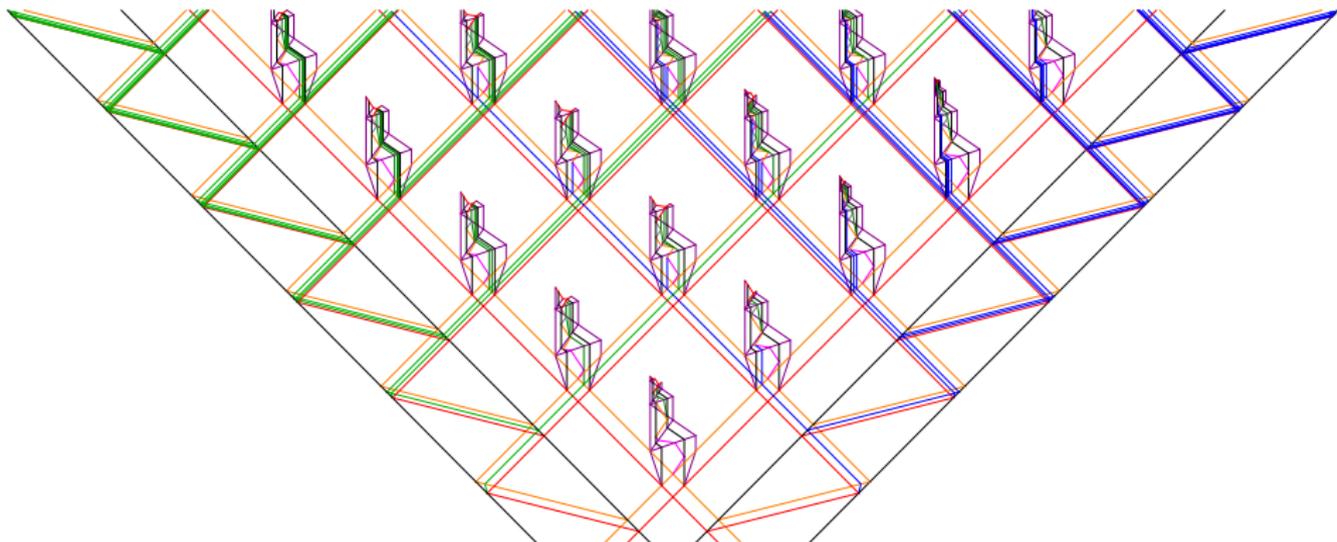
Exemples



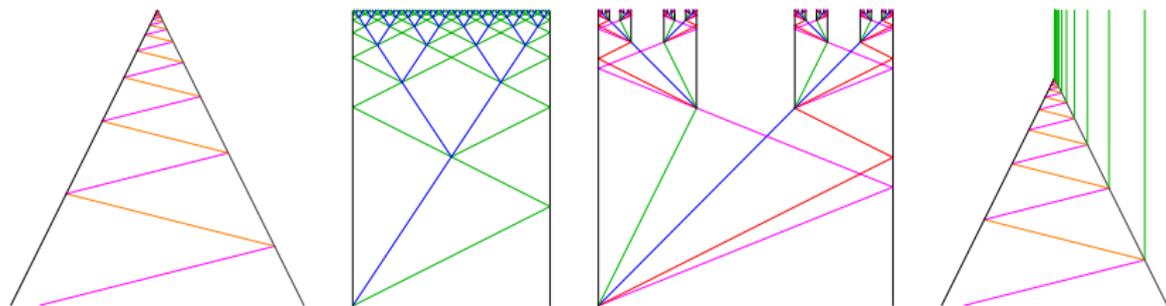
Exemples plus complexes



Exemple encore plus complexe



Nouveaux types de *monstres*



- 1 Introduction, machines à signaux
- 2 ?? Nombre réel ??
- 3 Liens avec BSS
- 4 Liens avec l'Analyse récursive
- 5 Conclusion

Qu'est-ce qu'un nombre réel ?

Qu'est-ce qu'un nombre réel ?

Un réel est un « réel », un point c'est tout !

