Décomposition fractionnaire en triangles de graphes presque complets.

François Dross

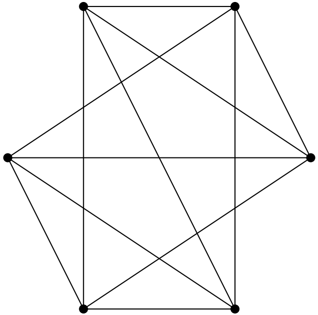
Laboratoire d'Informatique, de Robotique et de Microélectronique de Montpellier - Université de Montpellier

05/11/2015

Décomposition en triangles

Décomposition en triangles

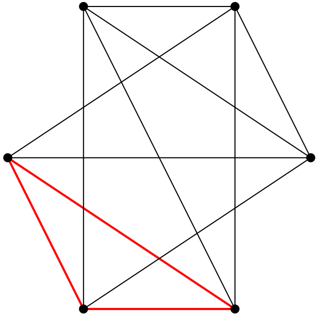
Partition des arêtes du graphe en triangles.



Décomposition en triangles

Décomposition en triangles

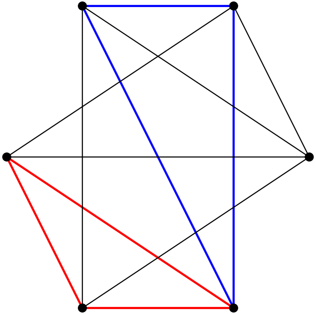
Partition des arêtes du graphe en triangles.



Décomposition en triangles

Décomposition en triangles

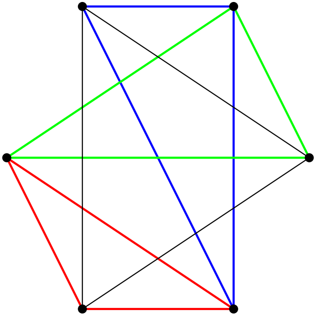
Partition des arêtes du graphe en triangles.



Décomposition en triangles

Décomposition en triangles

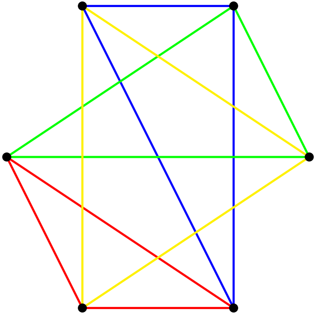
Partition des arêtes du graphe en triangles.



Décomposition en triangles

Décomposition en triangles

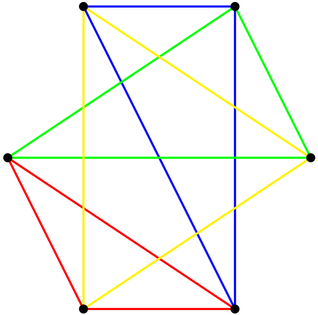
Partition des arêtes du graphe en triangles.



Décomposition en triangles

Décomposition en triangles

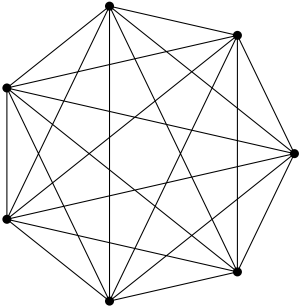
Partition des arêtes du graphe en triangles.



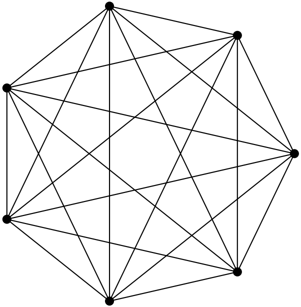
Divisibilité en triangles

- Degrés pairs.
- Nombre d'arêtes divisible par 3.

Décomposition en triangles de graphes complets



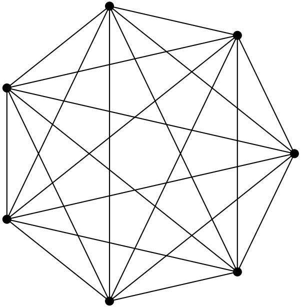
Décomposition en triangles de graphes complets

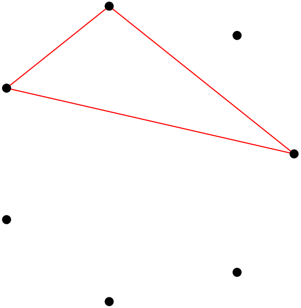


Théorème (Kirkman (1847))

G complet divisible en triangles $\Rightarrow$ G décomposable en triangles.

