

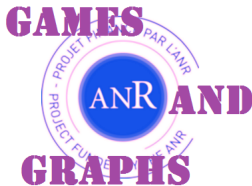
Jeu 0.33 dans les graphes

Pierre Coupechoux
Projet ANR GAG

LAAS

6 novembre 2015

LAAS-CNRS



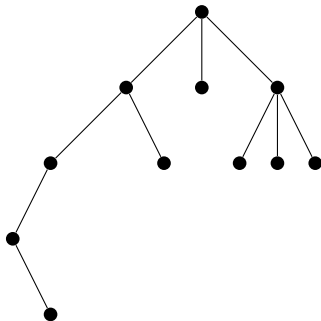
0.33

0.33

- Enlever deux sommets voisins sans déconnecter

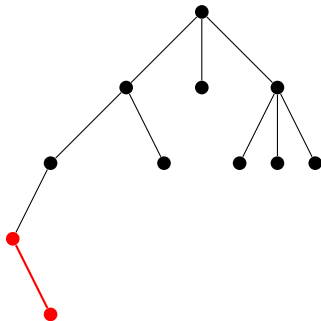
0.33

- Enlever deux sommets voisins sans déconnecter



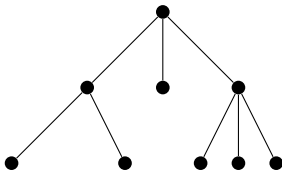
0.33

- Enlever deux sommets voisins sans déconnecter



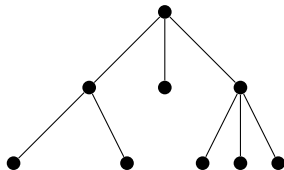
0.33

- Enlever deux sommets voisins sans déconnecter



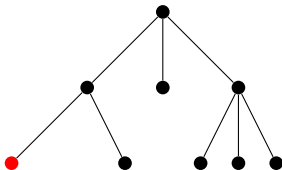
0.33

- Enlever deux sommets voisins sans déconnecter
- Enlever un sommet sans déconnecter



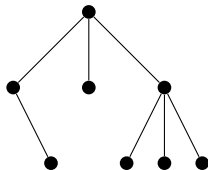
0.33

- Enlever deux sommets voisins sans déconnecter
- Enlever un sommet sans déconnecter

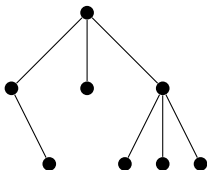


0.33

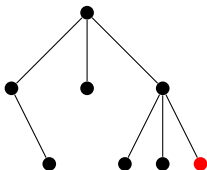
- Enlever deux sommets voisins sans déconnecter
- Enlever un sommet sans déconnecter



