Longs chemins induits dans les graphes planaires

Louis Esperet, Laetitia Lemoine, Frédéric Maffray

G-SCOP, Grenoble

5 Novembre 2015

Introduction

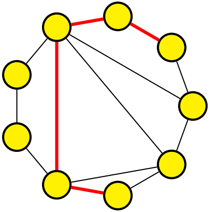
But

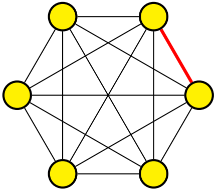
On veut montrer que dans certains graphes, si G contient un chemin à ℓ sommets, alors G contient un chemin induit à $f(\ell)$ sommets

Introduction

But

On veut montrer que dans certains graphes, si G contient un chemin à ℓ sommets, alors G contient un chemin induit à $f(\ell)$ sommets





Introduction

Théorème (Nešetřil, Ossona de Mendez, 2012)

Soit G un graphe k-dégénéré et P un chemin de G à ℓ sommets. Alors $G[P]$ contient un chemin induit de taille $\frac{\log(\log \ell)}{\log(k+1)}$.

- Borne sur les graphes dégénérés.
- Permet de comprendre les structures des graphes de tree-depth bornée.

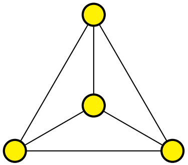
Définitions

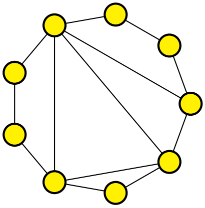
Graphe planaire

Un graphe planaire est un graphe que l'on peut représenter dans le plan sans que deux arêtes se croisent.

Graphe planaire extérieur

Un graphe planaire extérieur est un graphe planaire que l'on peut représenter avec tous les sommets sur la face externe.





Théorèmes

Théorème (Arocha, Valencia, 2000)

Tout graphe planaire extérieur 2-connexe à n sommets contient un chemin induit de taille $\Omega(\sqrt{\log n})$.
Tout graphe planaire 3-connexe à n sommets contient un chemin induit de taille $\Omega(\sqrt[3]{\log n})$.

Théorème (Esperet, L., Maffray)

Tout graphe planaire extérieur contenant un chemin à ℓ sommets contient un chemin induit de taille $\Omega(\log \ell)$ (borne optimale).

Théorème (Esperet, L., Maffray)

Si G est un graphe planaire 3-connexe à n sommets, alors G contient un chemin induit de taille $\Omega(\sqrt{\log n})$.

Théorèmes

Théorème (Di Giacomo et al., 2013)

Tout graphe planaire 3-connexe à n sommets contient un planaire extérieur 2-connexe de taille $\Omega(\sqrt[3]{n})$.
Tout graphe planaire extérieur 2-connexe à n sommets contient un chemin induit de taille $\Omega(\frac{\log n}{\log \log n})$.
Tout graphe planaire 3-connexe à n sommets contient un chemin induit de taille $\Omega(\frac{\log n}{\log \log n})$.

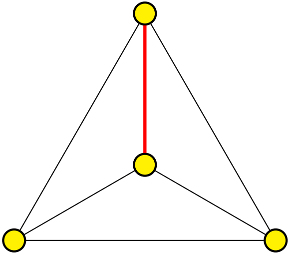
Théorème (Esperet, L., Maffray)

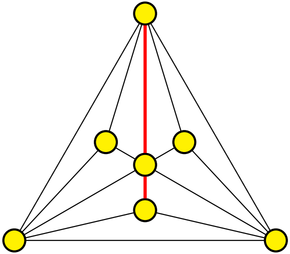
Tout graphe planaire extérieur contenant un chemin à ℓ sommets contient un chemin induit de taille $\Omega(\log \ell)$ (borne optimale).

Théorème (Esperet, L., Maffray)

Si G est un graphe planaire 3-connexe à n sommets, alors G contient un chemin induit de taille $\Omega(\log n)$.

Cette borne est optimale.





Théorèmes

Théorème (Esperet, L., Maffray)

Si G est un graphe planaire 3-connexe à n sommets, alors G contient un chemin induit de taille $\Omega(\log n)$.

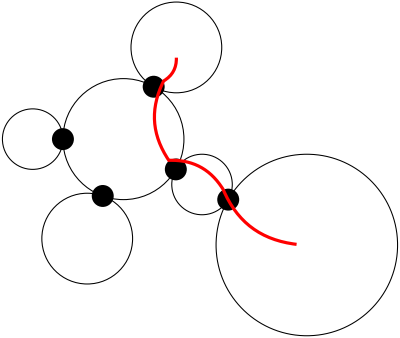
Théorème (Esperet, L., Maffray)

Si G est un graphe planaire contenant un chemin à n sommets, alors G contient un chemin induit de taille $\Omega(\sqrt{\log n})$.