- valeur exacte
- opérations permises selon la structure considérée comme anneau $+$, $-$, \times_{ct} , \times et test sur signe (tout en temps 1)
- modèle de Blum, Shub and Smale [Blum et al., 1989, Blum et al., 1998]

Qu'est-ce qu'un nombre réel ?

Un réel est un « réel », un point c'est tout !

- valeur exacte
- opérations permises selon la structure considérée comme anneau $+$, $-$, \times_{ct} , \times et test sur signe (tout en temps 1)
- modèle de Blum, Shub and Smale [Blum et al., 1989, Blum et al., 1998]

Une classe d'équivalence des suites de Cauchy rationnelles

- suite infinie de rationnels \Rightarrow mot infini
- préfixe fini \Rightarrow approximation
- valeur exacte / représentation complète en temps infini
- analyse récursive, machines de Turing de type 2, *computable analysis* [Weihrauch, 2000]

Modèles incomparables !

BSS

- peut calculer le signe
- mais pas l'exponentielle

Analyse récursive

- peut calculer l'exponentielle
- ne peut calculer que des fonctions continues

Modèles incomparables !

BSS

- peut calculer le signe
- mais pas l'exponentielle

Analyse récursive

- peut calculer l'exponentielle
- ne peut calculer que des fonctions continues

Autres modèles ?

Oui, beaucoup, rarement comparables

pas de thèse de Turing analogique

Représentation

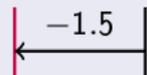
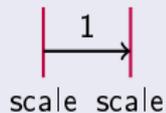
(approche BBS)



Valeur: 4

Représentation

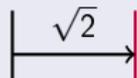
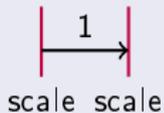
(approche BBS)



Valeur: -1.5

Représentation

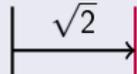
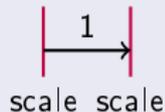
(approche BBS)



Valeur : $\sqrt{2}$

Représentation

(approche BBS)



Valeur : $\sqrt{2}$

Signe...

... en fonction du premier signal rencontré

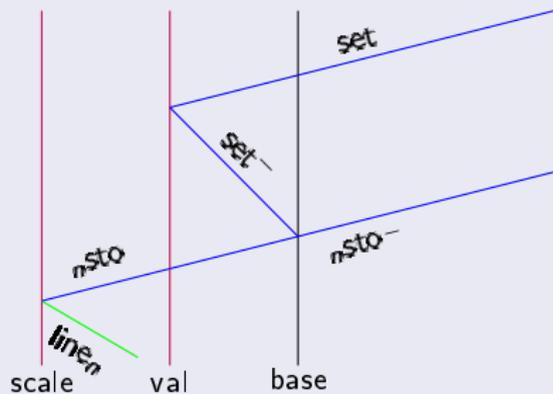
Autres fonctions ?

- 1 Introduction, machines à signaux
- 2 i i Nombre réel ??
- 3 Liens avec BSS**
- 4 Liens avec l'Analyse récursive
- 5 Conclusion

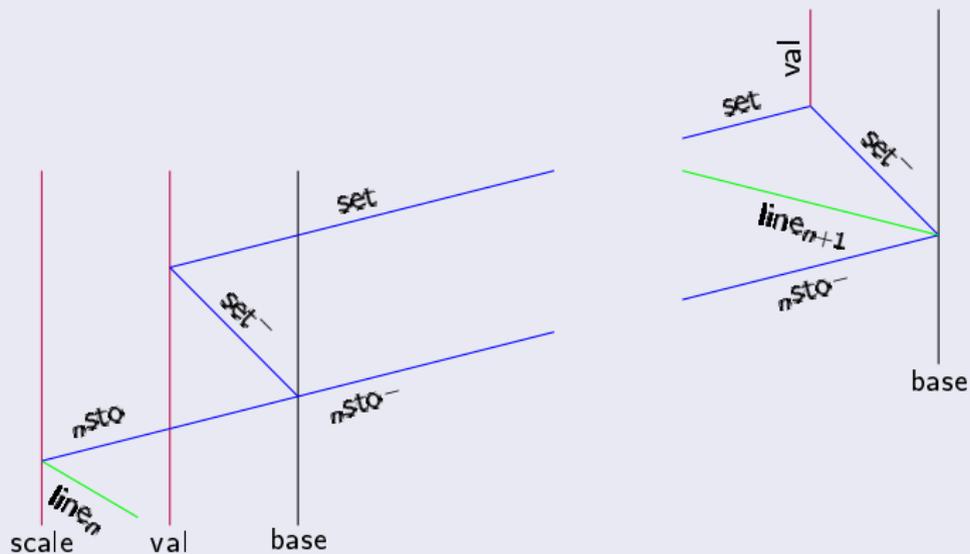
Concentration sur le calcul sur les réels

