Étude de la complexité paramétrée du problème (r, ℓ)-VERTEX DELETION

Julien Baste [1] Luerbio Faria [2]
Sulamita Klein [3] Ignasi Sau [1]

[1]Équipe AlGCo, CNRS, LIRMM, Montpellier, France

[2]FFP, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brazil.

[3]Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brazil.

Outline of the talk

1. $(r,\ \ell)$-graphes
2. (r,ℓ)-Vertex Deletion
3. Independent (r,ℓ)-Vertex Deletion

On continu avec...

1. (r, ℓ)-graphes
2. (r,ℓ)-Vertex Deletion
3. Independent (r,ℓ)-Vertex Deletion

Définition

Un *(r, ℓ)-graphe* est un graphe dont l'ensemble des sommets peut être partitionné en r ensembles indépendents et ℓ cliques.

Définition

Un *(r, ℓ)-graphe* est un graphe dont l'ensemble des sommets peut être partitionné en r ensembles indépendants et ℓ cliques.

(1,0)-graphs Ensembles indépendents

(0,1)-graphs Cliques.

Définition

Un *(r, ℓ)-graphe* est un graphe dont l'ensemble des sommets peut être partitionné en r ensembles indépendents et ℓ cliques.

(1,0)-graphs	Ensembles indépendents
(0,1)-graphs	Cliques.
(2,0)-graphs	Graphes bipartis.
(1,1)-graphs	Graphes splits.
(r,0)-graphs	Graphes r colorable.

Théorème

Soit r et ℓ deux entiers fixés. Soit $G = (V, E)$ un graphe.

- *Si $\max\{r, \ell\} < 3$, alors on peut vérifier si G est un (r, ℓ)-graphe et construire une (r, ℓ)-partition en temps polynomial.*
- *Sinon, la reconnaissance est un problème NP-complet.*

[Brandstädt 96]

On continu avec...

1. (r, ℓ)-graphes
2. (r,ℓ)-Vertex Deletion
3. Independent (r,ℓ)-Vertex Deletion

(r,ℓ)-VERTEX DELETION
Entrée : Un graphe $G = (V, E)$ et un entier k.
Paramètre : k.
Sortie : Un ensemble $S \subseteq V$ tel que :

- $|S| \leq k$
- $G \backslash S$ est un (r, ℓ)-graphe.

3	p-NP-c	p-NP-c	p-NP-c	p-NP-c
2				p-NP-c
1				p-NP-c
0				p-NP-c
ℓ \ r	0	1	2	3

3	p-NP-c	p-NP-c	p-NP-c	p-NP-c
2				p-NP-c
1				p-NP-c
0	P			p-NP-c
ℓ \ r	0	1	2	3

3	p-NP-c	p-NP-c	p-NP-c	p-NP-c
2				p-NP-c
1	$\overline{\text{VC}}$ 1.27^k			p-NP-c
0	P	VC 1.27^k		p-NP-c
ℓ \ r	0	1	2	3

[Chen, Kanj, Xia 10]

3	p-NP-c	p-NP-c	p-NP-c	p-NP-c
2	$\overline{\text{OCT}}$ 2.31^k			p-NP-c
1	$\overline{\text{VC}}$ 1.27^k			p-NP-c
0	P	VC 1.27^k	OCT 2.31^k	p-NP-c
ℓ \ r	0	1	2	3

[Reed, Smith, Vetta 04]

3	p-NP-c	p-NP-c	p-NP-c	p-NP-c
2	$\overline{\text{OCT}}$ 2.31^k			p-NP-c
1	$\overline{\text{VC}}$ 1.27^k	SPLIT D. 2^k		p-NP-c
0	P	VC 1.27^k	OCT 2.31^k	p-NP-c
ℓ \ r	0	1	2	3

[Foldes, Hammer 77]

3	p-NP-c	p-NP-c	p-NP-c	p-NP-c
2	$\overline{\text{OCT}}$ 2.31^k	NP-h	NP-h	p-NP-c
1	$\overline{\text{VC}}$ 1.27^k	Split D. 2^k	NP-h	p-NP-c
0	P	VC 1.27^k	OCT 2.31^k	p-NP-c
ℓ \ r	0	1	2	3

3	p-NP-c	p-NP-c	p-NP-c	p-NP-c
2	$\overline{\text{OCT}}$ 2.31^k	3.31^k	3.31^k	p-NP-c
1	$\overline{\text{VC}}$ 1.27^k	Split D. 2^k	3.31^k	p-NP-c
0	P	VC 1.27^k	OCT 2.31^k	p-NP-c
ℓ \ r	0	1	2	3

[B., Faria, Klein, Sau on arXiv (abs/1504.05515) 21/04/2015]

[Kolay, Panolan on arXiv (abs/1504.08120) 30/04/2015]

3	p-NP-c	p-NP-c	p-NP-c	p-NP-c
2	$\overline{\text{OCT}}$ 2.31^k	3.31^k	3.31^k	p-NP-c
1	$\overline{\text{VC}}$ 1.27^k	SPLIT D. 2^k	3.31^k	p-NP-c
0	P	VC 1.27^k	OCT 2.31^k	p-NP-c
ℓ \ r	0	1	2	3

Théorème

Il n'existe pas d'algorithme résolvant (r,ℓ)-VERTEX DELETION et calculant en un temps $2^{o(k)} \cdot n^{O(1)}$, pour $r > 0$ ou $\ell > 0$, à moins que ETH soit fausse.