Idée de la preuve

Si on a une borne pour les graphes 2-connexes, alors on a une borne pour les graphes connexes

Si G est un graphe connexe, contenant un chemin à n sommets.
On considère l'arbre des composantes 2-connexes.



Idée de la preuve

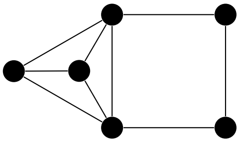
Arbres SPQR

Soit G un graphe 2-connexe. On construit un arbre T_G où chaque noeud est associé à un graphe d'un de ces types :

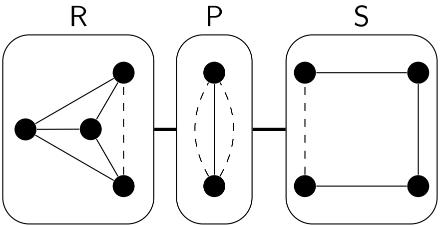
- Type S, associé à un cycle d'au moins 3 sommets,
- Type R, associé à un graphe simple 3-connexe,
- Type P, associé à 2 sommets reliés par au moins 3 arêtes,
- Type Q, associé à une seule arête (cas où G n'a qu'une arête)

Si x et y sont deux noeuds adjacents, chacun des graphe associés correspondant contient une arête virtuelle orientée. On obtient G à partir de T_G en fusionnant les graphes associés aux noeuds le long de ces arêtes.

Idée de la preuve



G



T_G

Idée de la preuve

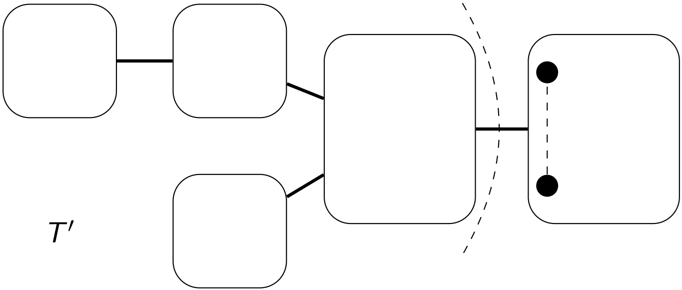
Soit G graphe planaire 2-connexe contenant un chemin P à n sommets. On considère G', plus petit sous-graphe de G contenant P et 2-connexe. On regarde $T_{G'}$, on a deux cas

- Ou bien un noeud correspond à un graphe avec $\geq \alpha$ sommets,
- Ou bien tous les noeuds correspondent à un graphe avec $\leq \alpha$ sommets.

Idée de la preuve

Dans le cas où un noeud de $T(G')$ correspond à un graphe avec $\geq \alpha$ sommets :

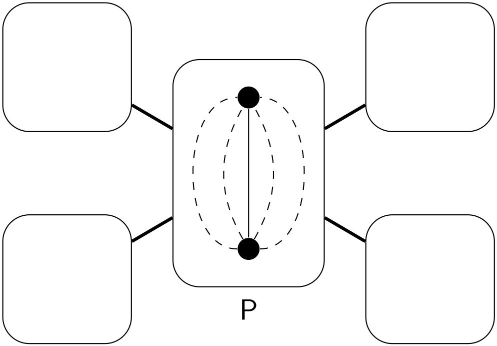
- C'est un noeud R ou S,
- Si c'est un noeud S : chemin induit de taille $\alpha - 1$ dans la composante
- Si c'est un noeud R : chemin induit de taille $\Omega(\log(\alpha))$ dans la composante
- Il peut y avoir des arêtes virtuelles dans ce chemin



Idée de la preuve

Dans le cas où tous les noeuds de $T_{G'}$ correspondent à un graphe avec moins de α sommets.

- On a au moins $\frac{n}{\alpha}$ noeuds.
- Noeuds R ou S : au plus $3\alpha - 6$ arêtes, donc degré $\leq 3\alpha - 6$.
- Noeuds P : degré au plus 3



Idée de la preuve

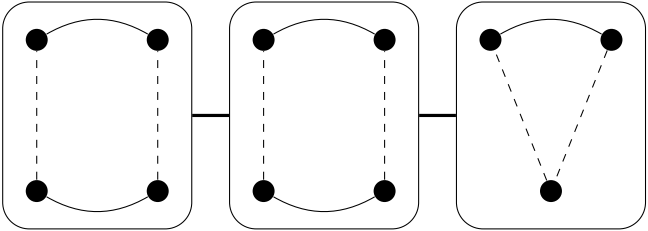
Dans le cas où tous les noeuds de $T_{G'}$ correspondent à un graphe avec moins de α sommets.