↪ on passe sur la gestion des variables et autres « détails »

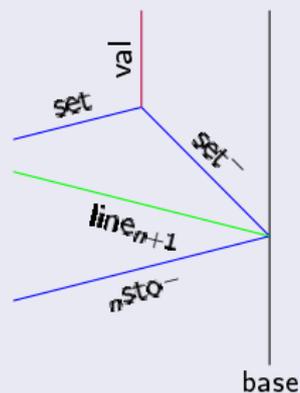
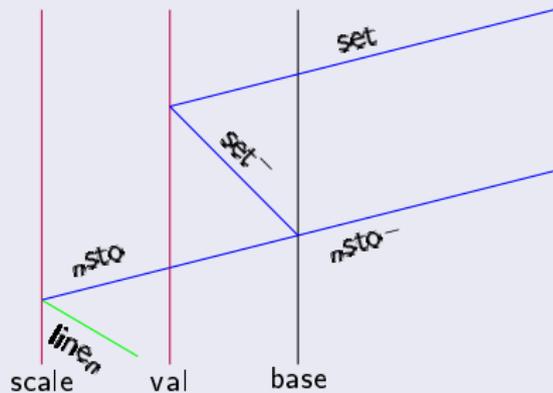
Copier une valeur



Copier une valeur



Copier une valeur

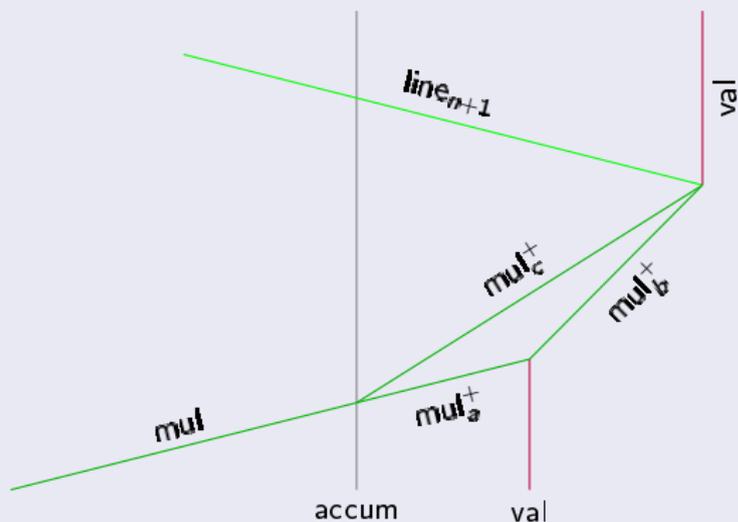


L'addition se fait...

...en ajoutant à val et non à base

Multiplication par une constante (externe)

Par exemple, par 2



Lien avec BSS linéaire

Théorème [Durand-Lose, 2007]

SM et lin-BSS ont la même puissance de calcul

- en l'absence de toute accumulation

(autre sens non présenté)

Lien avec BSS linéaire

Théorème [Durand-Lose, 2007]

SM et lin-BSS ont la même puissance de calcul

- en l'absence de toute accumulation

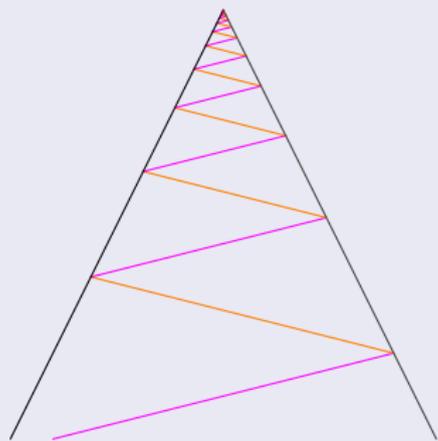
(autre sens non présenté)

Et la multiplication interne ?

