Jeu de coloration d'arêtes

Gabriela Paris, LIRIS, Université Lyon 1
(en collaboration avec Clément Charpentier)

Journées Graphes et Algorithmes 2015

Sommaire

1 Jeu de coloration de sommets

2 Jeu de coloration d'arêtes
- Définitions et premiers résultats
- Forêts
- Graphes $(1, d)$-décomposables
- Chenilles

Jeu de coloration de sommets

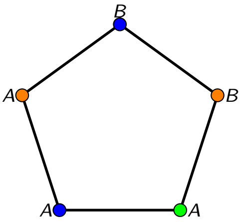
Introduit en 1989 par Bodlaender.

Données :

- Un graphe G
- k couleurs
- deux joueurs : Alice et Bob

À tour de rôle, ils colorient proprement un sommet.

$C = \{\bullet, \bullet, \bullet\}$, A et B



Alice gagne si G est colorié proprement.
Bob gagne si un sommet ne peut pas être colorié.

Premiers résultats

Avec combien de couleurs Alice peut gagner quelle que soit la stratégie de Bob ? En particulier, quel est le minimum nécessaire ?

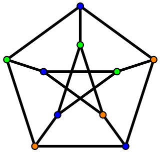
Définition

Le minimum de couleurs pour qu'Alice gagne quelleque soit la stratégie de Bob sur G s'appelle le *nombre chromatique ludique* et est noté $\chi_g(G)$.

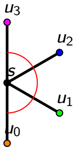
Étant donné un graphe G, peut-on déterminer facilement $\chi_g(G)$?

Théorème

Soit G un graphe. Alors $\chi(G) \leq \chi_g(G) \leq \Delta(G) + 1$.



À la fin, si Alice gagne,
G est proprement colorié



Δ sommets
adjacents coloriés

Jeu du marquage

Introduit en 1999 par Zhu.

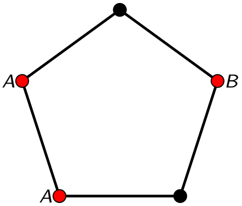
Données :

- un graphe G
- un entier positif k
- deux joueurs : Alice et Bob

À tour de rôle, ils marquent un sommet ayant au plus $k-1$ voisins marqués.

Alice gagne si tout le graphe est marqué.
Bob gagne autrement.

$k = 2$, A et B, marque $=$ ●



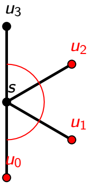
Intérêt

Définition

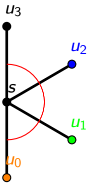
Le nombre minimum k tel qu'Alice gagne à coup sûr s'appele le *nombre de marquage ludique* et est noté $col_g(G)$.

Théorème (Zhu 1999)

Soit G un graphe. Alors $\chi_g(G) \leq col_g(G)$.



au plus $k-1$ voisins déjà marqués



au plus $k-1$ voisins déjà coloriés

Stratégie d'activation

Définition

Soit $\mathcal{C}$ une classe de graphes. Alors $col_g(\mathcal{C}) = \sup\{\ col_g(G) \mid G \in \mathcal{C}\ \}$, et de même pour χ_g.

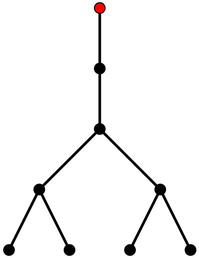
Théorème (Faigle, Kern, Kierstead et Trotter, 1993)

Soit $\mathcal{F}$ la classe des forêts. Alors $col_g(\mathcal{F}) \leq 4$.

Ce théorème se montre avec la stratégie d'activation.

marqué = ● ; activé = ●

- Alice marque la racine



Stratégie d'activation

Définition

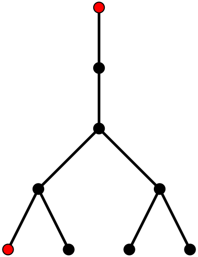
Soit $\mathcal{C}$ une classe de graphes. Alors $col_g(\mathcal{C}) = \sup\{\ col_g(G) \mid G \in \mathcal{C}\ \}$, et de même pour χ_g.

Théorème (Faigle, Kern, Kierstead et Trotter, 1993)

Soit $\mathcal{F}$ la classe des forêts. Alors $col_g(\mathcal{F}) \leq 4$.

Ce théorème se montre avec la stratégie d'activation.

marqué = $\bullet$; activé = $\bullet$



- Alice marque la racine
- Bob marque un sommet
  Alice active les sommets allant vers r, jusqu'à rencontrer un sommet marqué ou actif.
  Elle marque l'actif rencontré, ou le dernier qu'elle a activé.