$(2, 1)$-Vertex Deletion
Entrée : Un graphe $G = (V, E)$ et un entier k.
Paramètre : k.
Sortie : Un ensemble $S \subseteq V$ tel que :

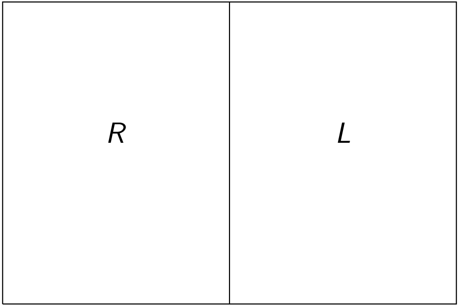
- $|S| \leq k$
- $G \backslash S$ est un $(2, 1)$-graphe.

Définition

Soit $G = (V, E)$ un graph. Une (r, ℓ)-*partition* de G est une bipartition (R, L) de V tel que R induit un $(r, 0)$-graphe et L induit une $(0, \ell)$-graphe.

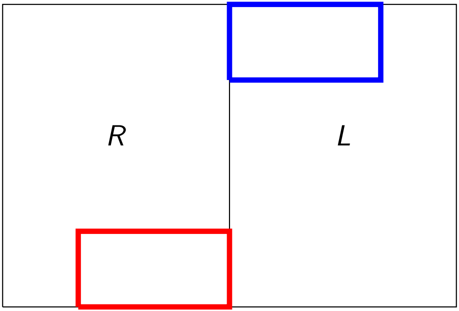
Lemme

Soit r et ℓ deux entiers fixés et (R, L) et (R', L') deux (r,ℓ)-partitions d'un graphe G. Alors on peut trouver $L_{sel} \subseteq R$ et $R_{sel} \subseteq L$, tous les deux de taille au plus $r \cdot \ell$ tel que $R' = (R \setminus L_{sel}) \cup R_{sel}$ et $L' = (L \setminus R_{sel}) \cup L_{sel}$.



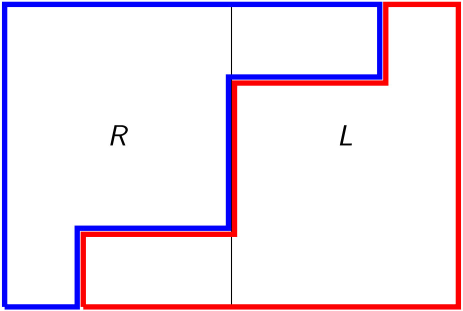
Lemme

Soit r et ℓ deux entiers fixés et (R, L) et (R', L') deux (r,ℓ)-partitions d'un graphe G. Alors on peut trouver $L_{sel} \subseteq R$ et $R_{sel} \subseteq L$, tous les deux de taille au plus $r \cdot \ell$ tel que $R' = (R \setminus L_{sel}) \cup R_{sel}$ et $L' = (L \setminus R_{sel}) \cup L_{sel}$.



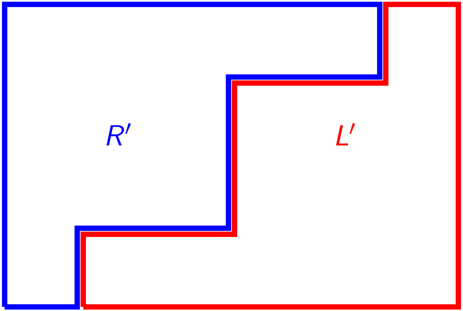
Lemme

Soit r et ℓ deux entiers fixés et (R, L) et (R', L') deux (r,ℓ)-partitions d'un graphe G. Alors on peut trouver $L_{sel} \subseteq R$ et $R_{sel} \subseteq L$, tous les deux de taille au plus $r \cdot \ell$ tel que $R' = (R \setminus L_{sel}) \cup R_{sel}$ et $L' = (L \setminus R_{sel}) \cup L_{sel}$.



Lemme

Soit r et ℓ deux entiers fixés et (R, L) et (R', L') deux (r, ℓ)-partitions d'un graphe G. Alors on peut trouver $L_{sel} \subseteq R$ et $R_{sel} \subseteq L$, tous les deux de taille au plus $r \cdot \ell$ tel que $R' = (R \setminus L_{sel}) \cup R_{sel}$ et $L' = (L \setminus R_{sel}) \cup L_{sel}$.



Lemme

Soit r et ℓ deux entiers fixés et (R, L) et (R', L') deux (r, ℓ)-partitions d'un graphe G. Alors on peut trouver $L_{sel} \subseteq R$ et $R_{sel} \subseteq L$, tous les deux de taille au plus $r \cdot \ell$ tel que $R' = (R \setminus L_{sel}) \cup R_{sel}$ et $L' = (L \setminus R_{sel}) \cup L_{sel}$.