Décomposition en triangles de graphes complets

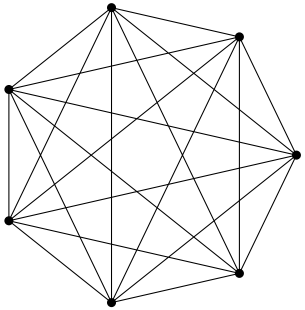


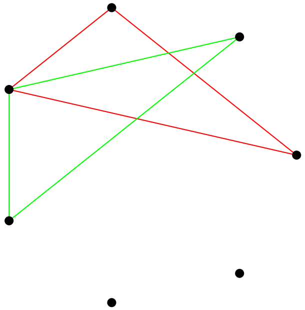


Théorème (Kirkman (1847))

G complet divisible en triangles $\Rightarrow$ G décomposable en triangles.

Décomposition en triangles de graphes complets

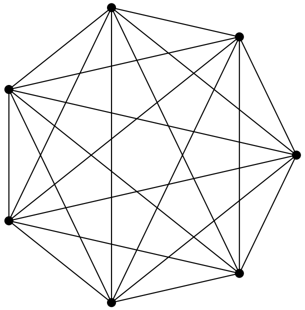


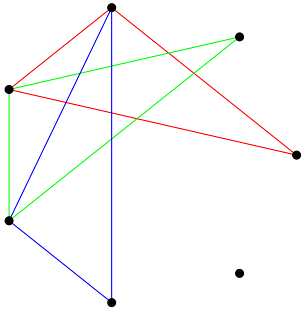


Théorème (Kirkman (1847))

G complet divisible en triangles $\Rightarrow$ G décomposable en triangles.

Décomposition en triangles de graphes complets

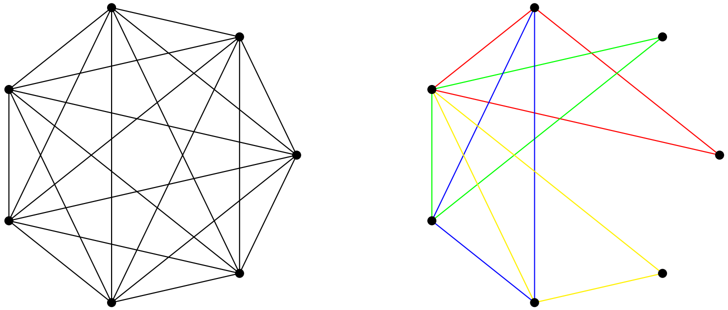




Théorème (Kirkman (1847))

G complet divisible en triangles $\Rightarrow$ G décomposable en triangles.

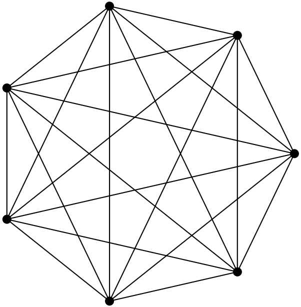
Décomposition en triangles de graphes complets

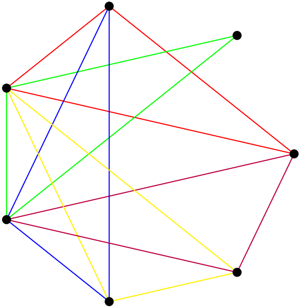


Théorème (Kirkman (1847))

G complet divisible en triangles $\Rightarrow$ G décomposable en triangles.

Décomposition en triangles de graphes complets

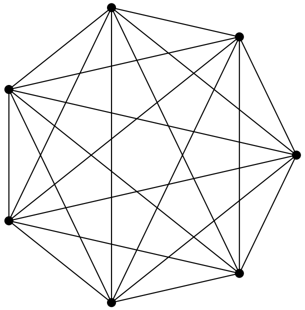


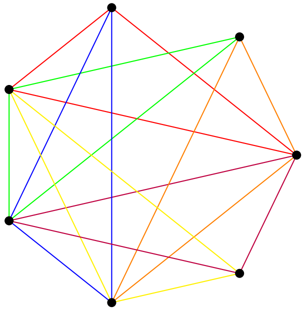


Théorème (Kirkman (1847))

G complet divisible en triangles $\Rightarrow$ G décomposable en triangles.