- Toujours possible d'enlever un sommet

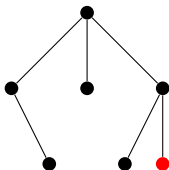


- Toujours possible d'enlever un sommet



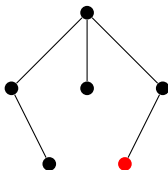
Fin de la partie

- Toujours possible d'enlever un sommet

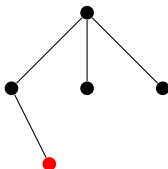


Fin de la partie

- Toujours possible d'enlever un sommet

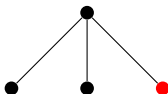


- Toujours possible d'enlever un sommet



Fin de la partie

- Toujours possible d'enlever un sommet



Fin de la partie

- Toujours possible d'enlever un sommet



Fin de la partie

- Toujours possible d'enlever un sommet



Fin de la partie

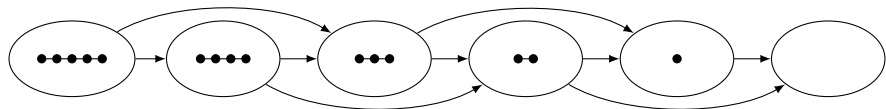
- Toujours possible d'enlever un sommet



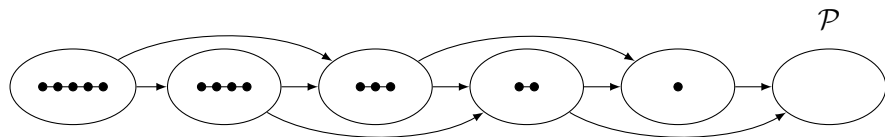
Fin de la partie

- Toujours possible d'enlever un sommet
- Fin de partie \rightarrow graphe vide

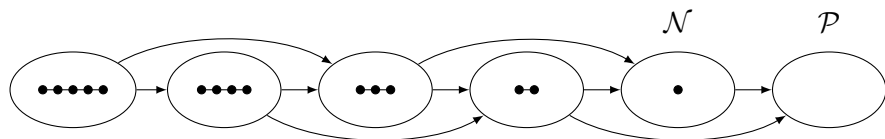
Chaînes



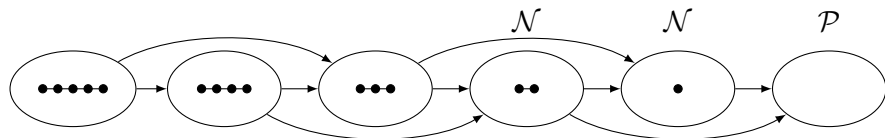
Chaînes



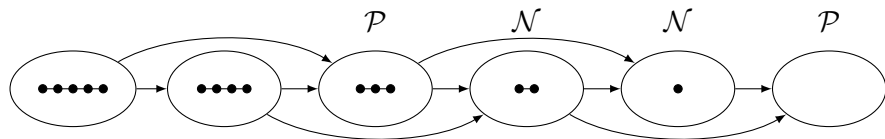
Chaînes



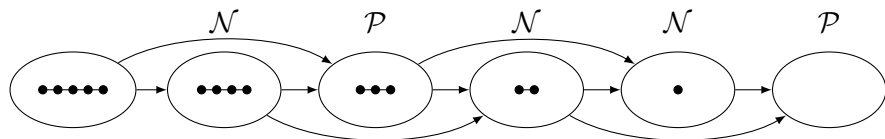
Chaînes



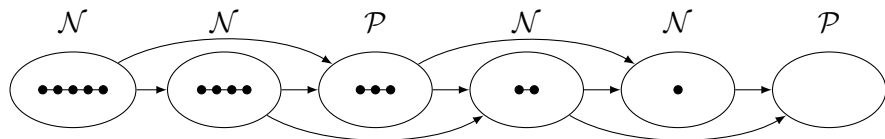
Chaînes



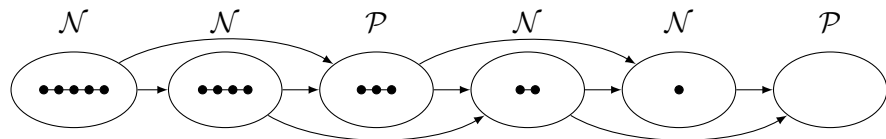
Chaînes



Chaînes

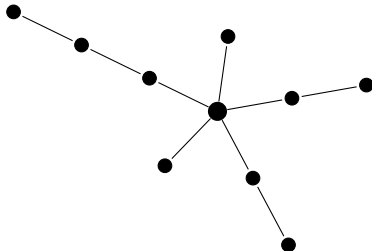


Chaînes

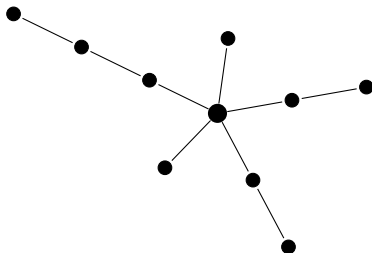


- $n \bmod 3 = 0 \rightarrow$ Perdant
- $n \bmod 3 \neq 0 \rightarrow$ Gagnant

Étoiles subdivisées



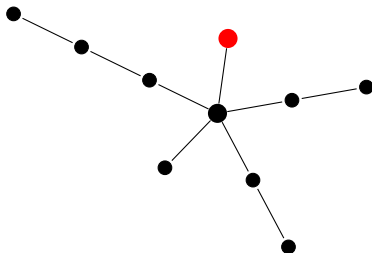
Étoiles subdivisées



Lemme

Si une étoile subdivisée est gagnante, il existe un coup gagnant qui ne retire pas le centre .

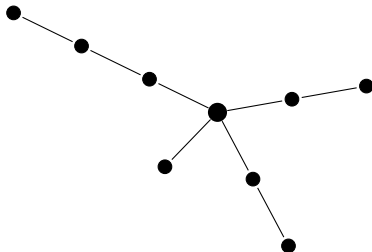
Étoiles subdivisées



Lemme

Si une étoile subdivisée est gagnante, il existe un coup gagnant qui ne retire pas le centre

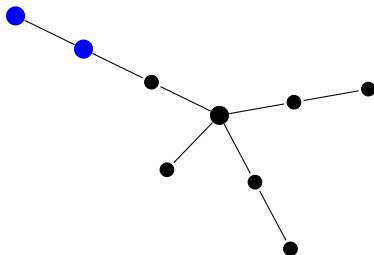
Étoiles subdivisées



Lemme

Si une étoile subdivisée est gagnante, il existe un coup gagnant qui ne retire pas le centre

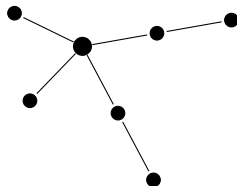
Étoiles subdivisées



Lemme

Si une étoile subdivisée est gagnante, il existe un coup gagnant qui ne retire pas le centre .

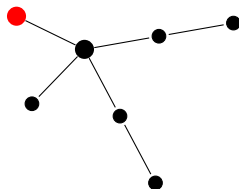
Étoiles subdivisées



Lemme

Si une étoile subdivisée est gagnante, il existe un coup gagnant qui ne retire pas le centre .

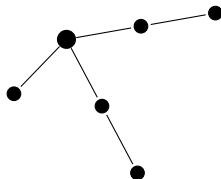
Étoiles subdivisées



Lemme

Si une étoile subdivisée est gagnante, il existe un coup gagnant qui ne retire pas le centre

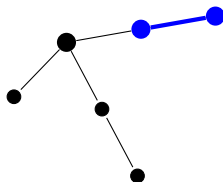
Étoiles subdivisées



Lemme

Si une étoile subdivisée est gagnante, il existe un coup gagnant qui ne retire pas le centre .