Un lemme similaire a été prouvé par Feder, Hell, Klein, and Motwani in 2003.

Disjoint $(2,1)$-Vertex Deletion

Entrée : Un graphe $G = (V, E)$, un entier k et un ensemble $S \subseteq V$ tel que :

- $|S| \leq k + 1$
- $G \backslash S$ est une $(2,1)$-graphe.

Paramètre : k.

Sortie : Un ensemble $S' \subseteq V \setminus S$ tel que :

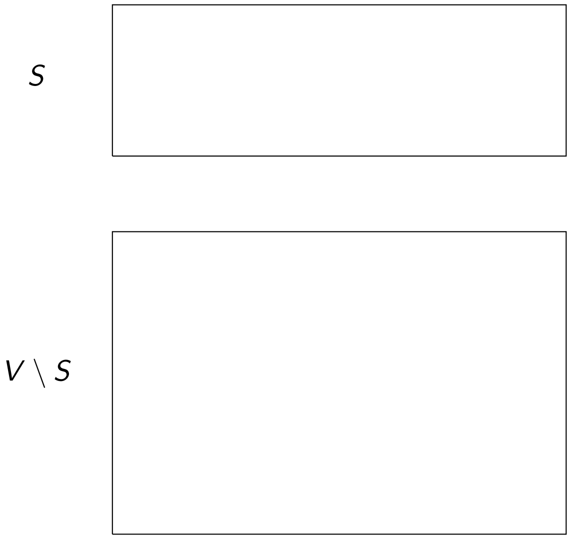
- $|S'| \leq k$
- $G \backslash S'$ est une $(2,1)$-graphe.

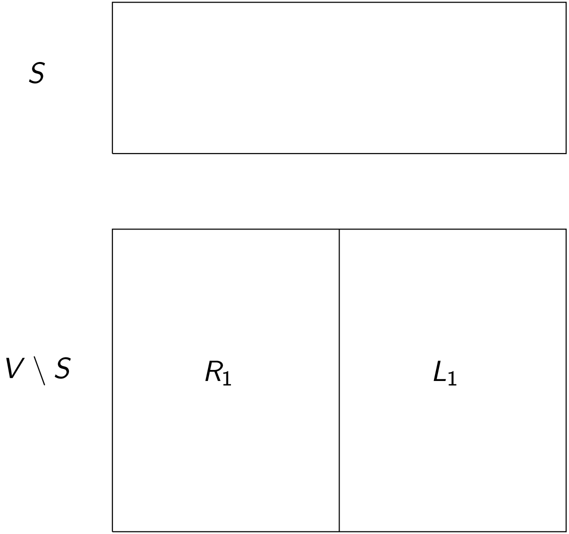
Lemme

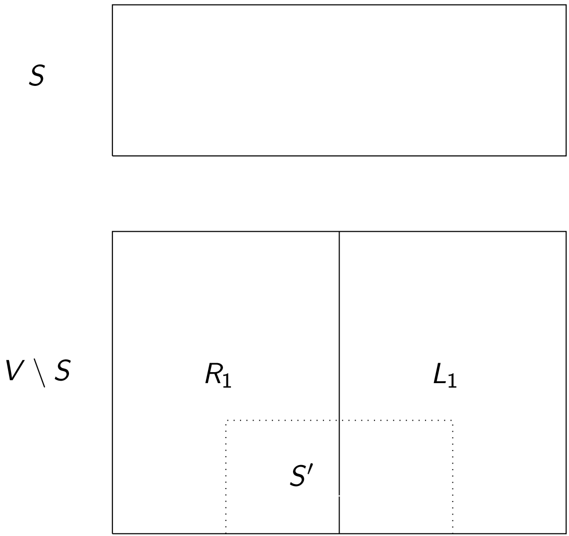
Si Disjoint (2,1)-Vertex Deletion *peut être résolu en temps* $c^k \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$ *pour une certaine constante* c*, alors* (2,1)-Vertex Deletion *peut être résolu en temps* $(c+1)^k \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$ *pour la même constante* c*.*

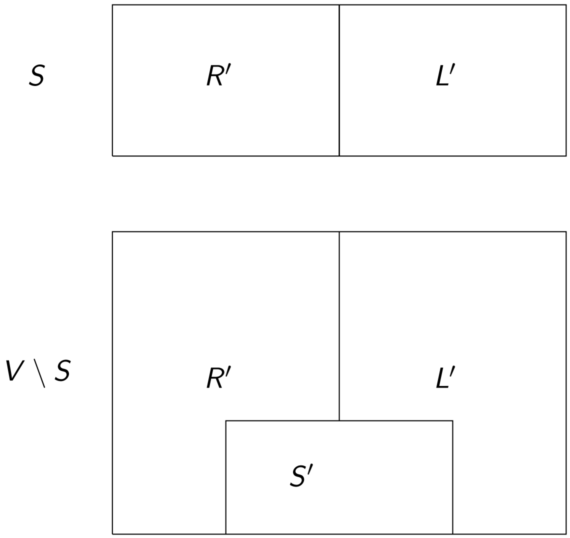
La technique de compression itérative a été introduite par Reed, Smith et Vetta pour leur algorithme pour Odd Cycle Transversal.

