Jeu de Coloration
Une stratégie de Bob sur les Cactus

C. Charpentier

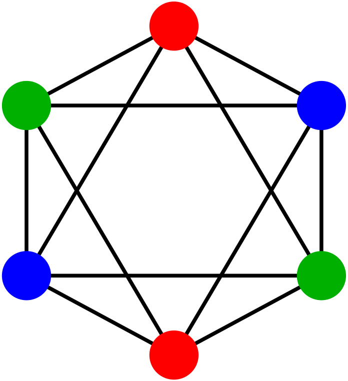
Institut Fourier, Université Joseph Fourier, Grenoble
DISP, RTI, Université de Lyon 2

Journées Graphes & Algorithmes 2015

Définitions

Coloration propre

Une **coloration** d'un graphe est l'attribution d'une couleur à chaque sommet du graphe. Une coloration est dite **propre** si deux voisins adjacents ont des couleurs différentes.



Définitions

Jeu de coloration

Le **jeu de coloration** (sur les sommets) a été introduit par Brams en 1981 et redécouvert en 1991 par Bodlaender.

- Données : un graphe G non colorié et un ensemble de couleurs Φ.
- Alice et Bob jouent à tour de rôle. A chaque tour, ils colorient (proprement) un sommet non-colorié avec une couleur de Φ.
- Alice gagne quand tous les sommets de G sont coloriés proprement, et Bob gagne s'il est impossible de finir la coloration.

Définitions

Jeu de coloration

Le **jeu de coloration** (sur les sommets) a été introduit par Brams en 1981 et redécouvert en 1991 par Bodlaender.

- Données : un graphe G non colorié et un ensemble de couleurs Φ.
- Alice et Bob jouent à tour de rôle. A chaque tour, ils colorient (proprement) un sommet non-colorié avec une couleur de Φ.
- Alice gagne quand tous les sommets de G sont coloriés proprement, et Bob gagne s'il est impossible de finir la coloration.

Définitions
Jeu de coloration

Le **jeu de coloration** (sur les sommets) a été introduit par Brams en 1981 et redécouvert en 1991 par Bodlaender.

- Données : un graphe G non colorié et un ensemble de couleurs Φ.
- Alice et Bob jouent à tour de rôle. A chaque tour, ils colorient (proprement) un sommet non-colorié avec une couleur de Φ.
- Alice gagne quand tous les sommets de G sont coloriés proprement, et Bob gagne s'il est impossible de finir la coloration.

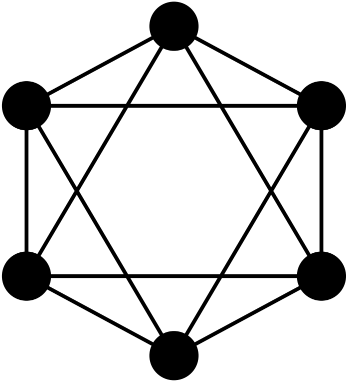
Définitions
Jeu de coloration

Le **jeu de coloration** (sur les sommets) a été introduit par Brams en 1981 et redécouvert en 1991 par Bodlaender.

- Données : un graphe G non colorié et un ensemble de couleurs Φ.
- Alice et Bob jouent à tour de rôle. A chaque tour, ils colorient (proprement) un sommet non-colorié avec une couleur de Φ.
- Alice gagne quand tous les sommets de G sont coloriés proprement, et Bob gagne s'il est impossible de finir la coloration.

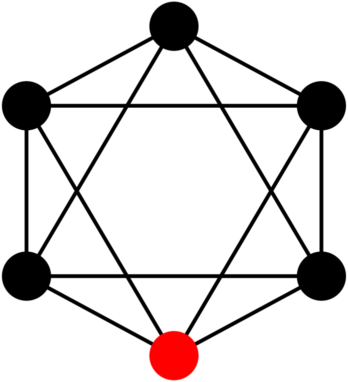
Définitions
Exemple

Une petite partie...



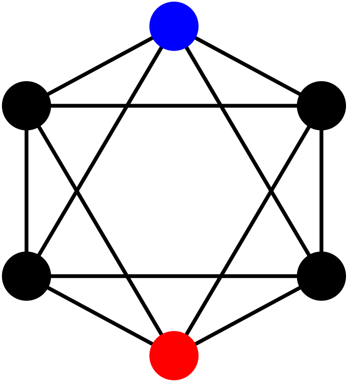
Définitions
Exemple

Une petite partie...