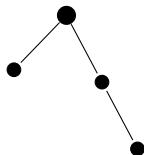
Étoiles subdivisées



Lemme

Si une étoile subdivisée est gagnante, il existe un coup gagnant qui ne retire pas le centre .

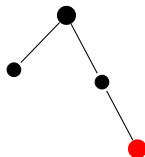
Étoiles subdivisées



Lemme

Si une étoile subdivisée est gagnante, il existe un coup gagnant qui ne retire pas le centre .

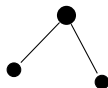
Étoiles subdivisées



Lemme

Si une étoile subdivisée est gagnante, il existe un coup gagnant qui ne retire pas le centre

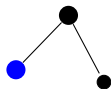
Étoiles subdivisées



Lemme

Si une étoile subdivisée est gagnante, il existe un coup gagnant qui ne retire pas le centre .

Étoiles subdivisées



Lemme

Si une étoile subdivisée est gagnante, il existe un coup gagnant qui ne retire pas le centre .

Étoiles subdivisées



Lemme

Si une étoile subdivisée est gagnante, il existe un coup gagnant qui ne retire pas le centre .

Étoiles subdivisées



Lemme

Si une étoile subdivisée est gagnante, il existe un coup gagnant qui ne retire pas le centre, sauf si cela vide le graphe.

Étoiles subdivisées

Lemme

Si une étoile subdivisée est gagnante, il existe un coup gagnant qui ne retire pas le centre, sauf si cela vide le graphe.

Réduction modulo 3

Théorème

Allonger ou raccourcir une branche d'une étoile subdivisée de 3 donne un graphe équivalent.

Réduction modulo 3

Théorème

Allonger ou raccourcir une branche d'une étoile subdivisée de 3 donne un graphe équivalent.

Équivalence

Deux graphes sont équivalents si la somme des deux est perdante.

Réduction modulo 3

Théorème

Allonger ou raccourcir une branche d'une étoile subdivisée de 3 donne un graphe équivalent.

Équivalence

Deux graphes sont équivalents si la somme des deux est perdante.

Somme de jeux

La somme des deux jeux G_1 et G_2 est le jeu dans lequel on peut jouer dans G_1 ou dans G_2 . Le perdant est celui qui ne peut plus jouer, dans aucun des jeux.

- Soit G une étoile subdivisée, et G' une copie de G à laquelle on a ajouté un P_3 à une feuille ou au centre.

Preuve

- Soit G une étoile subdivisée, et G' une copie de G à laquelle on a ajouté un P_3 à une feuille ou au centre.
- $G+G'$ est perdant

Preuve

- Soit G une étoile subdivisée, et G' une copie de G à laquelle on a ajouté un P_3 à une feuille ou au centre.
- $G+G'$ est perdant
- Preuve par induction

Preuve

- Soit G une étoile subdivisée, et G' une copie de G à laquelle on a ajouté un P_3 à une feuille ou au centre.
- $G+G'$ est perdant
- Preuve par induction
- Cas de base :

- Soit G une étoile subdivisée, et G' une copie de G à laquelle on a ajouté un P_3 à une feuille ou au centre.
- $G+G'$ est perdant
- Preuve par induction
- Cas de base :
 - Vide + $P_3 = P_3 \rightarrow$ Perdant

- Soit G une étoile subdivisée, et G' une copie de G à laquelle on a ajouté un P_3 à une feuille ou au centre.
- $G+G'$ est perdant
- Preuve par induction
- Cas de base :
 - Vide + $P_3 = P_3 \rightarrow$ Perdant
 - $P_1 + P_4$



- Soit G une étoile subdivisée, et G' une copie de G à laquelle on a ajouté un P_3 à une feuille ou au centre.
- $G+G'$ est perdant
- Preuve par induction
- Cas de base :
 - Vide + $P_3 = P_3 \rightarrow$ Perdant
 - $P_1 + P_4$



- Soit G une étoile subdivisée, et G' une copie de G à laquelle on a ajouté un P_3 à une feuille ou au centre.
- $G+G'$ est perdant
- Preuve par induction
- Cas de base :
 - Vide + $P_3 = P_3 \rightarrow$ Perdant
 - $P_1 + P_4$



- Soit G une étoile subdivisée, et G' une copie de G à laquelle on a ajouté un P_3 à une feuille ou au centre.
- $G+G'$ est perdant
- Preuve par induction
- Cas de base :
 - Vide + $P_3 = P_3 \rightarrow$ Perdant
 - $P_1 + P_4$



- Soit G une étoile subdivisée, et G' une copie de G à laquelle on a ajouté un P_3 à une feuille ou au centre.
- $G+G'$ est perdant
- Preuve par induction
- Cas de base :
 - Vide + $P_3 = P_3 \rightarrow$ Perdant
 - $P_1 + P_4$



- Soit G une étoile subdivisée, et G' une copie de G à laquelle on a ajouté un P_3 à une feuille ou au centre.
- $G+G'$ est perdant
- Preuve par induction
- Cas de base :
 - Vide + $P_3 = P_3 \rightarrow$ Perdant
 - $P_1 + P_4$



- Soit G une étoile subdivisée, et G' une copie de G à laquelle on a ajouté un P_3 à une feuille ou au centre.
- $G+G'$ est perdant
- Preuve par induction
- Cas de base :
 - $Vide + P_3 = P_3 \rightarrow$ Perdant
 - $P_1 + P_4$