Stratégie d'activation

Définition

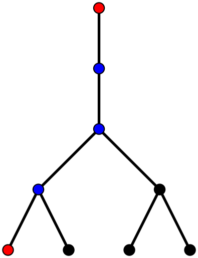
Soit $\mathcal{C}$ une classe de graphes. Alors $col_g(\mathcal{C}) = \sup\{\ col_g(G) \mid G \in \mathcal{C}\ \}$, et de même pour χ_g.

Théorème (Faigle, Kern, Kierstead et Trotter, 1993)

Soit $\mathcal{F}$ la classe des forêts. Alors $col_g(\mathcal{F}) \leq 4$.

Ce théorème se montre avec la stratégie d'activation.

marqué = ● ; activé = ●



- Alice marque la racine
- Bob marque un sommet
  Alice active les sommets allant vers r, jusqu'à rencontrer un sommet marqué ou actif.
  Elle marque l'actif rencontré, ou le dernier qu'elle a activé.

Stratégie d'activation

Définition

Soit $\mathcal{C}$ une classe de graphes. Alors $col_g(\mathcal{C}) = \sup\{\ col_g(G) \mid G \in \mathcal{C}\ \}$, et de même pour χ_g.

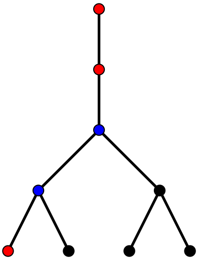
Théorème (Faigle, Kern, Kierstead et Trotter, 1993)

Soit $\mathcal{F}$ la classe des forêts. Alors $col_g(\mathcal{F}) \leq 4$.

Ce théorème se montre avec la stratégie d'activation.

marqué = $\bullet$; activé = $\bullet$

- Alice marque la racine
- Bob marque un sommet
  Alice active les sommets allant vers r, jusqu'à rencontrer un sommet marqué ou actif.
  Elle marque l'actif rencontré, ou le dernier qu'elle a activé.



Stratégie d'activation

Définition

Soit $\mathcal{C}$ une classe de graphes. Alors $col_g(\mathcal{C}) = \sup\{ col_g(G) \mid G \in \mathcal{C} \}$, et de même pour χ_g.

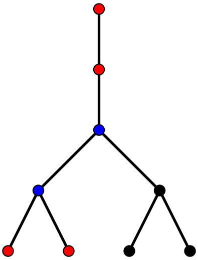
Théorème (Faigle, Kern, Kierstead et Trotter, 1993)

Soit $\mathcal{F}$ la classe des forêts. Alors $col_g(\mathcal{F}) \leq 4$.

Ce théorème se montre avec la stratégie d'activation.

marqué = ● ; activé = ●

- Alice marque la racine
- Bob marque un sommet
  Alice active les sommets allant vers r, jusqu'à rencontrer un sommet marqué ou actif.
  Elle marque l'actif rencontré, ou le dernier qu'elle a activé.



Stratégie d'activation

Définition

Soit $\mathcal{C}$ une classe de graphes. Alors $col_g(\mathcal{C}) = \sup\{\ col_g(G) \mid G \in \mathcal{C}\ \}$, et de même pour χ_g.

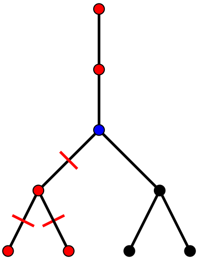
Théorème (Faigle, Kern, Kierstead et Trotter, 1993)

Soit $\mathcal{F}$ la classe des forêts. Alors $col_g(\mathcal{F}) \leq 4$.

Ce théorème se montre avec la stratégie d'activation.

marqué = ● ; activé = ●

- Alice marque la racine
- Bob marque un sommet
  Alice active les sommets allant vers r, jusqu'à rencontrer un sommet marqué ou actif.
  Elle marque l'actif rencontré, ou le dernier qu'elle a activé.



Résultat final

De plus, Bodlaender avait montré en 1989 :

Théorème (Bodlaender,1989)

Il existe une forêt F telle que $\chi_g(F) \geq 4$.