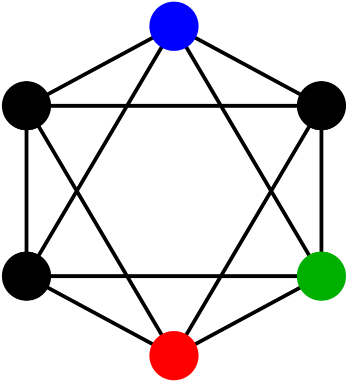
Définitions
Exemple

Une petite partie...



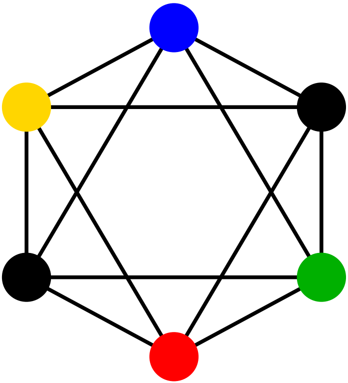
Définitions
Exemple

Une petite partie...



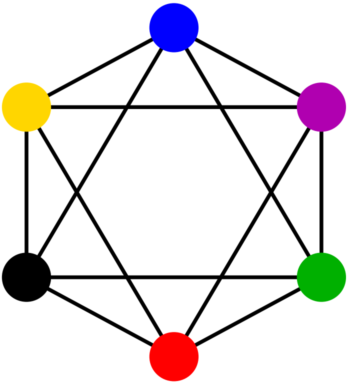
Définitions
Exemple

Une petite partie...



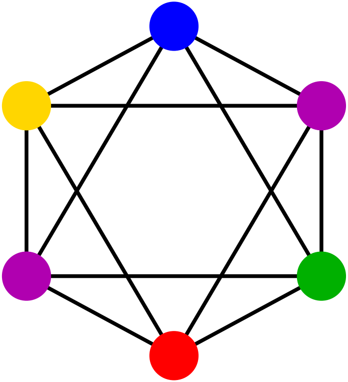
Définitions
Exemple

Une petite partie...



Définitions
Exemple

Une petite partie...



Définitions

Jeu de coloration

Soit G un graphe tel qu'Alice a une strategie gagnante sur G pour k couleurs.

Soit un nombre de couleurs $k' > k$.

Alice a-t'elle une stratégie gagnante sur G pour k' couleurs ?

Définitions

Jeu de coloration

Soit G un graphe tel qu'Alice a
une strategie gagnante sur G pour k couleurs.

Soit un nombre de couleurs $k' > k$.

Alice a-t'elle une stratégie gagnante sur G pour k' couleurs ?

Définitions
Jeu de coloration

Soit G un graphe tel qu'Alice a
une strategie gagnante sur G pour k couleurs.

Soit un nombre de couleurs $k' > k$.

Alice a-t'elle une stratégie gagnante sur G pour k' couleurs ?

Définitions

Jeu de coloration

Soit G un graphe tel qu'Alice a
une strategie gagnante sur G pour k couleurs.

Soit un nombre de couleurs $k' > k$.

Alice a-t'elle une stratégie gagnante sur G pour k' couleurs ?

Définitions
Nombre chromatique ludique

Le plus petit nombre de couleurs pour lequel Alice a une stratégie sur G est le **nombre chromatique ludique** de G, noté $\chi_g(G)$.

Bornes triviales

$\chi(G) \leq \chi_g(G) \leq \Delta(G) + 1$

Définitions

Nombre chromatique ludique

Le plus petit nombre de couleurs pour lequel Alice a une stratégie sur G est le **nombre chromatique ludique** de G, noté $\chi_g(G)$.

Bornes triviales

$\chi(G) \leq \chi_g(G) \leq \Delta(G) + 1$

Définitions
Stratégie d'activation

Théorème

Si F est une forêt, $\chi_g(F) \leq 4$.
[Faigle, Kern, Kierstead, Trotter, 1993]

Via une **Stratégie d'Activation** (voir présentation suivante).

Définitions
Stratégie d'activation

Théorème

Si F est une forêt, $\chi_g(F) \leq 4$.
[Faigle, Kern, Kierstead, Trotter, 1993]

Via une **Stratégie d'Activation** (voir présentation suivante).

Définitions

Jeu de marquage

Le **jeu de marquage** a été introduit par Zhu en 1999.

- Données : un graphe G non colorié et un entier k.
- Alice et Bob jouent à tour de rôle. A chaque tour, ils sélectionnent un sommet qui n'a pas encore été sélectionné.
- Bob gagne si un sommet a au moins k voisins sélectionnés avant lui. Alice gagne si Bob n'a pas gagné quand tous les sommets ont été sélectionnés.

On nomme **nombre de marquage ludique**, noté $col_g(G)$, le plus petit k pour lequel Alice a une stratégie gagnante sur G.