- impossible sans accumulation
- $\dot{\iota}$ accumulation ?
- $\dot{\iota}$ et ensuite ?

Accumulation simple ?

?



Simple
Isolée

Schéma de multiplication

$$0 < y < 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} y = 0.y_1y_2y_3 \dots \\ xy = \sum_{0 < i} y_i \left(\frac{x}{2^i} \right) \end{array} \right.$$

$$1 \leq y \quad yx = (x2^k) \left(\frac{y}{2^k} \right) \text{ avec } 0 < \frac{y}{2^k} < 1$$

Zéros et signes se traitent facilement

Récurrence

$$p_n = \sum_{0 < i < n} y_i \left(\frac{x}{2^i} \right)$$

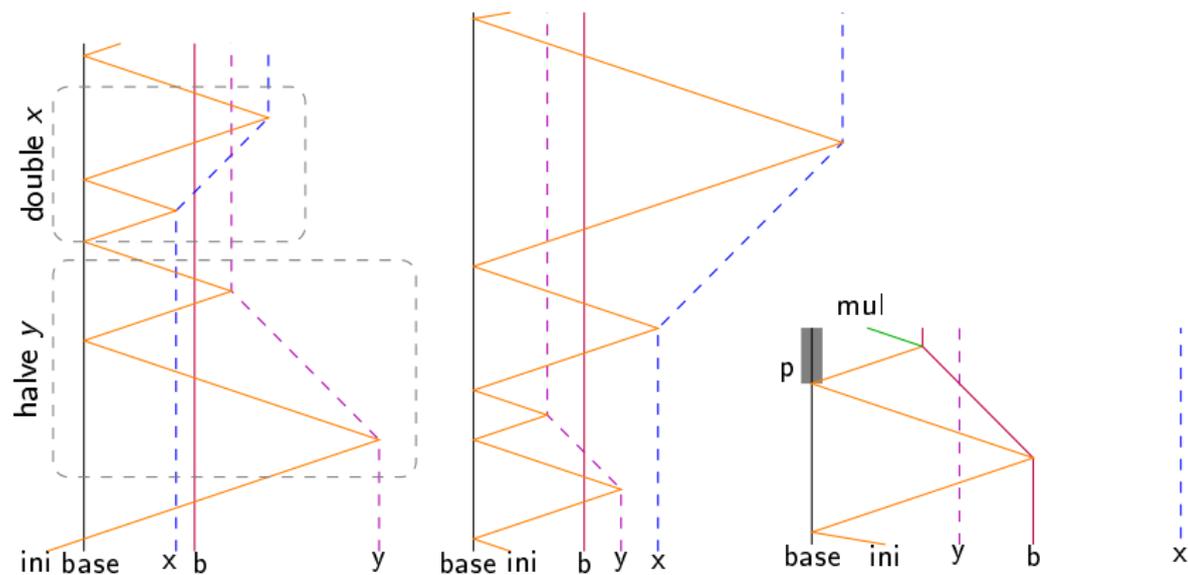
$$x_n = \frac{x}{2^n}$$

$$\hat{y}_n = 0.00 \dots 0 y_n y_{n+1} y_{n+2} \dots$$

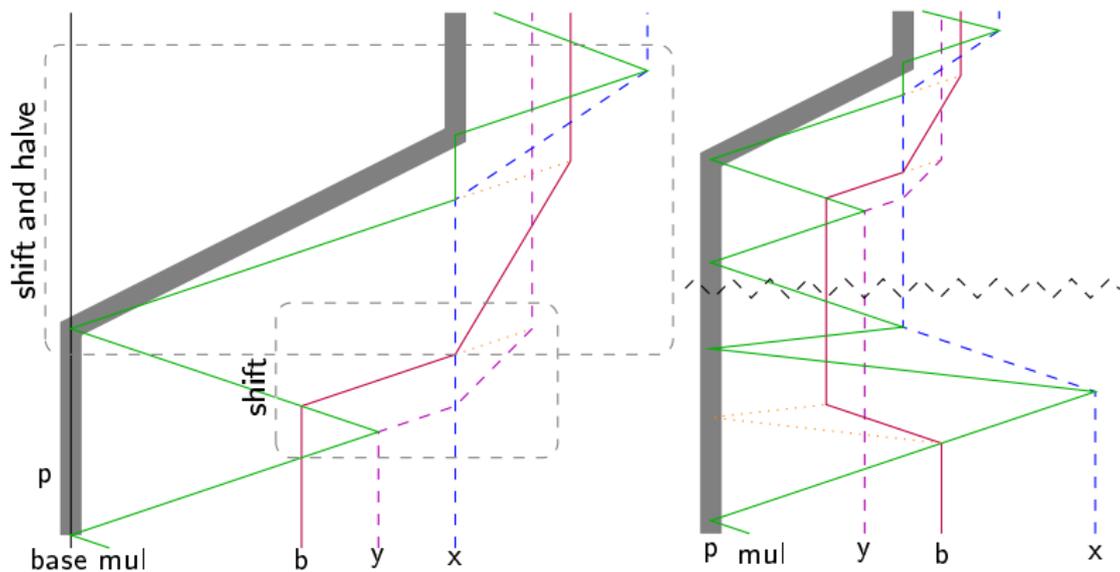
$$b_n = \frac{1}{2^n}$$

Valeurs suivantes se calculent avec test, somme et division par 2
(multiplication par la constante $\frac{1}{2}$)

- $p_n \rightarrow xy$ donc accumulation sur cette limite
- Toutes les autres $\rightarrow 0$ et tant mieux !