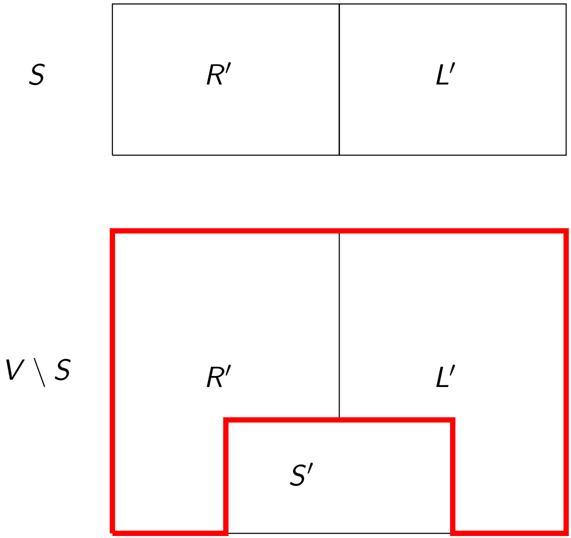

S
$V \setminus S$

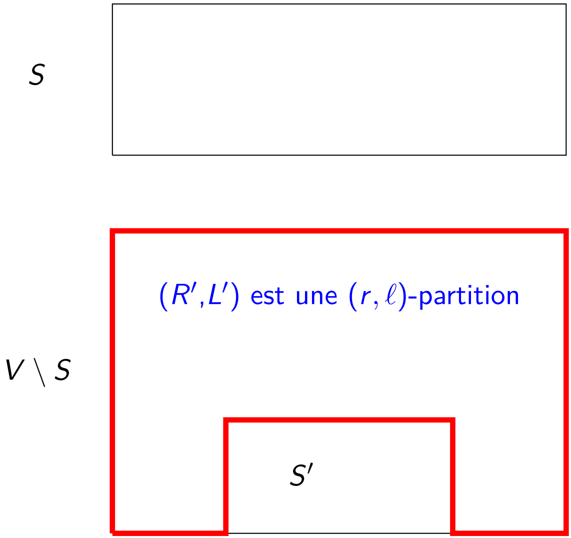

S
$V \setminus S$

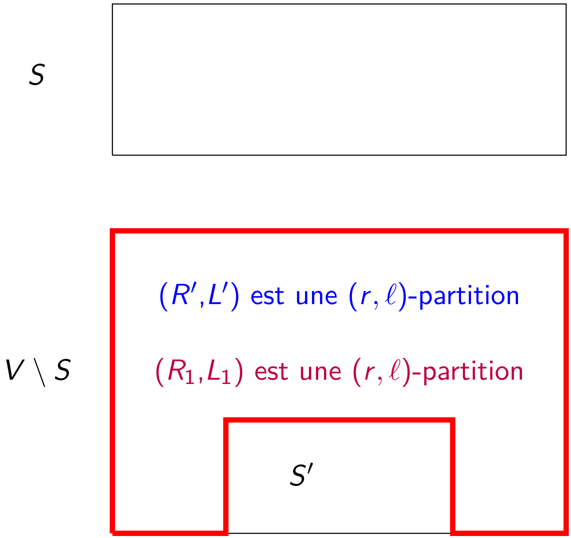

S
V \ S
R1
L1

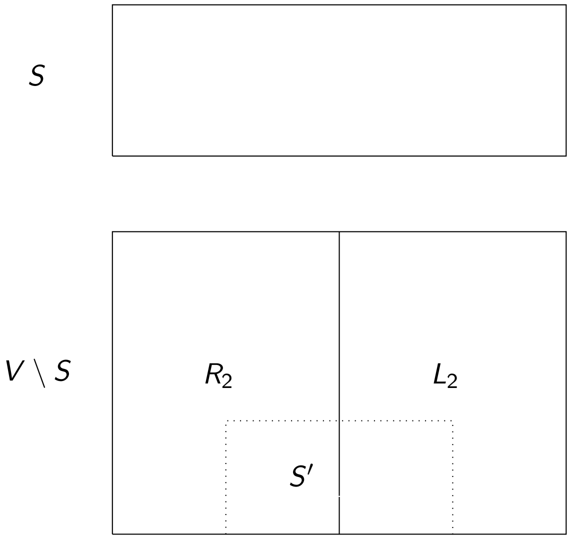

S
$V \setminus S$
R_1
L_1
S'


S
R'
L'
$V \setminus S$
R'
L'
S'


S
R'
L'
V \ S
R'
L'
S'