Propriété

Pour tout G, $\chi_g(G) \leq col_g(G)$.

Définitions

Jeu de marquage

Le **jeu de marquage** a été introduit par Zhu en 1999.

- Données : un graphe G non colorié et un entier k.
- Alice et Bob jouent à tour de rôle. A chaque tour, ils sélectionnent un sommet qui n'a pas encore été sélectionné.
- Bob gagne si un sommet a au moins k voisins sélectionnés avant lui. Alice gagne si Bob n'a pas gagné quand tous les sommets ont été sélectionnés.

On nomme **nombre de marquage ludique**, noté $col_g(G)$, le plus petit k pour lequel Alice a une stratégie gagnante sur G.

Propriété

Pour tout G, $\chi_g(G) \leq col_g(G)$.

Définitions

Jeu de marquage

Le **jeu de marquage** a été introduit par Zhu en 1999.

- Données : un graphe G non colorié et un entier k.
- Alice et Bob jouent à tour de rôle. A chaque tour, ils sélectionnent un sommet qui n'a pas encore été sélectionné.
- Bob gagne si un sommet a au moins k voisins sélectionnés avant lui. Alice gagne si Bob n'a pas gagné quand tous les sommets ont été sélectionnés.

On nomme **nombre de marquage ludique**, noté $col_g(G)$, le plus petit k pour lequel Alice a une stratégie gagnante sur G.

Propriété

Pour tout G, $\chi_g(G) \leq col_g(G)$.

Définitions

Jeu de marquage

Le **jeu de marquage** a été introduit par Zhu en 1999.

- Données : un graphe G non colorié et un entier k.
- Alice et Bob jouent à tour de rôle. A chaque tour, ils sélectionnent un sommet qui n'a pas encore été sélectionné.
- Bob gagne si un sommet a au moins k voisins sélectionnés avant lui. Alice gagne si Bob n'a pas gagné quand tous les sommets ont été sélectionnés.

On nomme **nombre de marquage ludique**, noté $col_g(G)$, le plus petit k pour lequel Alice a une stratégie gagnante sur G.

Propriété

Pour tout G, $\chi_g(G) \leq col_g(G)$.

Définitions

Jeu de marquage

Le **jeu de marquage** a été introduit par Zhu en 1999.

- Données : un graphe G non colorié et un entier k.
- Alice et Bob jouent à tour de rôle. A chaque tour, ils sélectionnent un sommet qui n'a pas encore été sélectionné.
- Bob gagne si un sommet a au moins k voisins sélectionnés avant lui. Alice gagne si Bob n'a pas gagné quand tous les sommets ont été sélectionnés.

On nomme **nombre de marquage ludique**, noté $col_g(G)$, le plus petit k pour lequel Alice a une stratégie gagnante sur G.

Propriété

Pour tout G, $\chi_g(G) \leq col_g(G)$.

Définitions

Jeu de marquage

Le **jeu de marquage** a été introduit par Zhu en 1999.

- Données : un graphe G non colorié et un entier k.
- Alice et Bob jouent à tour de rôle. A chaque tour, ils sélectionnent un sommet qui n'a pas encore été sélectionné.
- Bob gagne si un sommet a au moins k voisins sélectionnés avant lui. Alice gagne si Bob n'a pas gagné quand tous les sommets ont été sélectionnés.

On nomme **nombre de marquage ludique**, noté $col_g(G)$, le plus petit k pour lequel Alice a une stratégie gagnante sur G.

Propriété

Pour tout G, $\chi_g(G) \leq col_g(G)$.

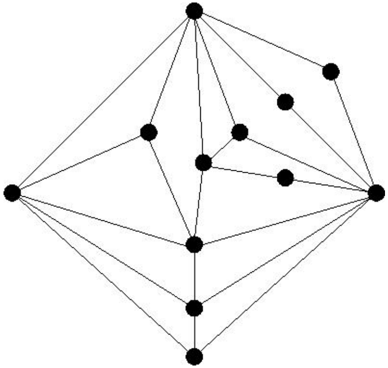
Etat de l'art
Jeu de marquage

En utilisant des **stratégies d'activation**, on prouve :

- Si P est un **graphe planaire**, $col_g(P) \leq 19$. [Zhu, 1999]
- Si P est un graphe planaire, $col_g(P) \leq 18$. [Kierstead, 2000]
- Si P est un graphe planaire, $col_g(P) \leq 17$. [Zhu, 2007]

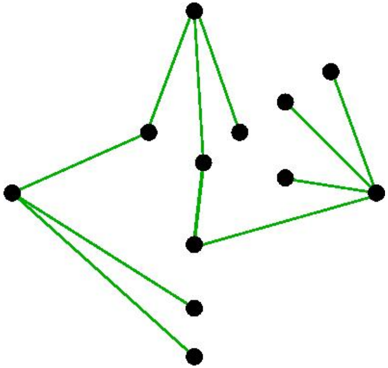
Etat de l'art
Jeu de marquage

Un graphe est dit $(1, k)$-décomposable si on peut partionner ses arêtes en une forêt et un sous-graphe de degré borné.