- Soit G une étoile subdivisée, et G' une copie de G à laquelle on a ajouté un P_3 à une feuille ou au centre.
- $G+G'$ est perdant
- Preuve par induction
- Cas de base :
 - Vide + $P_3 = P_3 \rightarrow$ Perdant
 - $P_1 + P_4$



- Soit G une étoile subdivisée, et G' une copie de G à laquelle on a ajouté un P_3 à une feuille ou au centre.
- $G+G'$ est perdant
- Preuve par induction
- Cas de base :
 - Vide + $P_3 = P_3 \rightarrow$ Perdant
 - $P_1 + P_4$

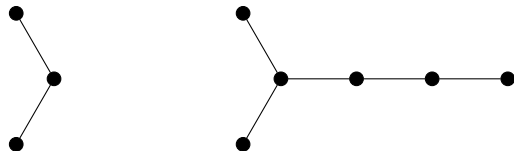


- Soit G une étoile subdivisée, et G' une copie de G à laquelle on a ajouté un P_3 à une feuille ou au centre.
- $G+G'$ est perdant
- Preuve par induction
- Cas de base :
 - Vide + $P_3 = P_3 \rightarrow$ Perdant
 - $P_1 + P_4$



- Soit G une étoile subdivisée, et G' une copie de G à laquelle on a ajouté un P_3 à une feuille ou au centre.
- $G+G'$ est perdant
- Preuve par induction
- Cas de base :
 - Vide + $P_3 = P_3 \rightarrow$ Perdant
 - $P_1 + P_4$
 - $P_2 + P_5$

- Soit G une étoile subdivisée, et G' une copie de G à laquelle on a ajouté un P_3 à une feuille ou au centre.
- $G+G'$ est perdant
- Preuve par induction
- Cas de base :
 - Vide + $P_3 = P_3 \rightarrow$ Perdant
 - $P_1 + P_4$
 - $P_2 + P_5$
 - G est une étoile à deux branches.



Preuve

- Soit G une étoile subdivisée, et G' une copie de G à laquelle on a ajouté un P_3 à une feuille ou au centre.
- $G+G'$ est perdant
- Preuve par induction
- Cas de base
- Cas général

- Soit G une étoile subdivisée, et G' une copie de G à laquelle on a ajouté un P_3 à une feuille ou au centre.
- $G+G'$ est perdant
- Preuve par induction
- Cas de base
- Cas général
 - Le coup de mon adversaire ne prend pas le sommet.

- Soit G une étoile subdivisée, et G' une copie de G à laquelle on a ajouté un P_3 à une feuille ou au centre.
- $G+G'$ est perdant
- Preuve par induction
- Cas de base
- Cas général
 - Le coup de mon adversaire ne prend pas le sommet.
 - S'il prend une partie du P_3 rajouté, je prends le reste.

- Soit G une étoile subdivisée, et G' une copie de G à laquelle on a ajouté un P_3 à une feuille ou au centre.
- $G+G'$ est perdant
- Preuve par induction
- Cas de base
- Cas général
 - Le coup de mon adversaire ne prend pas le sommet.
 - S'il prend une partie du P_3 rajouté, je prends le reste.
 - Sinon, je copie son coup dans l'autre graphe.

Résolution des étoiles subdivisées

		Taille 2									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	
Total	0	N									
	1	N	P								
	2	P	N	N							
	3	N	N	P	N						
	4	P	N	N	N	P					
	5	N	N	P	N	N	N				
	6	P	N	N	N	P	N	P			
	7	N	N	P	N	N	N	N	N		
	8	P	N	N	N	P	N	P	N	P	

Grundy

Valeur de Grundy

Grundy

Valeur de Grundy

- $g(\emptyset) = 0$

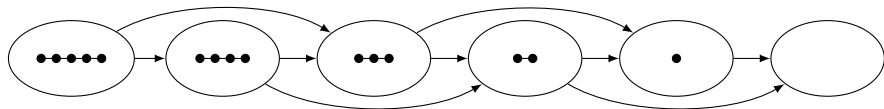
Valeur de Grundy

- $g(\emptyset) = 0$
- Soit G un graphe, E l'ensemble des coups possibles dans G .
 $g(G) = \text{mex}(g(k), k \in E)$
Minimal-EXcluded : plus petit entier exclu

Grundy

Valeur de Grundy

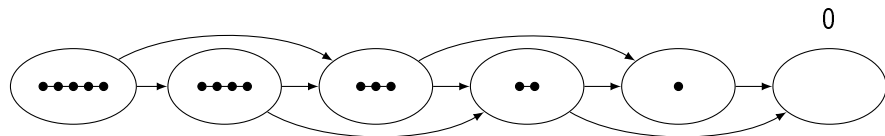
- $g(\emptyset) = 0$
- Soit G un graphe, E l'ensemble des coups possibles dans G .
 $g(G) = \text{mex}(g(k), k \in E)$
Minimal-EXcluded : plus petit entier exclu