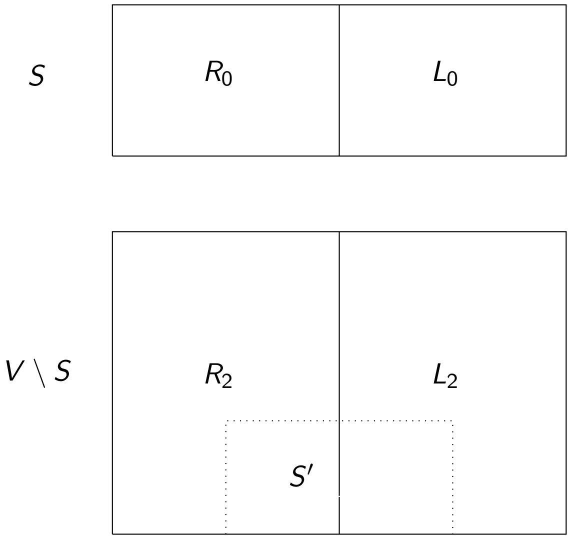

S
(R',L') est une (r,ℓ)-partition
$V \setminus S$
S'


S
$V \setminus S$
(R',L') est une (r, ℓ)-partition
(R_1,L_1) est une (r, ℓ)-partition
S'