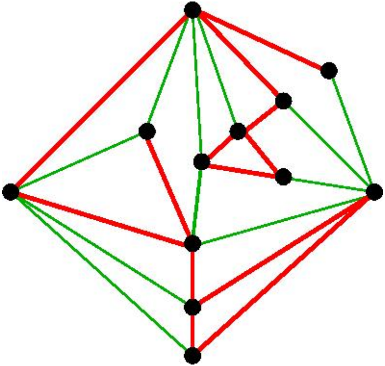
Etat de l'art
Jeu de marquage

Un graphe est dit **$(1, k)$-décomposable** si on peut partionner ses arêtes en une forêt et un sous-graphe de degré borné.



Etat de l'art
Jeu de marquage

Un graphe est dit $(1, k)$-**décomposable** si on peut partionner ses arêtes en une forêt et un sous-graphe de degré borné.



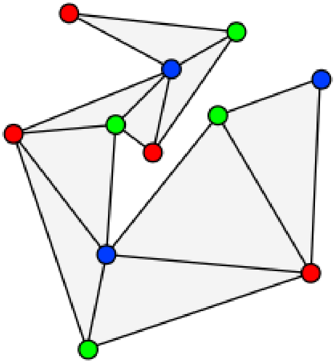
Etat de l'art
Jeu de marquage

Un graphe est dit $(1, k)$-**décomposable** si on peut partionner ses arêtes en une forêt et un sous-graphe de degré borné.

Théorème

Si un graphe est $(1, k)$-décomposable, alors $col_g(G) \leq 4 + k$.
[He, Hou, Lih, Shao, Wang et Zhu, 2002]

Etat de l'art
Jeu de marquage



Si O est un graphe **planaire extérieur**,
alors O est $(1,3)$-décomposable et $col_g(O) \leq 7$.
[Guan, Zhu, 1998]

Etat de l'art

Graphes planaires de maille g

Théorème : Soit G un **graphe planaire** avec $\delta(G) \geq 2$ et de maille g:

- Si $g(G) \geq 5$, alors G est $(1,4)$-décomposable.
- Si $g(G) \geq 7$, alors G est $(1,2)$-décomposable.
- Si $g(G) \geq 11$, alors G est $(1,1)$-décomposable.

[He, Hou, Lih, Shao, Wang et Zhu, 2002]

Etat de l'art

Graphes planaires de maille g

Théorème : Soit G un graphe planaire avec $\delta(G) \geq 2$ et de maille g:

- Si $g(G) \geq 5$, alors G est $(1,4)$-décomposable.
- Si $g(G) \leq 7$, alors G est $(1,2)$-décomposable.
- Si $g(G) \geq 10$, alors G est $(1,1)$-décomposable.

[He, Hou, Lih, Shao, Wang et Zhu, 2002]
[Bassa, Burns, Campbell, Deshpande, Farley, Halsey, Michalakis, Persson, Pylyavskyy, Rademacher, Riehl, Rios, Samuel, Tenner, Vijayasaraty, Zhao, Kleitman, 2004]

Etat de l'art

Graphes planaires de maille g

Théorème : Soit G un **graphe planaire** avec $\delta(G) \geq 2$ et de maille g:

- Si $g(G) \geq 5$, alors G est $(1,4)$-décomposable.
- Si $g(G) \geq 6$, alors G est $(1,2)$-décomposable.
- Si $g(G) \geq 10$, alors G est $(1,1)$-décomposable.

[He, Hou, Lih, Shao, Wang et Zhu, 2002]
[Bassa, Burns, Campbell, Deshpande, Farley, Halsey, Michalakis, Persson, Pylyavskyy, Rademacher, Riehl, Rios, Samuel, Tenner, Vijayasaraty, Zhao, Kleitman, 2004]
[Kleitman, 2006]

Etat de l'art

Graphes planaires de maille g

Théorème : Soit G un **graphe planaire** avec $\delta(G) \geq 2$ et de maille g:

- Si $g(G) \geq 5$, alors G est $(1,4)$-décomposable.
- Si $g(G) \geq 6$, alors G est $(1,2)$-décomposable.
- Si $g(G) \geq 9$, alors G est $(1,1)$-décomposable.

