Coloration de packing de plusieurs classes de graphes subcubiques

Nicolas Gastineau, Přemysl Holub, Oliver Togni

Mercredi 4 Novembre 2015

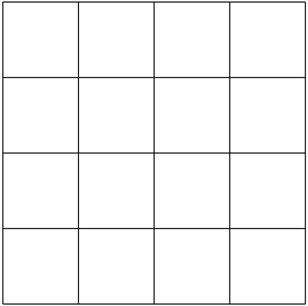
Université de Bourgogne - Le2i

Coloration de packing

Entrée: Un graphe G.

Question: Est-ce que le graphe G est k-packing colorable?

Exemple: Est ce que la grille $P_5 \square P_5$ est k-packing colorable ?



Un graphe *G est k-packing colorable*, s'il existe une partition de $V(G)$ en ensembles S_i, $i = 1, \ldots, k$, où les sommets de S_i sont à distance mutuelle supérieure à i.

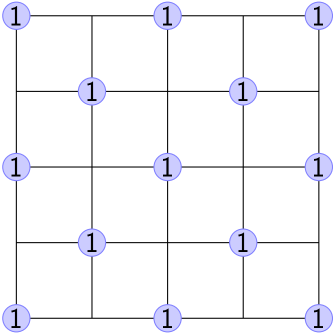
Le nombre de packing de G est le plus petit k tel que G est k-packing colorable.

Coloration de packing

Entrée: Un graphe G.

Question: Est-ce que le graphe G est k-packing colorable?

Exemple: Est ce que la grille $P_5 \square P_5$ est k-packing colorable ?



Un graphe G est *k-packing colorable*, s'il existe une partition de $V(G)$ en ensembles S_i, $i = 1, \ldots, k$, où les sommets de S_i sont à distance mutuelle supérieure à i.

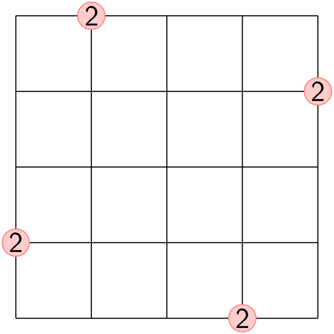
Le nombre de packing de G est le plus petit k tel que G est k-packing colorable.

Coloration de packing

Entrée: Un graphe G.

Question: Est-ce que le graphe G est k-packing colorable?

Exemple: Est ce que la grille $P_5 \square P_5$ est k-packing colorable ?



Un graphe *G est k-packing colorable*, s'il existe une partition de $V(G)$ en ensembles S_i, $i = 1, \ldots, k$, où les sommets de S_i sont à distance mutuelle supérieure à i.

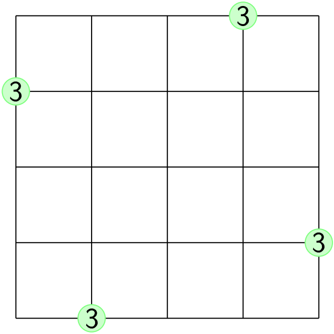
Le nombre de packing de G est le plus petit k tel que G est k-packing colorable.

Coloration de packing

Entrée: Un graphe G.

Question: Est-ce que le graphe G est k-packing colorable?

Exemple: Est ce que la grille $P_5 \square P_5$ est k-packing colorable ?



Un graphe G est *k-packing colorable*, s'il existe une partition de $V(G)$ en ensembles S_i, $i = 1, \ldots, k$, où les sommets de S_i sont à distance mutuelle supérieure à i.

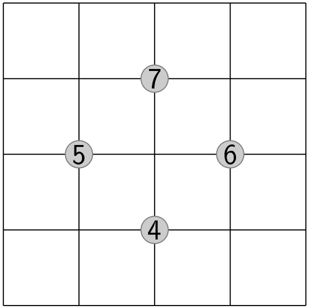
Le nombre de packing de G est le plus petit k tel que G est k-packing colorable.

Coloration de packing

Entrée: Un graphe G.

Question: Est-ce que le graphe G est k-packing colorable?

Exemple: Est ce que la grille $P_5 \square P_5$ est k-packing colorable ?