Grundy

Valeur de Grundy

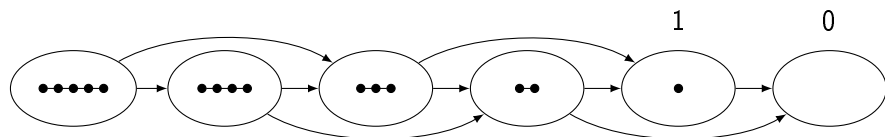
- $g(\emptyset) = 0$
- Soit G un graphe, E l'ensemble des coups possibles dans G .
 $g(G) = \text{mex}(g(k), k \in E)$
Minimal-EXcluded : plus petit entier exclu



Grundy

Valeur de Grundy

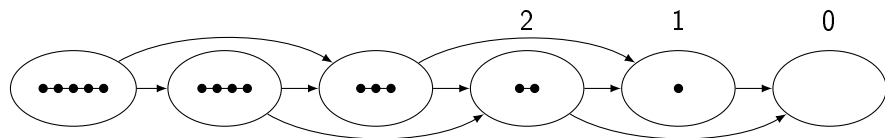
- $g(\emptyset) = 0$
- Soit G un graphe, E l'ensemble des coups possibles dans G .
 $g(G) = \text{mex}(g(k), k \in E)$
Minimal-EXcluded : plus petit entier exclu



Grundy

Valeur de Grundy

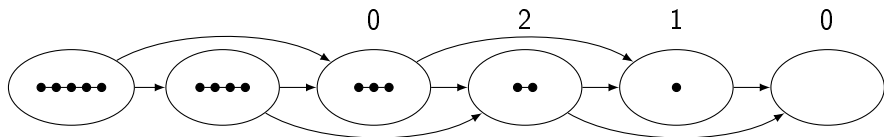
- $g(\emptyset) = 0$
- Soit G un graphe, E l'ensemble des coups possibles dans G .
 $g(G) = \text{mex}(g(k), k \in E)$
Minimal-EXcluded : plus petit entier exclu



Grundy

Valeur de Grundy

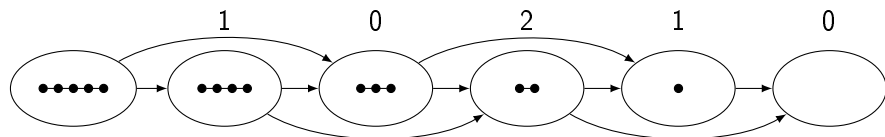
- $g(\emptyset) = 0$
- Soit G un graphe, E l'ensemble des coups possibles dans G .
 $g(G) = \text{mex}(g(k), k \in E)$
Minimal-EXcluded : plus petit entier exclu



Grundy

Valeur de Grundy

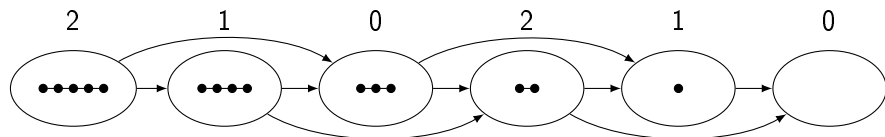
- $g(\emptyset) = 0$
- Soit G un graphe, E l'ensemble des coups possibles dans G .
 $g(G) = \text{mex}(g(k), k \in E)$
Minimal-EXcluded : plus petit entier exclu



Grundy

Valeur de Grundy

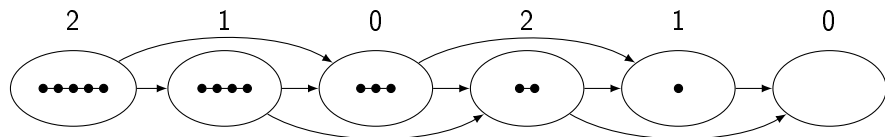
- $g(\emptyset) = 0$
- Soit G un graphe, E l'ensemble des coups possibles dans G .
 $g(G) = \text{mex}(g(k), k \in E)$
Minimal-EXcluded : plus petit entier exclu



Grundy

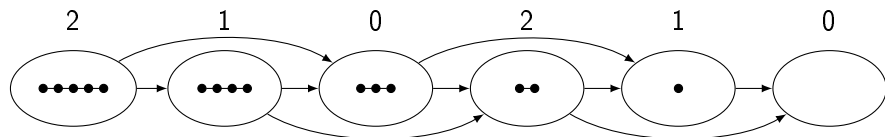
Valeur de Grundy

- $g(\emptyset) = 0$
- Soit G un graphe, E l'ensemble des coups possibles dans G .
 $g(G) = \text{mex}(g(k), k \in E)$
Minimal-EXcluded : plus petit entier exclu
- Un graphe est perdant ssi sa valeur de Grundy est nulle.



Valeur de Grundy

- $g(\emptyset) = 0$
- Soit G un graphe, E l'ensemble des coups possibles dans G .
 $g(G) = \text{mex}(g(k), k \in E)$
Minimal-EXcluded : plus petit entier exclu
- Un graphe est perdant ssi sa valeur de Grundy est nulle.
- Deux graphes sont équivalents ssi ils ont la même valeur de Grundy.



Théorème de Sprague-Grundy

Soit deux jeux G_1 et G_2 ayant respectivement une valeur de Grundy de g_1 et g_2 .

Alors la valeur de Grundy de $G_1 + G_2$ est $g_1 \oplus g_2$.

\oplus : Nim somme : XOR en base 2

Théorème de Sprague-Grundy

Soit deux jeux G_1 et G_2 ayant respectivement une valeur de Grundy de g_1 et g_2 .