[He, Hou, Lih, Shao, Wang et Zhu, 2002]
[Bassa, Burns, Campbell, Deshpande, Farley, Halsey, Michalakis, Persson, Pylyavskyy, Rademacher, Riehl, Rios, Samuel, Tenner, Vijayasaraty, Zhao, Kleitman, 2004]
[Kleitman, 2006]
[Borodin, 2007]

Etat de l'art

Graphes planaires de maille g

Théorème : Soit G un **graphe planaire** avec $\delta(G) \geq 2$ et de maille g:

- Si $g(G) \geq 5$, alors G est $(1,4)$-décomposable.
- Si $g(G) \geq 6$, alors G est $(1,2)$-décomposable.
- Si $g(G) \geq 8$, alors G est $(1,1)$-décomposable.

[He, Hou, Lih, Shao, Wang et Zhu, 2002]
[Bassa, Burns, Campbell, Deshpande, Farley, Halsey, Michalakis, Persson, Pylyavskyy, Rademacher, Riehl, Rios, Samuel, Tenner, Vijayasaraty, Zhao, Kleitman, 2004]
[Kleitman, 2006]
[Borodin, 2007]
[Wang, Zhang, 2009] [Montassier, Raspaud, Zhu, 2010]

Etat de l'art
Problème

Corollaire

Soit G un **graphe planaire** avec $\delta(G) \geq 2$ et de maille g:

- Si $g(G) \geq 5$, alors $col_g(G) \leq 8$.
- Si $g(G) \geq 6$, alors $col_g(G) \leq 6$.
- Si $g(G) \geq 8$, alors $col_g(G) \leq 5$.

Etat de l'art
Problème

Corollaire

Soit G un **graphe planaire** avec $\delta(G) \geq 2$ et de maille g:

- Si $g(G) \geq 5$, alors $\chi_g(G) \leq 8$.
- Si $g(G) \geq 6$, alors $\chi_g(G) \leq 6$.
- Si $g(G) \geq 8$, alors $\chi_g(G) \leq 5$.

Problème

Peut-on baisser cette borne de 5 ?

Etat de l'art
Problème

Corollaire

Soit G un **graphe planaire** avec $\delta(G) \geq 2$ et de maille g:

- Si $g(G) \geq 5$, alors $\chi_g(G) \leq 8$.
- Si $g(G) \geq 6$, alors $\chi_g(G) \leq 6$.
- Si $g(G) \geq 8$, alors $\chi_g(G) \leq 5$.

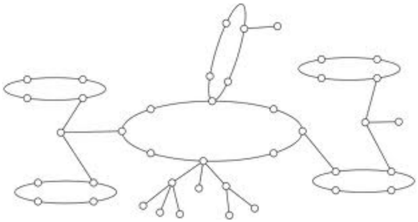
Problème

Peut-on baisser cette borne de 5 ?

Etat de l'Art
Cactus

Définition

Les **cactus** sont des graphes où chaque arête appartient à au plus un cycle.



Etat de l'Art
Cactus

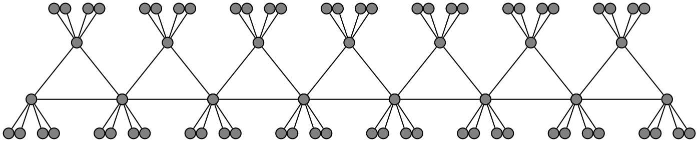
Théorème

Il existe des cactus C avec $\chi_g(C) = 5$. [Sidorowicz, 2007]

Etat de l'Art
Cactus

Théorème

Il existe des cactus C avec $\chi_g(C) = 5$. [Sidorowicz, 2007]



Contribution

Notre résultat

Que peut-on dire des cactus moins denses ?

Théorème

Pour tous entiers m, d, il existe un cactus

- de maille m et de cycle-distance d,
- dont le nombre chromatique ludique est 5.

Contribution
Notre résultat

Que peut-on dire des cactus moins denses ?

Théorème

Pour tous entiers m, d, il existe un cactus

- de maille m et de cycle-distance d,
- dont le nombre chromatique ludique est 5.

Contribution

Notre résultat

Que peut-on dire des cactus moins denses ?

Théorème

Pour tous entiers m, d, il existe un cactus

- de maille m et de cycle-distance d,
- dont le nombre chromatique ludique est 5.

Contribution
Notre résultat

Que peut-on dire des cactus moins denses ?

Théorème

Pour tous entiers m, d, il existe un cactus

- de maille m et de cycle-distance d,
- dont le nombre chromatique ludique est 5.