Décomposition en triangles de graphes complets

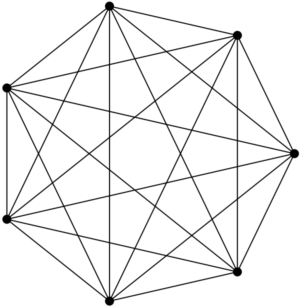


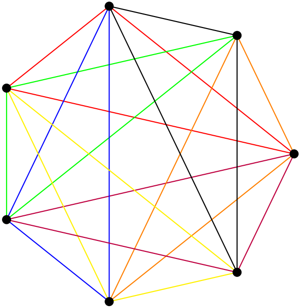


Théorème (Kirkman (1847))

G complet divisible en triangles $\Rightarrow$ G décomposable en triangles.

Décomposition en triangles de graphes complets





Théorème (Kirkman (1847))

G complet divisible en triangles $\Rightarrow$ G décomposable en triangles.

Système de Steiner de triplets

Système de Steiner de triplets

Système de Steiner de triplets

- X: un ensemble.

Système de Steiner de triplets

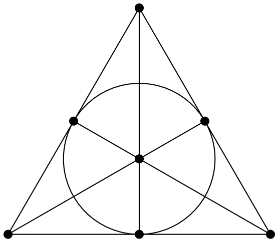
Système de Steiner de triplets

- X: un ensemble.
- B: triplets d'éléments de X tels que chaque paire d'éléments de X est dans exactement un triplet.

Système de Steiner de triplets

Système de Steiner de triplets

- X: un ensemble.
- B: triplets d'éléments de X tels que chaque paire d'éléments de X est dans exactement un triplet.



H-décomposition

H-divisibilité:

- Degrés divisible par $\mathrm{pgcd}_{v \in H}(d(v))$.
- Nombre d'arêtes divisible par le nombre d'arêtes de H.

H-décomposition

H-divisibilité:

- Degrés divisible par $\mathrm{pgcd}_{v \in H}(d(v))$.
- Nombre d'arêtes divisible par le nombre d'arêtes de H.

Théorème (Wilson (1975))

G complet H-divisible $\Rightarrow$ G H-décomposable.

H-décomposition

H-divisibilité:

- Degrés divisible par $\text{pgcd}_{v \in H}(d(v))$.
- Nombre d'arêtes divisible par le nombre d'arêtes de H.

Théorème (Wilson (1975))

G complet H-divisible $\Rightarrow$ G H-décomposable.

Théorème (Gustavsson (1991), Keevash (2015+))

$\exists \epsilon > 0, n_0 \in \mathbb{N}$ *t.q. G H-divisible avec $n \geq n_0$ sommets, deg. min. $\geq n(1-\epsilon) \Rightarrow G$ H-décomposable.*

H-décompositions de graphes non complets

Théorème (Barber, Kühn, Lo and Osthus (2015+))

$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ *t.q. G H-divisible avec* $n \geq n_0$ *sommets, deg. min.* $\geq (1 - 2/(9|H|^2(|H|-1)^2) + \epsilon)n \Rightarrow$ *G H-décomposable.*

H-décompositions de graphes non complets

Théorème (Barber, Kühn, Lo and Osthus (2015+))

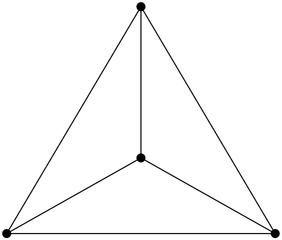
$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ *t.q. G H-divisible avec $n \geq n_0$ sommets, deg. min.* $\geq (1 - 2/(9|H|^2(|H|-1)^2) + \epsilon)n \Rightarrow G$ *H-décomposable.*

Conjecture (Nash Williams (1970))

G divisible en triangles avec $n \geq n_0$ sommets, deg. min. $\geq \frac{3}{4}n \Rightarrow G$ décomposable en triangles.