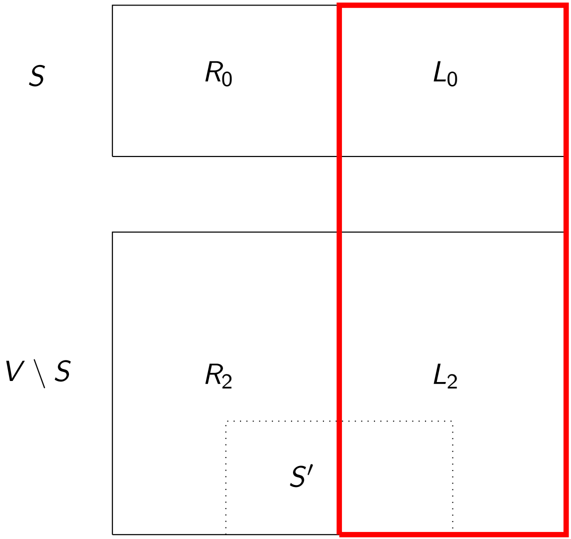
(r, ℓ)-partitions

n^4



(r,ℓ)-partitions

n^4

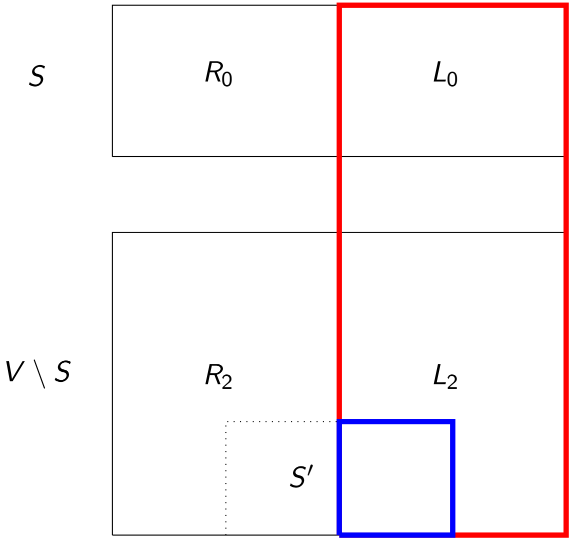


(r, ℓ)-partitions

n^4

$\overline{VC}$

$1.27^k \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$

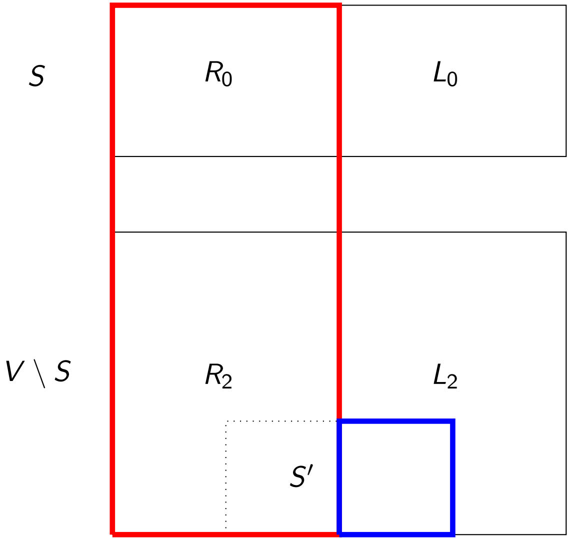


$(r,\ \ell)$-partitions

n^4

$\overline{VC}$

$1.27^k \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$



(r, ℓ)-partitions

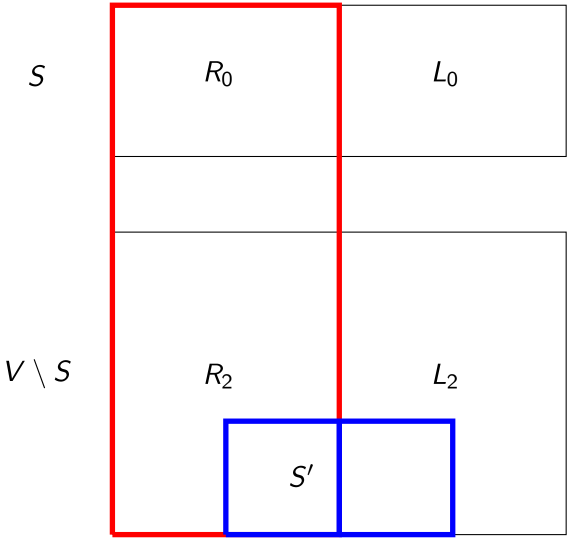
n^4

$\overline{VC}$

$1.27^k \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$

OCT

$2.31^k \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$



(r, ℓ)-partitions

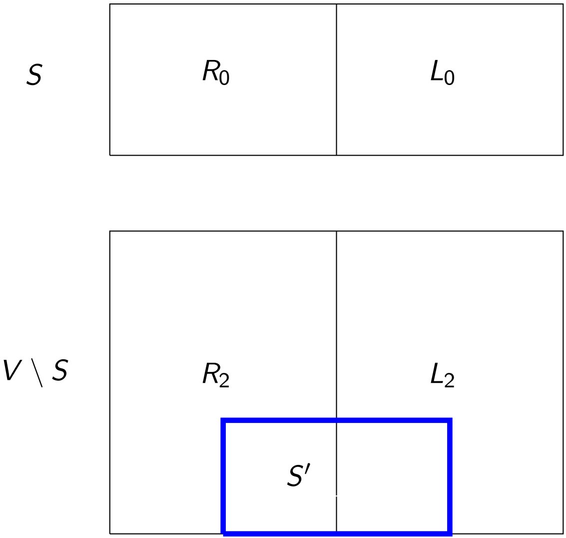
n^4

$\overline{VC}$

$1.27^k \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$

OCT

$2.31^k \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$



(r, ℓ)-partitions

n^4

$\overline{VC}$

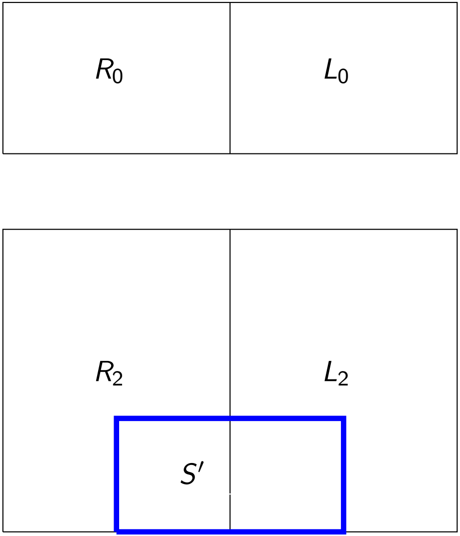
$1.27^k \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$

OCT

$2.31^k \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$

S

$V \setminus S$



(r, ℓ)-partitions
n^4

$\overline{VC}$
$1.27^k \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$

OCT
$2.31^k \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$

$(2, 1)$-VD
$3.31^k \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$

On continu avec...

1. $(r,\ \ell)$-graphes
2. (r,ℓ)-Vertex Deletion
3. Independent (r,ℓ)-Vertex Deletion

INDEPENDENT (r, ℓ)-VERTEX DELETION
Entrée : Un graphe $G = (V, E)$ et un entier k.
Paramètre : k.
Sortie : Un ensemble indépendant $S \subseteq V$ de taille au plus k tel que $G \setminus S$ est un (r, ℓ)-graphe.

3	p-NP-c	p-NP-c	p-NP-c	p-NP-c
2				p-NP-c
1				p-NP-c
0				p-NP-c
ℓ \ r	0	1	2	3

ℓ \ r	0	1	2	3
3	p-NP-c	p-NP-c	p-NP-c	p-NP-c
2				p-NP-c
1				p-NP-c
0	P			p-NP-c

ℓ \ r	0	1	2	3
3	p-NP-c	p-NP-c	p-NP-c	p-NP-c
2				p-NP-c
1				p-NP-c
0	P		IOCT $2^{2^{O(k^2)}}$	p-NP-c

[Marx, O'Sullivan, Razgon 13]

ℓ \ r	0	1	2	3
3	p-NP-c	p-NP-c	p-NP-c	p-NP-c
2	P	P	NP-h	p-NP-c
1	P	P	NP-h	p-NP-c
0	P	IVC P	IOCT $2^{2^{O(k^2)}}$	p-NP-c

ℓ \ r	0	1	2	3
3	p-NP-c	p-NP-c	p-NP-c	p-NP-c
2	P	P	$2^{2^{O(k^2)}}$	p-NP-c
1	P	P	$2^{2^{O(k^2)}}$	p-NP-c
0	P	IVC P	IOCT $2^{2^{O(k^2)}}$	p-NP-c

Théorème

INDEPENDENT ODD CYCLE TRANSVERSAL *est FPT paramétré par la taille de la solution.*

[Marx, O'sullivan, Razgon 15]

Théorème

Independent Odd Cycle Transversal *est FPT paramétré par la taille de la solution.*