Alors la valeur de Grundy de $G_1 + G_2$ est $g_1 \oplus g_2$.

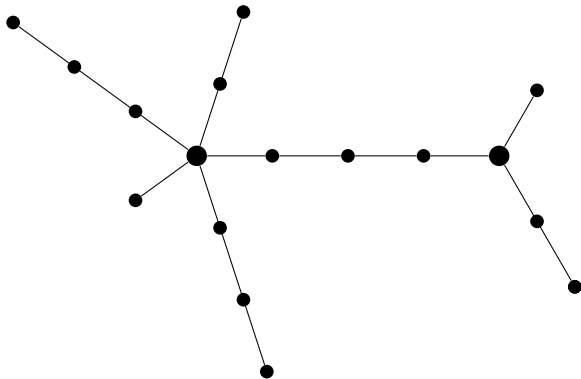
\oplus : Nim somme : XOR en base 2

- Exemple : $4 \oplus 7$
- $4 = 100_2, 7 = 111_2$
- $100_2 \oplus 111_2 = 011_2 = 3$

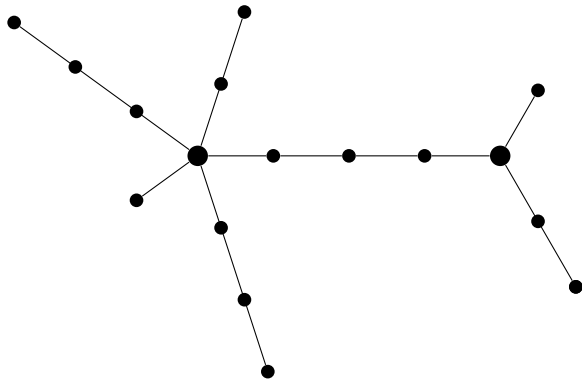
Grundy des étoiles subdivisées

Total \ Taille 2	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	2	0							
2	0	1	2						
3	1	2	0	1					
4	0	3	1	2	0				
5	1	2	0	3	1	2			
6	0	3	1	2	0	3	0		
7	1	2	0	3	1	2	1	2	
8	0	3	1	2	0	3	0	3	0

Bi-étoiles subdivisées



Bi-étoiles subdivisées



- La réduction modulo 3 des branches reste vraie.

- Similaire à la preuve dans les étoiles subdivisées

Idées de preuve

- Similaire à la preuve dans les étoiles subdivisées
- Nouveau cas : chemin entre les deux centres.

Idées de preuve

- Similaire à la preuve dans les étoiles subdivisées
- Nouveau cas : chemin entre les deux centres.
- Soit G une étoile subdivisée, et G' une copie de G à laquelle on a ajouté un P_3 en subdivisant une arête entre les sommets.
- $G+G'$ est perdant

- Similaire à la preuve dans les étoiles subdivisées
- Nouveau cas : chemin entre les deux centres.
- Soit G une étoile subdivisée, et G' une copie de G à laquelle on a ajouté un P_3 en subdivisant une arête entre les sommets.
- $G+G'$ est perdant
- Copie les coups de l'adversaire

- Similaire à la preuve dans les étoiles subdivisées
- Nouveau cas : chemin entre les deux centres.
- Soit G une étoile subdivisée, et G' une copie de G à laquelle on a ajouté un P_3 en subdivisant une arête entre les sommets.
- $G+G'$ est perdant
- Copie les coups de l'adversaire
- Dès que l'adversaire enlève un des centres, on fait de même dans la copie.
- \rightarrow Étoiles subdivisées