D'où :

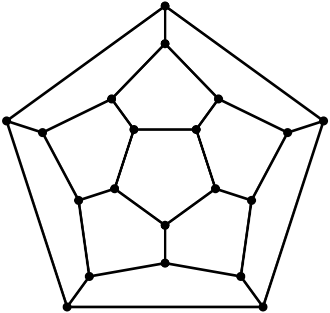
Théorème (Faigle, Kern, Kierstead et Trotter, 1993)

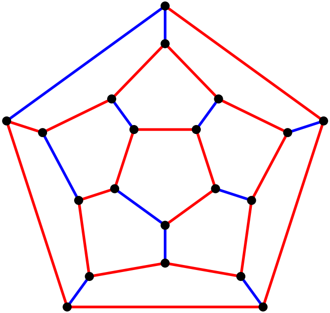
$$\chi_g(\mathcal{F}) = col_g(\mathcal{F}) = 4$$

Graphes $(1, d)$-décomposables

Définition

Soit G un graphe. On dit que G est $(1, d)$-décomposable si on peut partitionner ses arêtes en une forêt et un graphe de degré maximum d.





$d = 2$

F en rouge

Résultats

Théorème (Zhu 99)

Soit $G(V,E)$ un graphe, et $E = E_1 \cup E_2$. Si $G_1(V,E_1)$ et $G_2(V,E_2)$, alors $col_g(G) \leq col_g(G_1) + \Delta(G_2)$.

Résultats

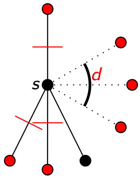
Théorème (Zhu 99)

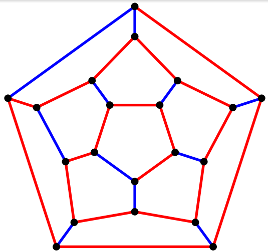
Soit $G(V,E)$ un graphe, et $E = E_1 \cup E_2$. Si $G_1(V,E_1)$ et $G_2(V,E_2)$, alors $col_g(G) \leq col_g(G_1) + \Delta(G_2)$.

Ainsi, pour tout graphe $(1,d)$-décomposable :

Théorème

Soit G un graphe $(1,d)$-décomposable. Alors $\chi_g(G) \leq col_g(G) \leq 4 + d$.





$\chi_g(G) \leq 4 + 2$

Cas des graphes planaires

Théorème (He *et al.* (2002) ; Kleitman (2006) ; Montassier *et al.* (2012))

Si G est un graphe planaire, avec $\Delta(G) \geq 2$ et de maille g :

- *Si $g \geq 5$, alors G est $(1,4)$-décomposable, donc $col_g(G) \leq 8$,*
- *Si $g \geq 6$, alors G est $(1,2)$-décomposable, donc $col_g(G) \leq 6$,*
- *Si $g \geq 8$, alors G est $(1,1)$-décomposable, donc $col_g(G) \leq 5$.*

Pour les petites mailles ($g < 5$) la meilleure borne connue est $col_g(G) \leq 17$, donnée par Zhu en 2008.

Question

Étant donné un graphe G, on a de bonnes bornes de $\chi_g(G)$ pour les forêts et les graphes $(1, d)$-décomposables.

Question

Étant donné un graphe G, on a de bonnes bornes de $\chi_g(G)$ pour les forêts et les graphes $(1, d)$-décomposables.

Peut-on faire pareil pour le jeu sur les arêtes ?

Sommaire

1 Jeu de coloration de sommets

2 Jeu de coloration d'arêtes
- Définitions et premiers résultats
- Forêts
- Graphes $(1, d)$-décomposables
- Chenilles

Sommaire

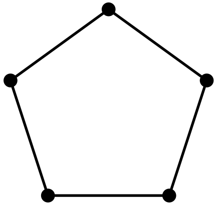
1. Jeu de coloration de sommets
2. Jeu de coloration d'arêtes
   - Définitions et premiers résultats
   - Forêts
   - Graphes $(1, d)$-décomposables
   - Chenilles

Jeu de coloration d'arêtes

On peut définir les mêmes notions sur les arêtes d'un graphe.
Introduit en 1999 par Zhu.

Données :

- Un graphe G



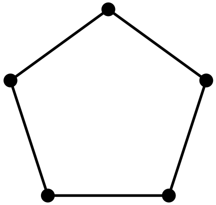
Jeu de coloration d'arêtes

On peut définir les mêmes notions sur les arêtes d'un graphe.
Introduit en 1999 par Zhu.

Données :

- Un graphe G
- k couleurs

$C = \{$●, ●, ●$\}$,



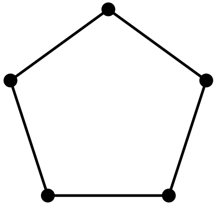
Jeu de coloration d'arêtes

On peut définir les mêmes notions sur les arêtes d'un graphe.
Introduit en 1999 par Zhu.