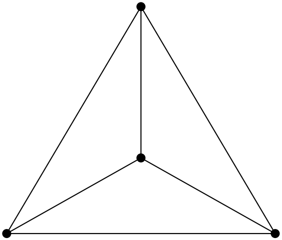
Décomposition fractionnaire en triangles

Poids positif sur les triangles.
Chaque arête doit avoir un poids de 1.



Décomposition fractionnaire en triangles

Poids positif sur les triangles.
Chaque arête doit avoir un poids de 1.

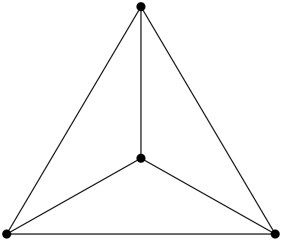


Conjecture (Garaschuk (2014))

G avec $n \geq n_0$ sommets, deg. min. $\geq \frac{3}{4}n \Rightarrow G$ admet une décomposition fractionnaire en triangles.

Décomposition fractionnaire en triangles

Poids positif sur les triangles.
Chaque arête doit avoir un poids de 1.



Conjecture (Garaschuk (2014))

G avec $n \geq n_0$ sommets, deg. min. $\geq \frac{3}{4}n \Rightarrow G$ admet une décomposition fractionnaire en triangles.

Théorème (Garaschuk (2014))

G avec n sommets, deg. min. $\geq 0.956n \Rightarrow G$ admet une décomposition fractionnaire en triangles.

Des décompositions fractionnaires aux décompositions

Théorème (Barber, Kühn, Lo et Osthus (2015+))

Si (δ *tel que* G *avec* $n \geq n_0$ *sommets, deg. min.* $\geq \delta n \Rightarrow G$ *admet une décomposition fractionnaire en triangles),*

Des décompositions fractionnaires aux décompositions

Théorème (Barber, Kühn, Lo et Osthus (2015+))

Si (δ tel que G avec $n \geq n_0$ sommets, deg. min. $\geq \delta n \Rightarrow G$ admet une décomposition fractionnaire en triangles),

alors (G divisible en triangles avec $n \geq n_1$ sommets, deg. min. $\geq (\delta + \epsilon)n$ $\Rightarrow G$ décomposable en triangles).

Mes résultats

Théorème (D. (2015+))

G avec n sommets, deg. min. $\geq 0.9n \Rightarrow G$ admet une décomposition fractionnaire en triangles.

Mes résultats

Théorème (D. (2015+))

G avec n sommets, deg. min. $\geq 0.9n \Rightarrow G$ admet une décomposition fractionnaire en triangles.

Avec le résultat de Barber, Kühn, Lo et Osthus:

Corollaire (D. (2015+))

$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in N$, G divisible en triangles avec $n \geq n_0$ sommets, deg. min. $\geq (0.9+\epsilon)n \Rightarrow G$ décomposable en triangles.

Poids initiaux

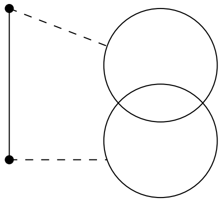
Graphe G, n sommets, m arêtes, deg min $\geq (1-\delta)n$.

- Poids ω_Δ pour chaque triangle.
- La somme des poids des arêtes est m.
- $n(1-2\delta) \leq T_e \leq n$.

Poids initiaux

Graphe G, n sommets, m arêtes, deg min $\geq (1-\delta)n$.

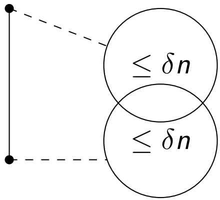
- Poids ω_Δ pour chaque triangle.
- La somme des poids des arêtes est m.
- $n(1-2\delta) \leq T_e \leq n$.



Poids initiaux

Graphe G, n sommets, m arêtes, deg min $\geq (1-\delta)n$.

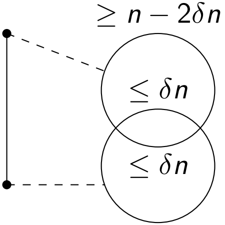
- Poids ω_Δ pour chaque triangle.
- La somme des poids des arêtes est m.
- $n(1-2\delta) \leq T_e \leq n$.



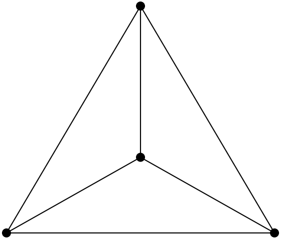
Poids initiaux

Graphe G, n sommets, m arêtes, deg min $\geq (1-\delta)n$.