Normalisation (pour assurer $0 < y < 1$)

Boucle infinie



- 1 Introduction, machines à signaux
- 2 i i Nombre réel ??
- 3 Liens avec BSS
- 4 Liens avec l'Analyse récursive**
- 5 Conclusion

Analyse récursive

Codage utilisé : *binaire signé*

$$\{\bar{1}, 0, 1\}^* \bullet \{\bar{1}, 0, 1\}^\omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$n_k n_{k-1} \dots n_0 \bullet d_1 d_2 d_3 \dots d_n \dots \longmapsto \sum_{0 \leq i \leq k} n_i \cdot 2^i + \sum_{1 \leq i} \frac{d_i}{2^i}$$

Problème : infinité de signaux

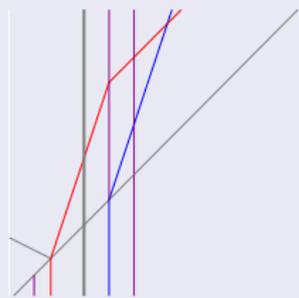
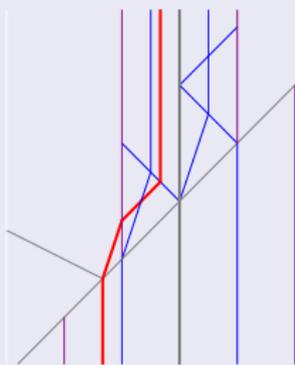
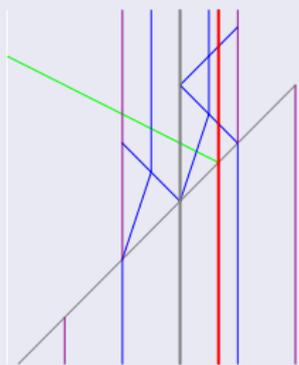
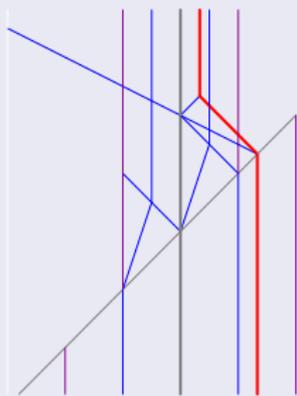
- garder la même représentation
- convertir en un « convoi »
- manipuler et faire un nombre infini d'itérations à une machine de Turing
- reconvertir

Extraction d'un bit

Extraction de bit signé à la demande

... il va y avoir beaucoup de demandes...