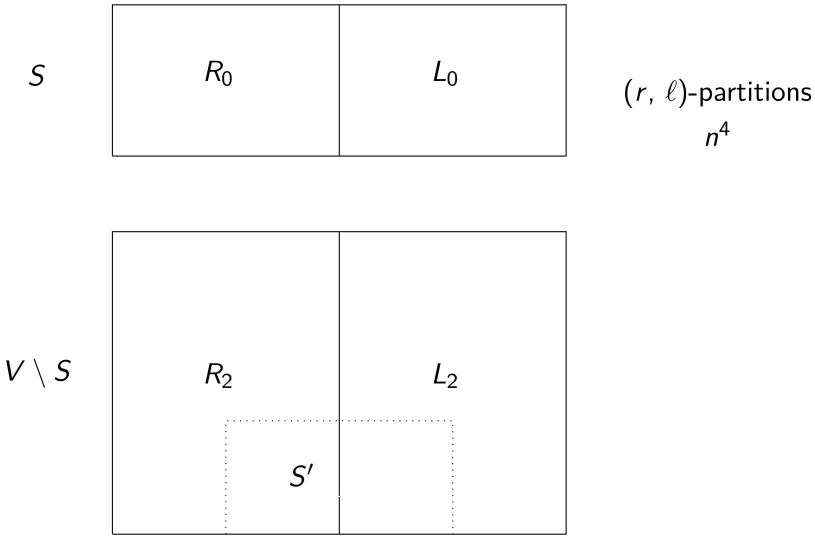
[Marx, O'sullivan, Razgon 15]

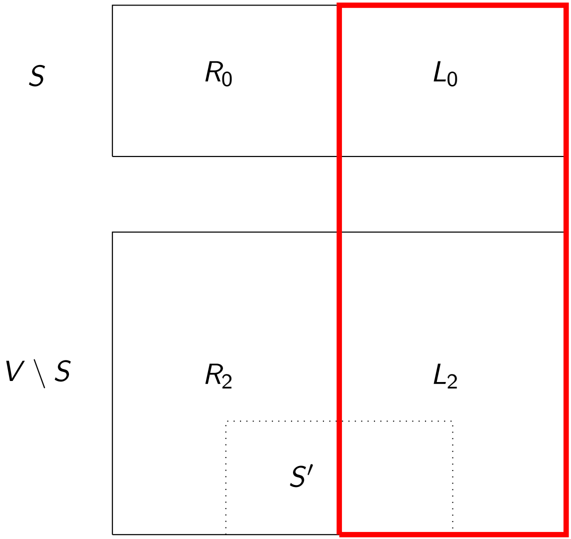
Théorème

Independent Odd Cycle Transversal *peut être résolu en temps* $2^{2^{\mathcal{O}(k^2)}} \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$*, où k désigne la taille de la solution.*

Théorème

Independent $(2, 1)$-vertex Deletion *et* Independent $(2, 2)$-Vertex Deletion *sont FPT.*


S
R_0
L_0
(r, ℓ)-partitions
n^4
$V \setminus S$
R_2
L_2
S'