Preuve

Données du problème

- Alice et Bob jouent sur un cactus C avec les couleurs $\mathcal{C}$.
- Chaque sommet a un nombre arbitrairement grand de feuilles.
- Bob joue uniquement sur les feuilles.
- Alice ne joue pas sur les feuilles.
- On cherche des **configurations bloquantes**:
  - Configurations gagnantes pour Bob quand c'est à Alice de jouer.

Preuve
Données du problème

- Alice et Bob jouent sur un cactus C avec les couleurs $\mathcal{C}$.
- Chaque sommet a un nombre arbitrairement grand de feuilles.
- Bob joue uniquement sur les feuilles.
- Alice ne joue pas sur les feuilles.
- On cherche des **configurations bloquantes**:
  - Configurations gagnantes pour Bob quand c'est à Alice de jouer.

Preuve
Données du problème

- Alice et Bob jouent sur un cactus C avec les couleurs $\mathcal{C}$.
- Chaque sommet a un nombre arbitrairement grand de feuilles.
- Bob joue uniquement sur les feuilles.
- Alice ne joue pas sur les feuilles.
- On cherche des **configurations bloquantes**:
  - Configurations gagnantes pour Bob quand c'est à Alice de jouer.

Preuve

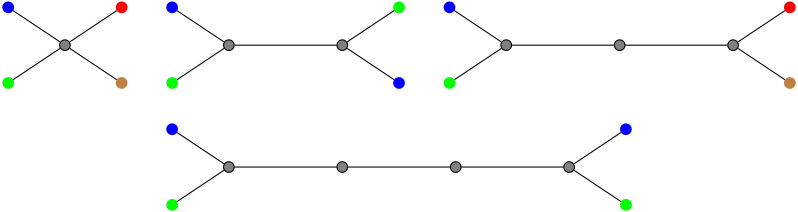
Données du problème

- Alice et Bob jouent sur un cactus C avec les couleurs $\mathcal{C}$.
- Chaque sommet a un nombre arbitrairement grand de feuilles.
- Bob joue uniquement sur les feuilles.
- Alice ne joue pas sur les feuilles.
- On cherche des **configurations bloquantes**:
  - Configurations gagnantes pour Bob quand c'est à Alice de jouer.

Preuve
Données du problème

- Alice et Bob jouent sur un cactus C avec les couleurs $\mathcal{C}$.
- Chaque sommet a un nombre arbitrairement grand de feuilles.
- Bob joue uniquement sur les feuilles.
- Alice ne joue pas sur les feuilles.
- On cherche des **configurations bloquantes**:
  - Configurations gagnantes pour Bob quand c'est à Alice de jouer.

Preuve
Chemins bloquants



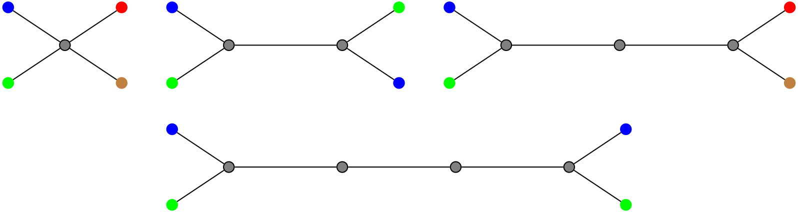
Lemme

Un chemin $u_0, \ldots, u_p$ est bloquant ssi :

- $|\mathcal{C}(u_0)| = |\mathcal{C}(u_p)| = 2$ et
  - p est pair et $\mathcal{C}(u_0) + \mathcal{C}(u_p) = \mathcal{C}$, ou
  - p est impair et $\mathcal{C}(u_0) = \mathcal{C}(u_p)$.

Preuve

Chemins bloquants



Lemme

Un chemin $u_0, \ldots, u_p$ est bloquant ssi :

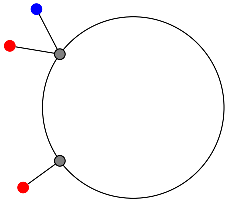
- $|\mathcal{C}(u_0)| = |\mathcal{C}(u_p)| = 2$ et
  - p est pair et $\mathcal{C}(u_0) + \mathcal{C}(u_p) = \mathcal{C}$, ou
  - p est impair et $\mathcal{C}(u_0) = \mathcal{C}(u_p)$.

Preuve
Cycles bloquants

Lemme

Un cycle **de longueur impaire** est bloquant ssi,
pour deux sommets voisins u_0 et u_1:

- $|\mathcal{C}(u_0)| = 2$, $|\mathcal{C}(u_1)| = 1$ et
- $\mathcal{C}(u_1) \subset \mathcal{C}(u_0)$.