Un graphe *G est k-packing colorable*, s'il existe une partition de $V(G)$ en ensembles S_i, $i = 1, \ldots, k$, où les sommets de S_i sont à distance mutuelle supérieure à i.

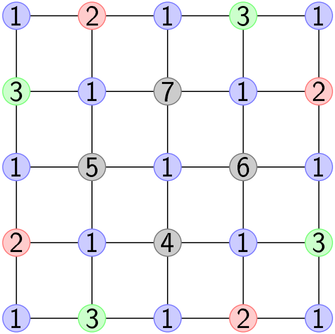
Le nombre de packing de G est le plus petit k tel que G est k-packing colorable.

Coloration de packing

Entrée: Un graphe G.

Question: Est-ce que le graphe G est k-packing colorable?

Exemple: Est ce que la grille $P_5 \square P_5$ est k-packing colorable ?



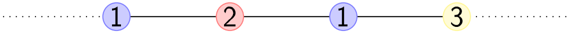
Un graphe G est *k-packing colorable*, s'il existe une partition de $V(G)$ en ensembles S_i, $i = 1, \ldots, k$, où les sommets de S_i sont à distance mutuelle supérieure à i.

Le nombre de packing de G est le plus petit k tel que G est k-packing colorable.

Chemins

Soit P_∞ le graphe avec ensemble de sommets $\mathbb{Z}$ et ensemble d'arêtes $\{ij|\ |i-j|=1\}$.

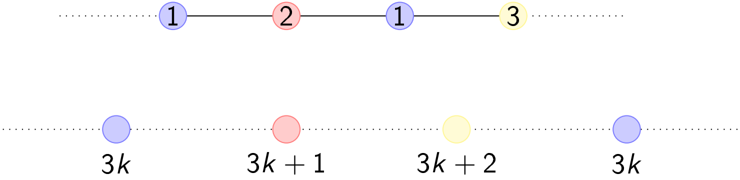
- P_∞ est 3-packing colorable [Goddard et al., 03];
- P_∞ est colorable avec les couleurs $\{k,\dots,3k+2\}$ pour $k<34$ [Goddard et al., 03];
- P_∞ est colorable avec les couleurs $\{k,\dots,3k-1\}$ pour $k\geq 34$ [Goddard et al., 03].



Chemins

Soit P_∞ le graphe avec ensemble de sommets $\mathbb{Z}$ et ensemble d'arêtes $\{ij| \ |i-j| = 1\}$.

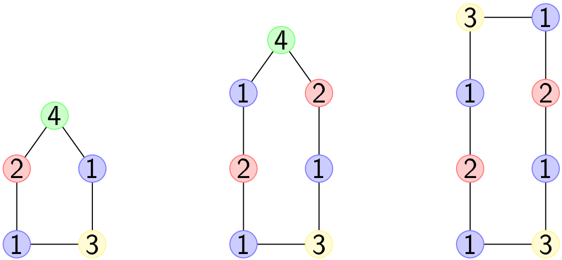
- P_∞ est 3-packing colorable [Goddard et al., 03];
- P_∞ est colorable avec les couleurs $\{k, \dots, 3k+2\}$ pour $k < 34$ [Goddard et al., 03];
- P_∞ est colorable avec les couleurs $\{k, \dots, 3k-1\}$ pour $k \geq 34$ [Goddard et al., 03].



Cycles

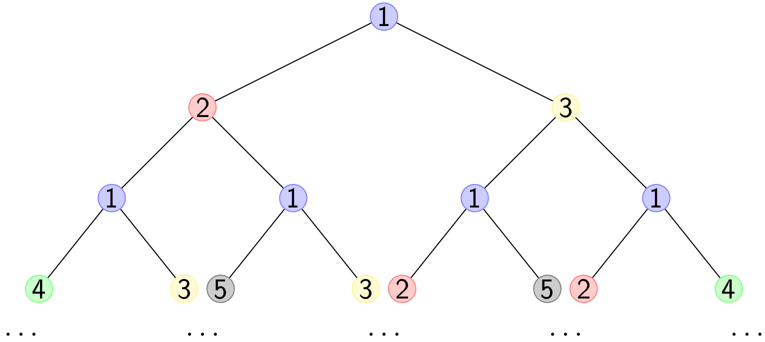
Soit C_n le cycle de taille n.