Structure vide

 $-1 < \varepsilon < -\frac{1}{2}$  $-\frac{1}{2} < \varepsilon < \frac{1}{2}$  $\frac{1}{2} < \varepsilon < 1$ *Voulez-vous une animation ?*

Simulation d'une machine de Turing dans un espace fini

Calcul d'une MT

q_1

b	b	c	a	a	#
---	---	---	---	---	---

 ...

q_1

b	b	c	a	#
---	---	---	---	---

 ...

q_1

b	b	c	#
---	---	---	---

 ...

q_1

b	b	b
---	---	---

 ...

q_1

b	c	b
---	---	---

 ...

q_0

b	c	#
---	---	---

 ...

q_0

b	b
---	---

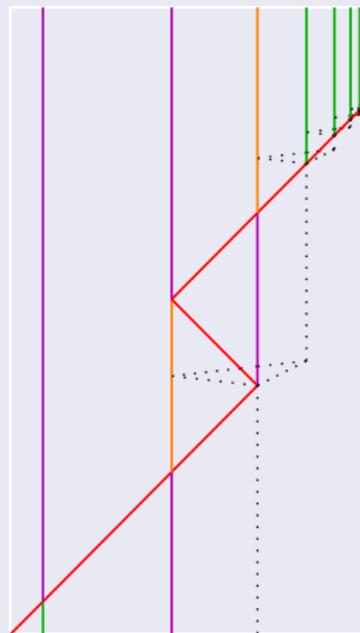
 ...

q_0

a	b
---	---

 ...

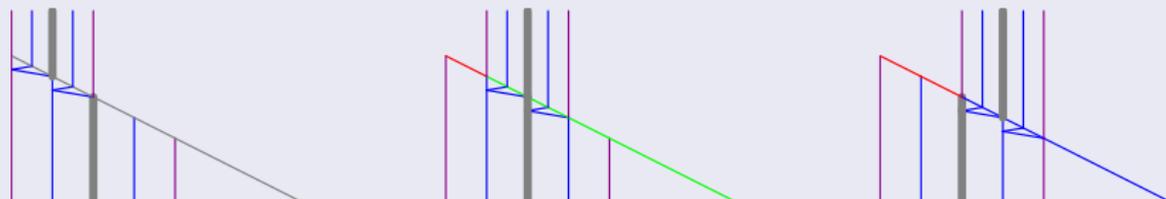
Simulation



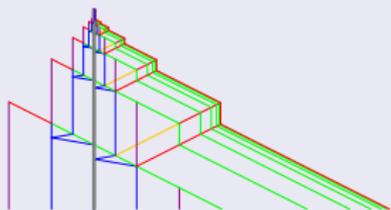
Connexion en mode approximation

- Un signal sort pour demander un bit supplémentaire de l'entrée
- Un signal est envoyé pour préciser la sortie

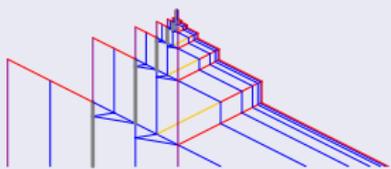
Ajouter un bit au résultat, améliorer la précision