- On a au moins $\frac{n}{\alpha}$ noeuds.
- Degré au plus $3\alpha - 6$.
- Diamètre $d \geq \frac{\log n}{\log 3\alpha}$, donc chemin dans T_G de taille d.

Idée de la preuve

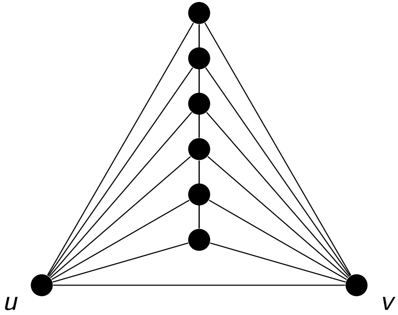
On a un chemin de taille d dans $T_{G'}$. Montrons qu'on a un chemin de taille $\frac{d}{4}$ dans G'.

- Pas deux noeuds P consécutifs : au moins $\frac{d}{2}$ de type R ou S.
- Deux chemins induits dans G'



- Les éventuelles arêtes virtuelles dans le chemin induit sont remplacées comme dans le cas précédent.

On ne sait pas si la borne est optimale.
Famille de graphes planaires contenant un chemin à n sommets et dont le plus grand chemin induit a pour taille $\Omega(\frac{\log n}{\log \log n})$.



G_1

Graphes sur une surface

Corollaire (Esperet, L., Maffray)

Un graphe plongé sur une surface de genre g contenant un chemin à n sommets contient un chemin induit de taille $\Omega(\sqrt{\log n} - g\log(\sqrt{\log n}))$.

Idée de la preuve : par récurrence sur g.

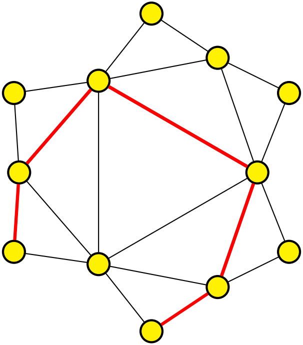
- Soit C un plus petit cycle non contractible.
- Ou bien C est grand et on a un grand chemin induit,
- Ou bien C est petit et en retirant C, on a un grand chemin dans un graphe de genre $g-1$, donc un grand chemin induit.

Questions

Théorème (Esperet, L., Maffray)

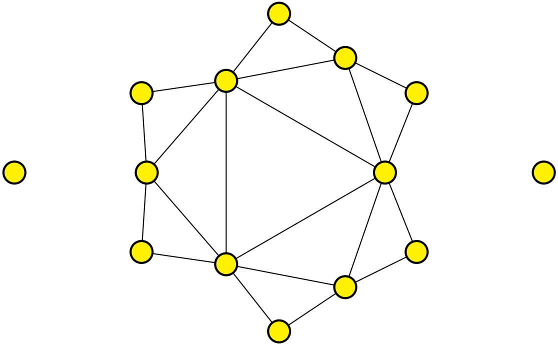
Si G est un *k-arbre* contenant un chemin à ℓ sommets, alors G contient un chemin induit de taille $\Omega(\frac{\log \ell}{k \log k})$.

Borne optimale :



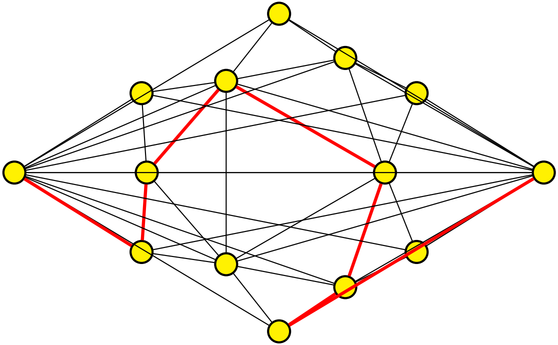
Questions

- Borne pour les k-arbres partiels ?
- Graphe de treewidth $2t$ où le plus long chemin induit a pour taille $2t(\log n)^{\frac{1}{t}}$.



Questions

- Borne pour les k-arbres partiels ?
- Graphe de treewidth $2t$ où le plus long chemin induit a pour taille $2t(\log n)^{\frac{1}{t}}$.



Questions

- Borne pour les graphes chordaux ?
- En particulier, borne sur les graphes d'intervalle ?

Questions

- Borne pour les graphes chordaux ?
- En particulier, borne sur les graphes d'intervalle ?
- Merci pour votre attention.