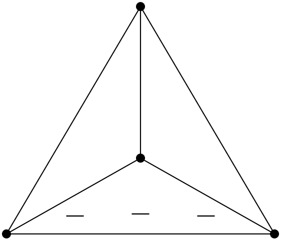
- Poids ω_Δ pour chaque triangle.
- La somme des poids des arêtes est m.
- $n(1-2\delta) \leq T_e \leq n$.



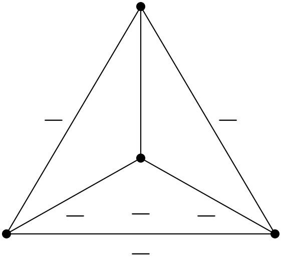
Un K_4 enraciné



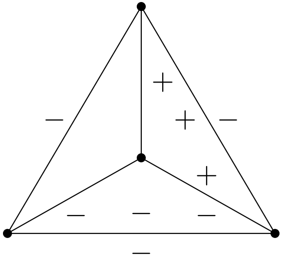
Un K_4 enraciné



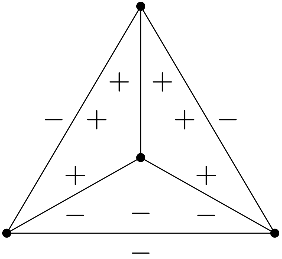
Un K_4 enraciné



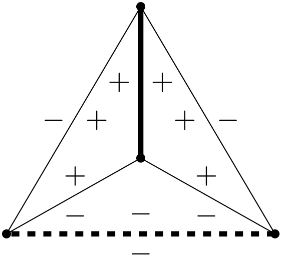
Un K_4 enraciné



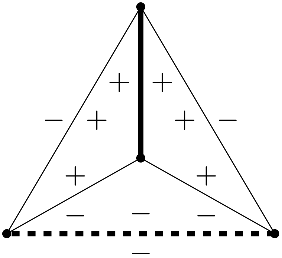
Un K_4 enraciné



Un K_4 enraciné

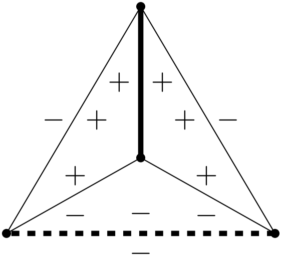


Un K_4 enraciné



En pratique, on déplace 2ω d'une arête à une autre.

Un K_4 enraciné



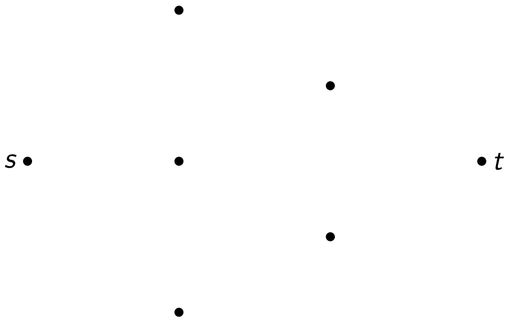
En pratique, on déplace 2ω d'une arête à une autre.

Chaque triangle est dans au plus $(1-\delta)n$ K_4, donc dans au plus $3(1-\delta)n$ K_4 enracinés.
Capacité $c = \frac{2\omega_\Delta}{3(1-\delta)n}$ pour chaque K_4 enraciné.