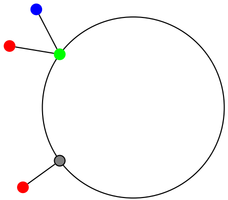


Preuve
Cycles bloquants

Lemme

Un cycle **de longueur impaire** est bloquant ssi, pour deux sommets voisins u_0 et u_1:

- $|\mathcal{C}(u_0)| = 2$, $|\mathcal{C}(u_1)| = 1$ et
- $\mathcal{C}(u_1) \subset \mathcal{C}(u_0)$.

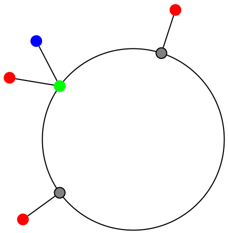


Preuve
Cycles bloquants

Lemme

Un cycle **de longueur impaire** est bloquant ssi, pour deux sommets voisins u_0 et u_1:

- $|\mathcal{C}(u_0)| = 2$, $|\mathcal{C}(u_1)| = 1$ et
- $\mathcal{C}(u_1) \subset \mathcal{C}(u_0)$.

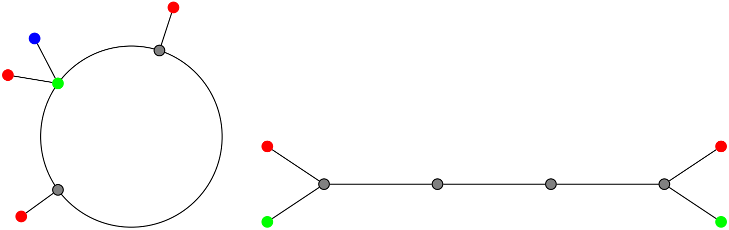


Preuve
Cycles bloquants

Lemme

Un cycle **de longueur impaire** est bloquant ssi, pour deux sommets voisins u_0 et u_1:

- $|\mathcal{C}(u_0)| = 2$, $|\mathcal{C}(u_1)| = 1$ et
- $\mathcal{C}(u_1) \subset \mathcal{C}(u_0)$.

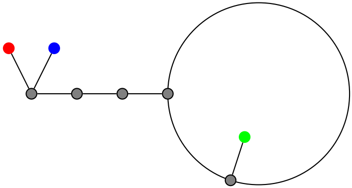


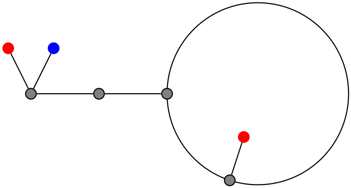
Preuve
Chemin-cycles bloquants

Lemme

Un **chemin-cycle** (impair) $u_0, \ldots, u_d, w$ est bloquant ssi

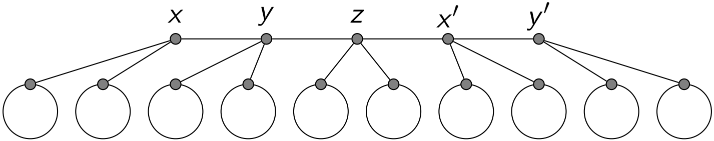
- $|\mathcal{C}(u_0)| = 2$, $|\mathcal{C}(w)| = 1$ et
  - d est pair et $\mathcal{C}(w) \subset \mathcal{C}(u_0)$, ou
  - d est impair et $\mathcal{C}(w) \not\subset \mathcal{C}(u_0)$.