- C_n est 3-packing colorable si et seulement si $n \equiv 0 \mod 4$ [Goddard et al., 03];
- C_n est 4-packing colorable dans les autres cas [Goddard et al., 03];
- C_n est colorable avec les couleurs $\{k, \ldots, 6k+4\}$.



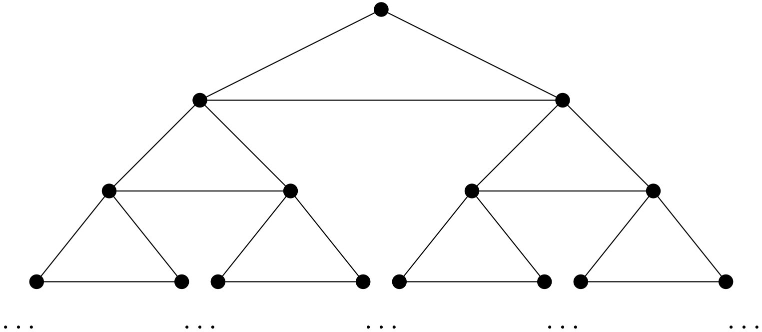
L'arbre binaire infini

Soit T_2 l'arbre binaire infini et soit T_3 l'arbre ternaire infini, on a $5 \leq \chi_\rho(T_2) \leq 7$ et $\chi_\rho(T_3) = \infty$ [Sloper, '04].



Un graphe planaire extérieur sans $K_{1,3}$

Le graphe T_2^Δ est un graphe planaire extérieur sans $K_{1,3}$ induit avec $\Delta(T_2^\Delta) \leq 4$ et $\chi_\rho(T_2^\Delta) = \infty$.



Famille de graphes avec nombre de packing borné

Graphes induit exclu

Les graphes sans X induit ont nombre de packing au plus n.

- $\boxed{\chi_\rho(K_{n+1}) > n;}$
- $\boxed{\chi_\rho(K_{n,n}) > n;}$
- $\chi_\rho(T_3) > n;$
- $\chi_\rho(T_2^\Delta) > n.$

- K_{n+1} et $K_{n,n}$ n'ont aucun sous-graphe induit commun (à part P_2);

i) Donc $X = P_2$.

Famille de graphes avec nombre de packing borné

Graphes induits exclus

Les graphes sans X et Y induits ont nombre de packing au plus n.

- $\boxed{\chi_\rho(K_{n+1}) > n;}$
- $\boxed{\chi_\rho(K_{n,n}) > n;}$
- $\chi_\rho(T_3) > n;$
- $\chi_\rho(T_2^{\Delta}) > n.$

- K_{n+1} et $K_{n,n}$ n'ont aucun sous-graphe induit commun (à part P_2);

i) $X \subseteq K_{n+1}$ et $Y \subseteq K_{n,n}$.

Famille de graphes avec nombre de packing borné

Graphes induit exclus

Les graphes sans X et Y induits ont nombre de packing au plus n.

- $\chi_\rho(K_{n+1}) > n$;
- $\boxed{\chi_\rho(K_{n,n}) > n;}$
- $\boxed{\chi_\rho(T_3) > n;}$
- $\chi_\rho(T_2^{\Delta})n$.

- $K_{n,n}$ et T_3 n'ont que $K_{1,4}$, $K_{1,3}$ et P_3 comme sous-graphes induits en commun;

i) $X \subseteq K_{n+1}$ et $Y \subseteq K_{n,n}$;

ii) $X \subseteq K_{n+1}$ et $Y \subseteq K_{1,4}$.

Famille de graphes avec nombre de packing borné

Graphes induit exclus

Les graphes sans X et Y induits ont nombre de packing au plus n.

- $\boxed{\chi_\rho(K_{n+1}) > n}$;
- $\boxed{\chi_\rho(K_{n,n}) > n}$;
- $\chi_\rho(T_3) > n$;
- $\boxed{\chi_\rho(T_2^\Delta) > n.}$

- $K_{n,n}$ et T_2^Δ n'ont que P_3 comme sous-graphe induit en commun;
- K_{n+1} et T_2^Δ n'ont que K_3 comme sous-graphe induit en commun.

i) $X \subseteq K_{n+1}$ et $Y \subseteq K_{n,n}$;

ii) $X \subseteq K_{n+1}$ et $Y \subseteq K_{1,4}$;

iii) $X \subseteq K_{n+1}$ et $Y \subseteq P_3$ ou $X \subseteq K_3$ et $Y \subseteq K_{1,4}$.