Grundy des bi-étoiles subdivisées

- Une seule arête entre les centres

Grundy des bi-étoiles subdivisées

- Une seule arête entre les centres

		0								1								2											
		0	1	2	3	4	5	6	7	0	1	2	3	4	5	6	7	0	1	2	3	4	5	6	7				
0	0	2	1	0	2	1	3	1	3	0	1	0	2	1	0	2	0	2	0	0	2	1	0	2	0	2	0		
	1	0	2	1	3	0	2	0	2	1	2	1	0	2	1	3	1	3	1	1	0	2	1	3	1	3	1		
	2	1	3	0	2	1	3	1	3	2	0	2	1	3	0	2	0	2	2	2	1	3	0	2	0	2	0		
	3	0	2	1	3	0	2	0	2	3	1	3	0	2	1	3	1	3	3	3	0	2	1	3	1	3	1		
	4	1	3	0	2	1	3	1	3	4	0	2	1	3	0	2	0	2	4	2	1	3	0	2	0	2	0		
	5	0	2	1	3	0	2	0	2	5	1	3	0	2	1	3	1	3	5	3	0	2	1	3	1	3	1		
	6	1	3	0	2	1	3	1	3	6	0	2	1	3	0	2	0	2	6	2	1	3	0	2	0	2	0		
	7	0	2	1	3	0	2	0	2	7	1	3	0	2	1	3	1	3	7	3	0	2	1	3	1	3	1		
1	0	0	1	2	3	4	5	6	7	0	2	1	0	2	1	3	1	3	0	1	0	2	1	0	2	0	2		
	1	1	0	2	1	3	1	3	1	3	1	0	2	1	3	0	2	0	2	1	2	1	0	2	1	3	1	3	
	2	1	3	0	2	1	3	0	2	0	2	1	3	0	2	1	3	1	3	2	0	2	1	3	0	2	0	2	
	3	3	3	0	2	1	3	1	3	1	3	3	0	2	1	3	0	2	0	2	3	1	3	0	2	1	3	1	3
	4	2	1	3	0	2	0	2	0	2	4	1	3	0	2	1	3	1	3	4	0	2	1	3	0	2	0	2	
	5	3	0	2	1	3	1	3	1	3	5	0	2	1	3	0	2	0	2	5	1	3	0	2	1	3	1	3	
	6	2	1	3	0	2	0	2	0	2	6	1	3	0	2	1	3	1	3	6	0	2	1	3	0	2	0	2	
	7	3	0	2	1	3	1	3	1	3	7	0	2	1	3	0	2	0	2	7	1	3	0	2	1	3	1	3	
2	0	1	0	2	1	0	2	0	2	0	3	2	1	3	2	0	2	0	0	0	1	2	3	4	5	6	7		
	1	2	1	0	2	1	3	1	3	1	1	3	2	0	3	1	3	1	1	3	0	1	3	0	2	0	2		
	2	0	2	1	3	0	2	0	2	2	2	0	3	1	2	0	2	0	2	1	3	0	2	1	3	1	3		
	3	1	3	0	2	1	3	1	3	3	3	1	2	0	3	1	3	1	3	0	2	1	3	0	2	0	2		
	4	0	2	1	3	0	2	0	2	4	2	0	3	1	2	0	2	0	4	1	3	0	2	1	3	1	3		
	5	1	3	0	2	1	3	1	3	5	3	1	2	0	3	1	3	1	5	0	2	1	3	0	2	0	2		
	6	0	2	1	3	0	2	0	2	6	2	0	3	1	2	0	2	0	6	1	3	0	2	1	3	1	3		
	7	1	3	0	2	1	3	1	3	7	3	1	2	0	3	1	3	1	7	0	2	1	3	0	2	0	2		
3	0	1	3	0	1	3	1	3	0	2	3	0	2	3	1	3	1	0	0	1	2	3	4	5	6	7			
	1	3	0	1	3	0	2	0	2	1	0	2	3	1	2	0	2	0	1	2	1	0	2	1	3	1	3		
	2	1	3	0	2	1	3	1	3	2	3	1	2	0	3	1	3	1	2	0	2	1	3	0	2	0	2		
	3	0	2	1	3	0	2	0	2	3	2	0	3	1	2	0	2	0	3	1	3	0	2	1	3	1	3		
	4	1	3	0	2	1	3	1	3	4	3	1	2	0	3	1	3	1	4	0	2	1	3	0	2	0	2		

Somme sur les bi-étoiles subdivisées

- But : exprimer la valeur de Grundy d'une bi-étoile subdivisée en fonction des valeurs de Grundy des deux étoiles subdivisées.
- Nim somme ?

Somme sur les bi-étoiles subdivisées

- But : exprimer la valeur de Grundy d'une bi-étoile subdivisée en fonction des valeurs de Grundy des deux étoiles subdivisées.
- Nim somme ?
- \rightarrow Presque !

Somme sur les bi-étoiles subdivisées

- But : exprimer la valeur de Grundy d'une bi-étoile subdivisée en fonction des valeurs de Grundy des deux étoiles subdivisées.
- Nim somme ?
- \rightarrow Presque !
- 8 classes d'équivalence

Somme sur les bi-étoiles subdivisées

- But : exprimer la valeur de Grundy d'une bi-étoile subdivisée en fonction des valeurs de Grundy des deux étoiles subdivisées.
- Nim somme ?
- \rightarrow Presque !
- 8 classes d'équivalence

Somme sur les bi-étoiles subdivisées

- But : exprimer la valeur de Grundy d'une bi-étoile subdivisée en fonction des valeurs de Grundy des deux étoiles subdivisées.
- Nim somme ?
- → Presque !
- 8 classes d'équivalence : C_1^*

Total \ Taille 2	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	2	0							
2	0	1	2						
3	1	2	0	1					
4	0	3	1	2	0				
5	1	2	0	3	1	2			
6	0	3	1	2	0	3	0		
7	1	2	0	3	1	2	1	2	
8	0	3	1	2	0	3	0	3	0

Somme sur les bi-étoiles subdivisées

- But : exprimer la valeur de Grundy d'une bi-étoile subdivisée en fonction des valeurs de Grundy des deux étoiles subdivisées.
- Nim somme ?
- → Presque !
- 8 classes d'équivalence : C_1^* C_2^*

Total \ Taille 2	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	2	0							
2	0	1	2						
3	1	2	0	1					
4	0	3	1	2	0				
5	1	2	0	3	1	2			
6	0	3	1	2	0	3	0		
7	1	2	0	3	1	2	1	2	
8	0	3	1	2	0	3	0	3	0

Somme sur les bi-étoiles subdivisées

- But : exprimer la valeur de Grundy d'une bi-étoile subdivisée en fonction des valeurs de Grundy des deux étoiles subdivisées.
- Nim somme ?
- → Presque !
- 8 classes d'équivalence : C_1^* C_2^* C_2^\square