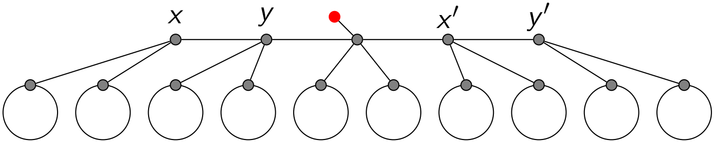


Preuve

Construction finale

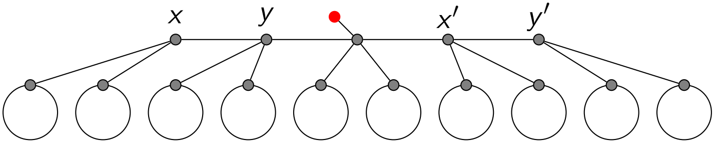


Preuve
Etape 1



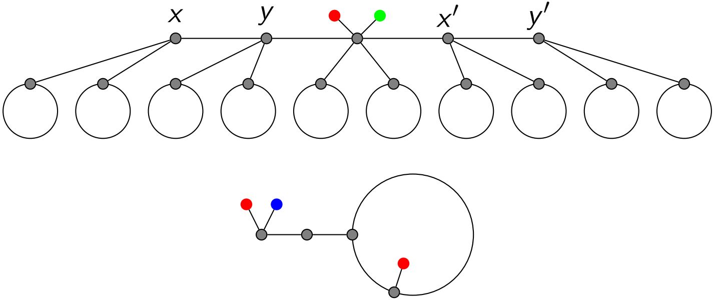
Coup fantôme : 1

Preuve
Etape 1



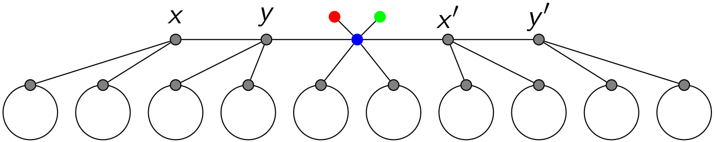
Coup fantôme : 1

Preuve
Etape 1



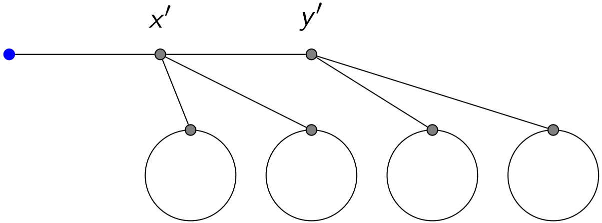
Coup fantôme : 1

Preuve
Etape 1



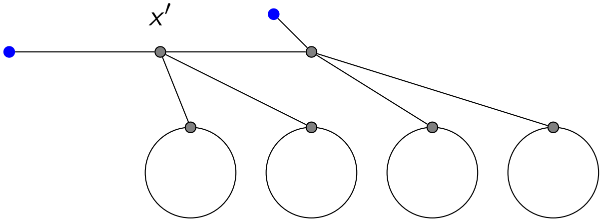
Coup fantôme : 1

Preuve
Etape 1



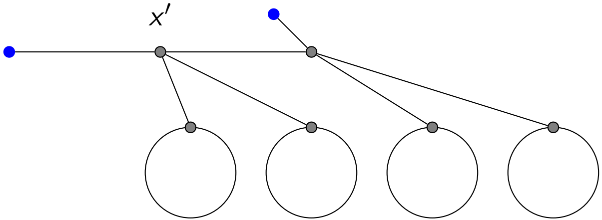
Coup fantôme : 0

Preuve
Etape 2



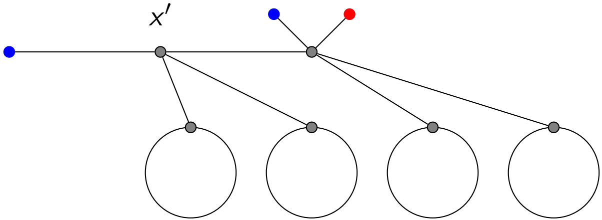
Coup fantôme : 1 (mais pas x').

Preuve
Etape 2



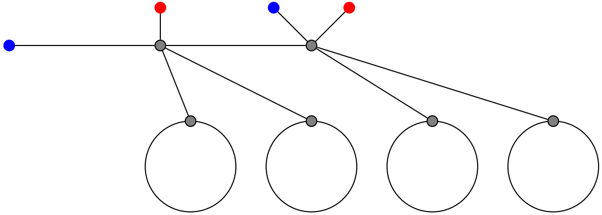
Coup fantôme : 1 (mais pas x').

Preuve
Etape 2



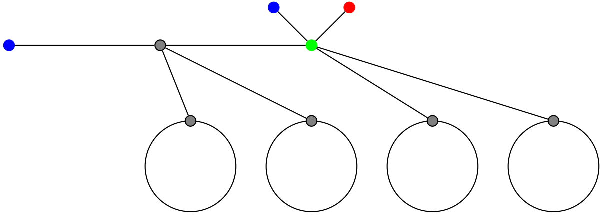
Coup fantôme : 1 (mais pas x').

Preuve
Etape 2



Coup fantôme : 1 (mais pas x').

Preuve
Etape 2



Coup fantôme : 1 (mais pas x').

Problèmes ouverts

Théorème

Il existe des cactus de maille *m* et de cycle-distance *d* avec $\chi_g = 5$ pour tout *m* et *d*.

- Pour les cactus bipartis ?
- Pour les graphes planaires bipartis de grande maille ?

Problèmes ouverts

Théorème

Il existe des cactus de maille m et de cycle-distance d avec $\chi_g = 5$ pour tout m et d.

- Pour les cactus bipartis ?
- Pour les graphes planaires bipartis de grande maille ?

Problèmes ouverts

Théorème

Il existe des cactus de maille m et de cycle-distance d avec $\chi_g = 5$ pour tout m et d.

- Pour les cactus bipartis ?
- Pour les graphes planaires bipartis de grande maille ?

Merci !