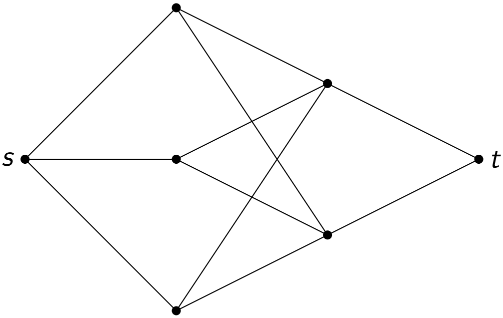
Digression: les graphes de flots

Digression: les graphes de flots

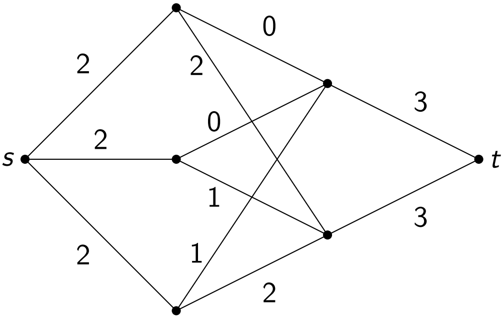
Digression: les graphes de flots



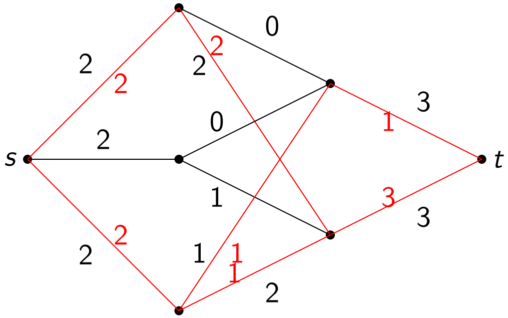
Digression: les graphes de flots



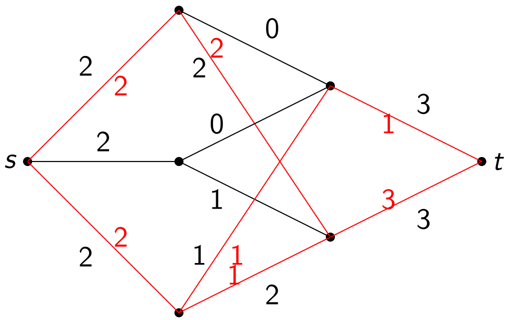
Digression: les graphes de flots



Digression: les graphes de flots



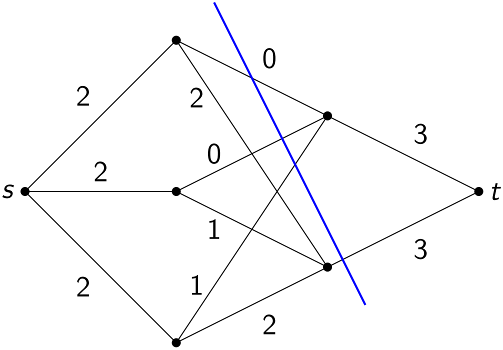
Digression: les graphes de flots



Théorème (Dualité, folklore)

Dans un graphe de flot, le flot max est égal à la coupe min.

Digression: les graphes de flots



Théorème (Dualité, folklore)

Dans un graphe de flot, le flot max est égal à la coupe min.

Le graphe $\widehat{G}$

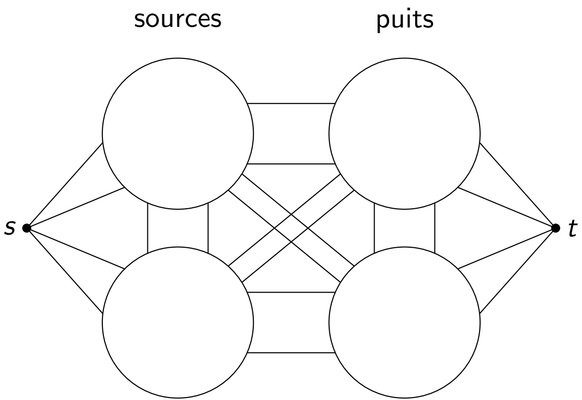
- Sommets : les arêtes de G.
- Arêtes : les K_4 enracinés de G.
- Chaque arête a une capacité de $c = \frac{2\omega_\Delta}{3(1-\delta)n}$.
- Les arêtes qui ont trop de poids sont les sources, celles qui en manquent sont des puits.
- Ajoutons une supersource est un superpuits.
- Ajoutons une arête de capacité $T_e\omega_\Delta - 1$ de la supersource vers chaque source e.
- Ajoutons une arête de capacité $1 - T_e\omega_\Delta$ de chaque puits e vers le superpuits.