Total \ Taille 2	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	2	0							
2	0	1	2						
3	1	2	0	1					
4	0	3	1	2	0				
5	1	2	0	3	1	2			
6	0	3	1	2	0	3	0		
7	1	2	0	3	1	2	1	2	
8	0	3	1	2	0	3	0	3	0

Somme sur les bi-étoiles subdivisées

- But : exprimer la valeur de Grundy d'une bi-étoile subdivisée en fonction des valeurs de Grundy des deux étoiles subdivisées.
- Nim somme ?
- → Presque !
- 8 classes d'équivalence : C_1^* C_2^* C_2^\square C_3^\square

Total \ Taille 2									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	2	0							
2	0	1	2						
3	1	2	0	1					
4	0	3	1	2	0				
5	1	2	0	3	1	2			
6	0	3	1	2	0	3	0		
7	1	2	0	3	1	2	1	2	
8	0	3	1	2	0	3	0	3	0

Somme sur les bi-étoiles subdivisées

- But : exprimer la valeur de Grundy d'une bi-étoile subdivisée en fonction des valeurs de Grundy des deux étoiles subdivisées.
- Nim somme ?
- → Presque !
- 8 classes d'équivalence : C_1^* C_2^* C_2^\square C_3^\square C_0 C_1 C_2 C_3

Total \ Taille 2	Taille 2								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	2	0							
2	0	1	2						
3	1	2	0	1					
4	0	3	1	2	0				
5	1	2	0	3	1	2			
6	0	3	1	2	0	3	0		
7	1	2	0	3	1	2	1	2	
8	0	3	1	2	0	3	0	3	0

Somme sur les bi-étoiles subdivisées

- But : exprimer la valeur de Grundy d'une bi-étoile subdivisée en fonction des valeurs de Grundy des deux étoiles subdivisées.
- Nim somme ?
- → Presque !
- 8 classes d'équivalence : C_1^* C_2^* C_2^\square C_3^\square C_0 C_1 C_2 C_3

Total \ Taille 2	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	2	0							
2	0	1	2						
3	1	2	0	1					
4	0	3	1	2	0				
5	1	2	0	3	1	2			
6	0	3	1	2	0	3	0		
7	1	2	0	3	1	2	1	2	
8	0	3	1	2	0	3	0	3	0

Somme sur les bi-étoiles subdivisées

- But : exprimer la valeur de Grundy d'une bi-étoile subdivisée en fonction des valeurs de Grundy des deux étoiles subdivisées.
- Nim somme ?
- \rightarrow Presque !
- 8 classes d'équivalence : C_1^* C_2^* C_2^\square C_3^\square C_0 C_1 C_2 C_3

	C_0	C_1	C_1^*	C_2	C_2^*	C_2^\square	C_3	C_3^\square
C_0	\oplus	\oplus	\oplus	\oplus	\oplus	\oplus	\oplus	\oplus
C_1	\oplus	\oplus	\oplus	\oplus	\oplus	\oplus	\oplus	\oplus
C_1^*	\oplus	\oplus	2	\oplus	0	\oplus	\oplus	\oplus
C_2	\oplus	\oplus	\oplus	\oplus	\oplus	\oplus	\oplus	\oplus
C_2^*	\oplus	\oplus	0	\oplus	1	1	\oplus	1
C_2^\square	\oplus	\oplus	\oplus	\oplus	1	\oplus	\oplus	\oplus
C_3	\oplus	\oplus	\oplus	\oplus	\oplus	\oplus	\oplus	\oplus
C_3^\square	\oplus	\oplus	\oplus	\oplus	1	\oplus	\oplus	\oplus

Réduction modulo 3

- Réduction modulo 3 des branches toujours valable ?

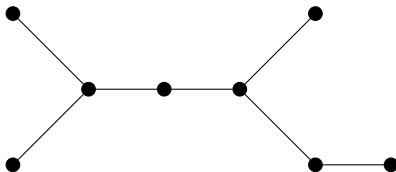
Réduction modulo 3

- Réduction modulo 3 des branches toujours valable ? NON !

Réduction modulo 3

- Réduction modulo 3 des branches toujours valable ? NON !

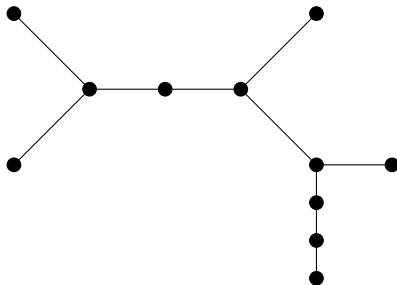
Valeur de Grundy = 2



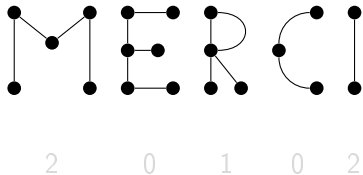
Réduction modulo 3

- Réduction modulo 3 des branches toujours valable ? NON !

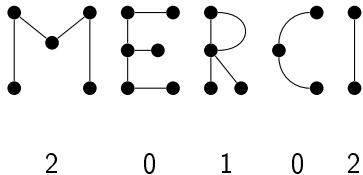
Valeur de Grundy = 0



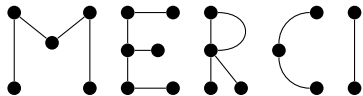
Merci



Merci



Merci



$$2 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 2 = 1$$