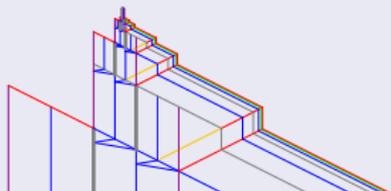
000000



111111

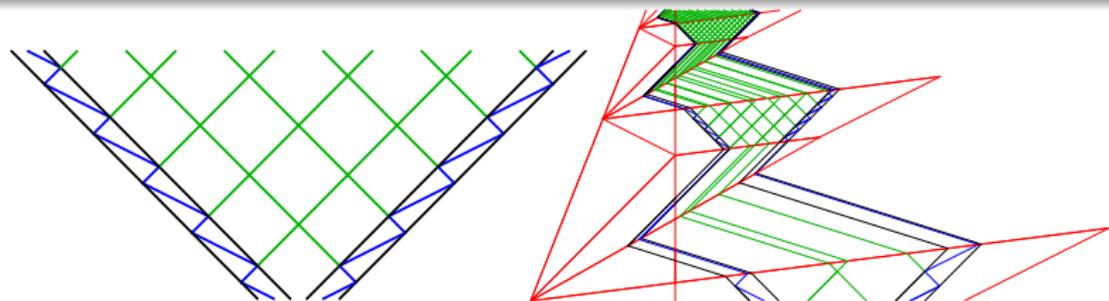


111110



Tout faire en temps fini

Opérateurs permettant de contracter l'espace et le temps tout en gardant des rapports exacts (lien modèle du trou noir)

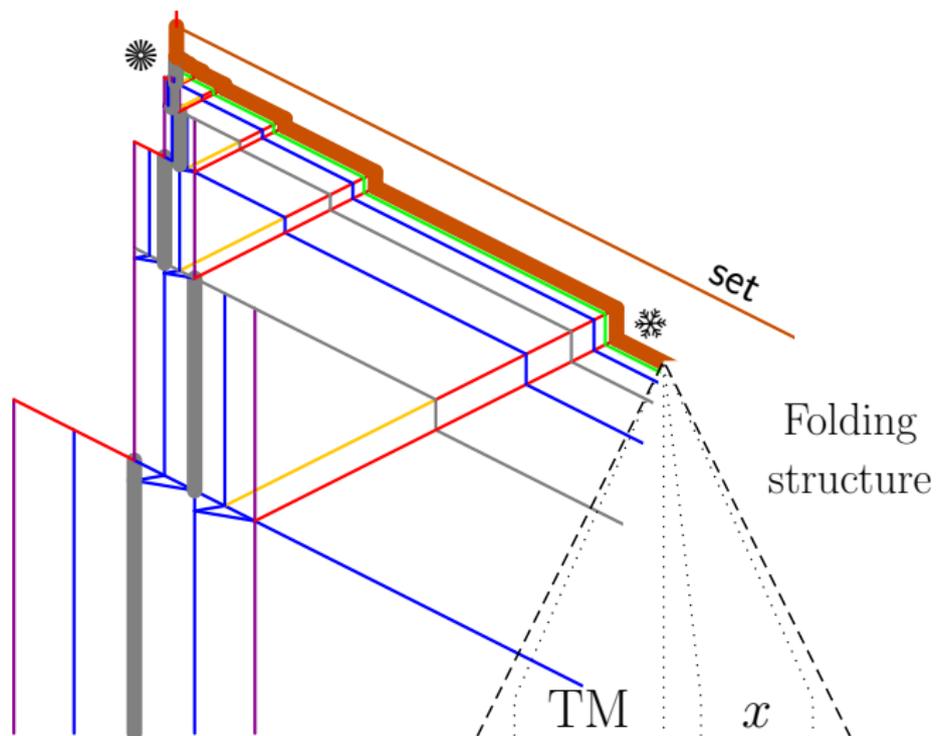


- Entrées : à l'intérieur de la contraction, aucun problème
- Sortie : de plus en plus de signaux \rightsquigarrow création d'un *convoi*

Limite du convoi : accumulation non isolée

toujours présente ne se transformant pas en signal
 \rightsquigarrow barrière infranchissable

Schéma global



- 1 Introduction, machines à signaux
- 2 i i Nombre réel ??
- 3 Liens avec BSS
- 4 Liens avec l'Analyse récursive
- 5 Conclusion

Liens avec d'autres modèles

- Modèles totalement simulés / implanté / émulé
 - modèle de Blum, Shub and Smale
 - analyse récursive
- (à faire) *Caractériser la puissance analytique* avec des accumulations simples

À faire par ailleurs

- Discrétisation automatique vers un AC
- Explorer les fractales engendrables
- Étudier les complexités (et liens avec les classes habituelles)

Merci de votre attention