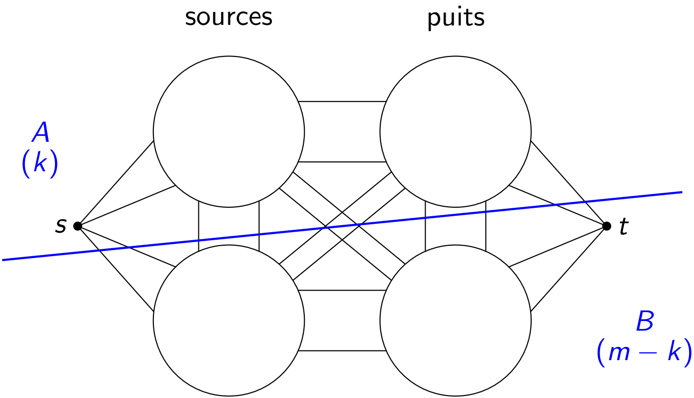
Le graphe $\widehat{G}$

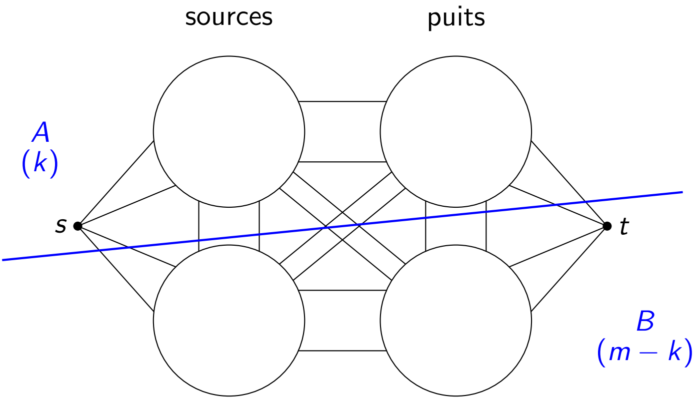
- Sommets : les arêtes de G.
- Arêtes : les K_4 enracinés de G.
- Chaque arête a une capacité de $c = \frac{2\omega_\Delta}{3(1-\delta)n}$.
- Les arêtes qui ont trop de poids sont les sources, celles qui en manquent sont des puits.
- Ajoutons une supersource est un superpuits.
- Ajoutons une arête de capacité $T_e\omega_\Delta - 1$ de la supersource vers chaque source e.
- Ajoutons une arête de capacité $1 - T_e\omega_\Delta$ de chaque puits e vers le superpuits.

Prouvons que chaque coupe a un poids d'au moins:

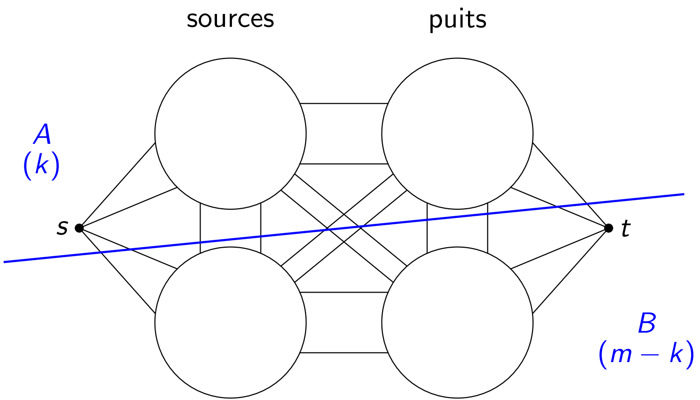
$$M = \sum_{e \text{ source}} (T_e\omega_\Delta - 1) = \sum_{e \text{ sink}} (1 - T_e\omega_\Delta)$$


sources
puits
s
t


sources
puits
A
(k)
s
t
B
(m − k)



$$1 - 11\delta + 10\delta^2 < 0$$



$$1 - 11\delta + 10\delta^2 < 0$$

$$\delta > 0.1$$

Théorème (D. (2015+))

Tout graphe à n sommets de degré minimum au moins $0.9n$ admet une décomposition fractionnaire en triangles.

Corollaire (D. (2015+))

Pour tout $\epsilon > 0$, tout graphe divisible en triangles à $n \geq n_0$ sommets de degré minimum au moins $(0.9+\epsilon)n$ admet une décomposition en triangles.

Une méthode similaire a été utilisée par Barber, Khün, Lo, Montgomery et Osthus dans un travail en cours.

Conjecture

Tout graphe à $n \geq n_0$ sommets de degré minimum au moins $0.75n$ admet une décomposition fractionnaire en triangles.

Merci

Merci de vote attention.