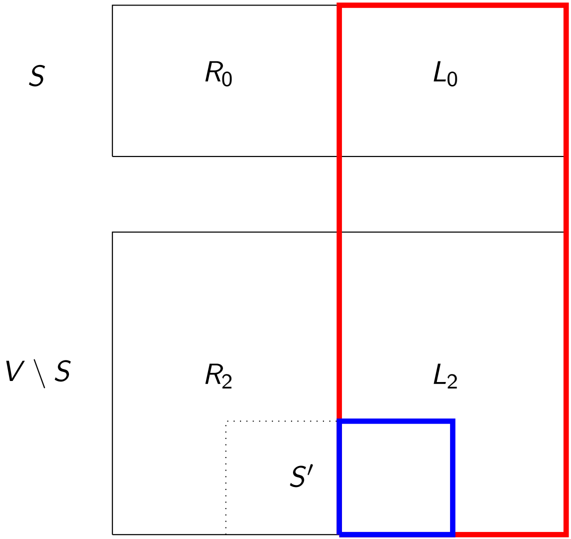


(r, ℓ)-partitions

n^4

$L_0 \cup L_2$ est une clique

n

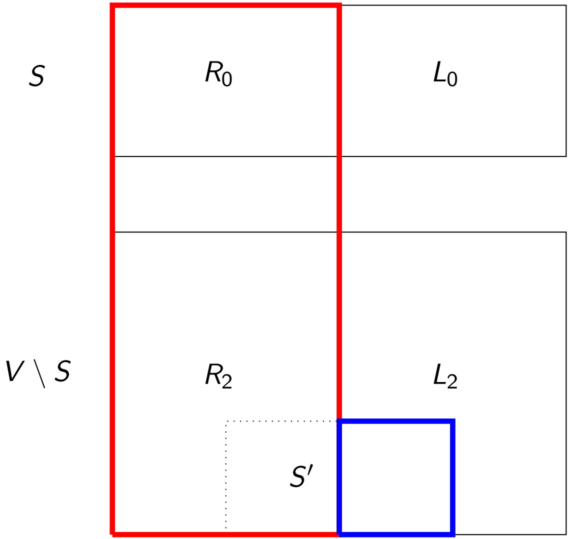


(r, ℓ)-partitions

n^4

$L_0 \cup L_2$ est une clique

n



$(r,\ \ell)$-partitions

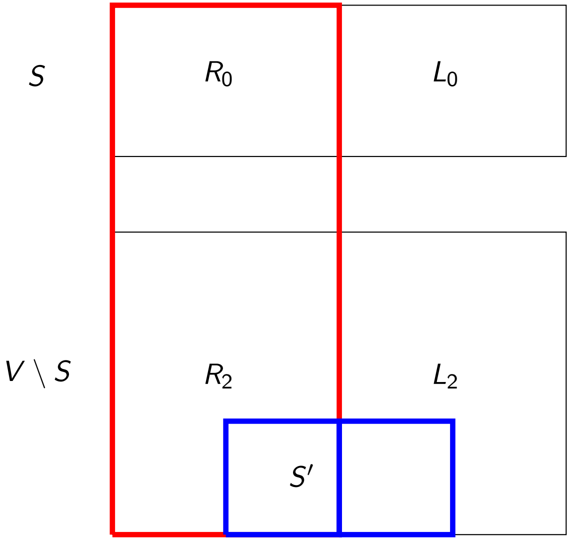
n^4

$L_0 \cup L_2$ est une clique

n

IOCT

$2^{2^{\mathcal{O}(k^2)}} \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$



(r, ℓ)-partitions

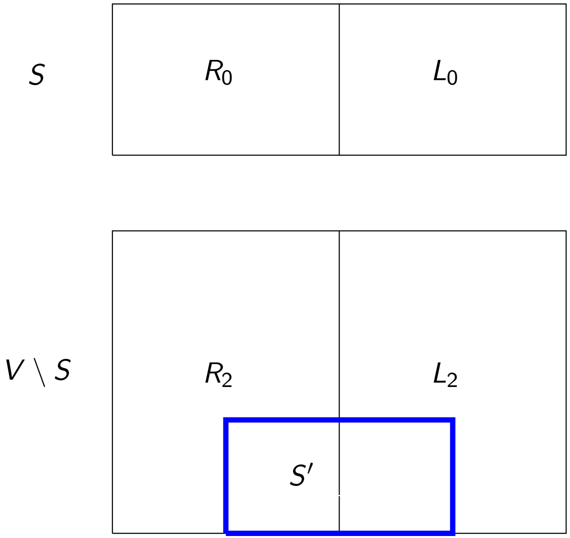
n^4

$L_0 \cup L_2$ est une clique

n

IOCT

$2^{2^{\mathcal{O}(k^2)}} \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$



(r, ℓ)-partitions

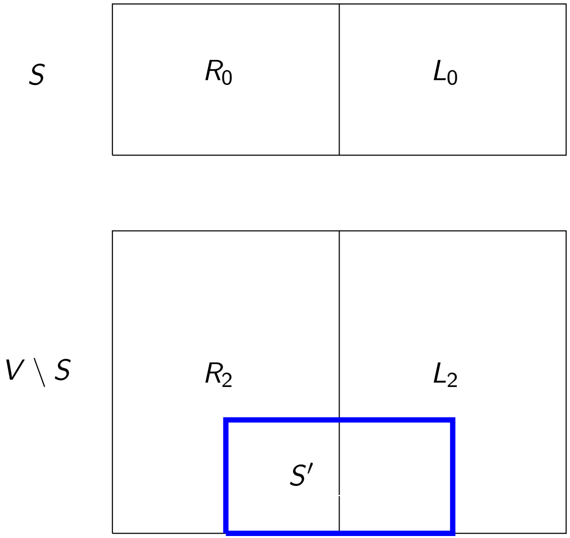
n^4

$L_0 \cup L_2$ est une clique

n

IOCT

$2^{2^{\mathcal{O}(k^2)}} \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$



(r, ℓ)-partitions

n^4

$L_0 \cup L_2$ est une clique

n

IOCT

$2^{2^{\mathcal{O}(k^2)}} \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$

I(2, 1)-VD

$2^{2^{\mathcal{O}(k^2)}} \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$

Perspectives

- Peut-on améliorer le temps d'exécution pour Independent (r,ℓ)-Vertex Deletion?

Perspectives

- Peut-on améliorer le temps d'exécution pour INDEPENDENT (r, ℓ)-VERTEX DELETION?
- Est ce qu'une noyau polynomial pour (r, ℓ)-VERTEX DELETION existe?
  - Il y a un noyau polynomial randomisé pour ODD CYCLE TRANSVERSAL utilisant des matroïdes. [Kratsch, Wahlström 14]

Perspectives

- Peut-on améliorer le temps d'exécution pour Independent (r, ℓ)-Vertex Deletion?
- Est ce qu'une noyau polynomial pour (r, ℓ)-Vertex Deletion existe?
  - Il y a un noyau polynomial randomisé pour Odd Cycle Transversal utilisant des matroïdes. [Kratsch, Wahlström 14]
- Est-ce que $(2, 2)$-Edge Deletion est FPT?
  - $(2, 1)$-Edge Deletion et $(1, 2)$-Edge Deletion sont connus être FPT. [Kolay, Panolan 15]

Merci