Graphes planaires extérieurs

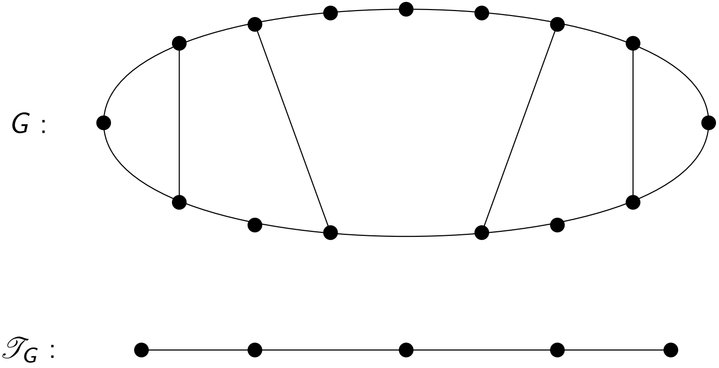
Pour tout entier n, les propriétés suivantes sont connus:

- il existe un arbre T avec $\Delta(T) \leq 4$ et $\chi_\rho(T) \geq n$;
- pour tout arbre T avec $\Delta(T) \leq 3$, on a $\chi_\rho(T) \leq 7$.

Est-ce que les graphes planaires extérieurs subcubiques ont un nombre de paking borné?

Le dual faible d'un graphe planaire extérieur G, noté $\mathscr{T}_G$, est le graphe avec ensemble de sommets les faces de G (sauf la face extérieure) et deux sommets sont adjacents si et seulement si les deux faces ont une corde en commun.

Graphes planaires extérieurs



Nos résultats

Un graphe subcubique planaire extérieur 2-connexe G a nombre de packing borné si

- son dual faible est tel que $\Delta(\mathscr{T}_G) \leq 2$;
- son dual faible est une étoile subdivisé.

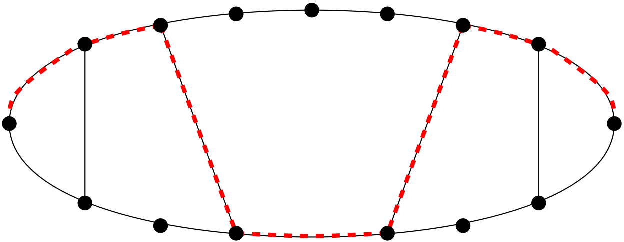
Un graphe subcubique planaire extérieur G a nombre de packing borné par une fonction qui dépend de k si

- G possède au plus k faces;
- $\mathscr{T}_G$ possède au plus k sommets de degré au moins 3 et G est 2-connexe.

Graphes planaires extérieurs avec $\Delta(\mathscr{T}_G) \leq 2$

Soit G un graphe subcubique planaire extérieur 2-connexe.

- si $\Delta(\mathscr{T}_G) \leq 2$, alors $\chi_\rho(G) \leq 15$;
- si $\mathscr{T}_G$ est une étoile subdivisée, alors $\chi_\rho(G) \leq 51$.



Graphes planaires extérieurs avec k faces

Soit G un graphe subcubique planaire extérieur.

- l'ensemble des sommets qui appartiennent seulement à la face extérieure peut être coloré avec les couleurs $\{1, \dots, 7\}$;
- pour chaque face on peut colorer les sommets avec les couleurs $\{k, \dots, 6k+4\}$;
- comme il y a k faces, on obtient $\chi_\rho(G) \leq 8 \times 6^k + 5\sum_{i=0}^{k-1} 6^i - 1$.

Perspectives

.

- Il y a t il des graphes subcubiques avec nombre de packing arbitrairement grand?
- Peut on prouver que tous les graphes planaires extérieures bornés ont nombre de packing bornés?
- Peut on trouver une borne sur le nombre de packing des graphes subcubique en fonction de la largeur linéaire?

Merci pour votre attention!