Données :

- Un graphe G
- k couleurs
- deux joueurs : Alice et Bob

$C = \{\bullet, \bullet, \bullet\}$, A et B



Jeu de coloration d'arêtes

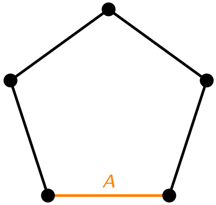
On peut définir les mêmes notions sur les arêtes d'un graphe.
Introduit en 1999 par Zhu.

Données :

- Un graphe G
- k couleurs
- deux joueurs : Alice et Bob

À tour de rôle, ils colorient proprement une arête.

$C = \{\bullet, \bullet, \bullet\}$, A et B



Jeu de coloration d'arêtes

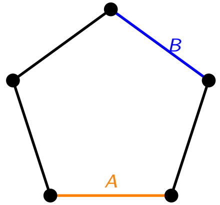
On peut définir les mêmes notions sur les arêtes d'un graphe.
Introduit en 1999 par Zhu.

Données :

- Un graphe G
- k couleurs
- deux joueurs : Alice et Bob

À tour de rôle, ils colorient proprement une arête.

$C = \{\bullet, \bullet, \bullet\}$, A et B



Jeu de coloration d'arêtes

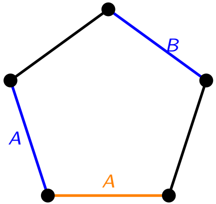
On peut définir les mêmes notions sur les arêtes d'un graphe.
Introduit en 1999 par Zhu.

Données :

- Un graphe G
- k couleurs
- deux joueurs : Alice et Bob

À tour de rôle, ils colorient proprement une arête.

$C = \{\bullet, \bullet, \bullet\}$, A et B



Jeu de coloration d'arêtes

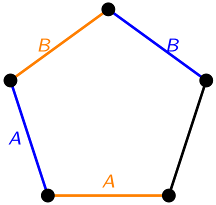
On peut définir les mêmes notions sur les arêtes d'un graphe.
Introduit en 1999 par Zhu.

Données :

- Un graphe G
- k couleurs
- deux joueurs : Alice et Bob

À tour de rôle, ils colorient proprement une arête.

$C = \{\bullet, \bullet, \bullet\}$, A et B



Jeu de coloration d'arêtes

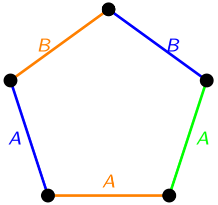
On peut définir les mêmes notions sur les arêtes d'un graphe.
Introduit en 1999 par Zhu.

Données :

- Un graphe G
- k couleurs
- deux joueurs : Alice et Bob

À tour de rôle, ils colorient proprement une arête.

$C = \{\bullet, \bullet, \bullet\}$, A et B



Alice gagne si G colorié proprement.
Bob gagne si une arête ne peut pas être coloriée.

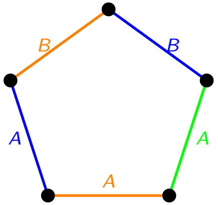
Jeu de coloration d'arêtes

On peut définir les mêmes notions sur les arêtes d'un graphe.
Introduit en 1999 par Zhu.

Données :

- Un graphe G
- k couleurs
- deux joueurs : Alice et Bob

$C = \{\bullet, \bullet, \bullet\}$, A et B



À tour de rôle, ils colorient proprement une arête.

Alice gagne si G colorié proprement.
Bob gagne si une arête ne peut pas être coloriée.

Définition

Le nombre minimum de couleurs pour qu'Alice ait une stratégie gagnante est l'*indice chromatique ludique*, noté $\chi'_g(G)$.

Jeu du marquage d'arêtes

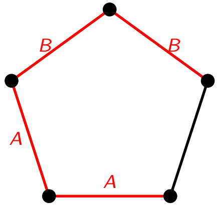
Données :

- Un graphe G
- un entier k
- deux joueurs : Alice et Bob

À tour de rôle, ils marquent une arête ayant au plus $k-1$ voisins marqués.

Alice gagne si G marqué.
Bob gagne si une arête ne peut pas être marquée.

$k = 3$, A et B, marque $=$—



Définition

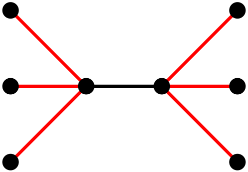
Le nombre minimum de couleurs pour qu'Alice ait une stratégie gagnante est l'*indice de marquage ludique*, noté $col'_g(G)$.

Premiers résultats

De manière similaire que pour les sommets, on peut montrer :

Théorème

Soit G un graphe. Alors
$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \chi'_g(G) \leq col'_g(G) \leq 2\Delta(G) - 1.$



Sommaire

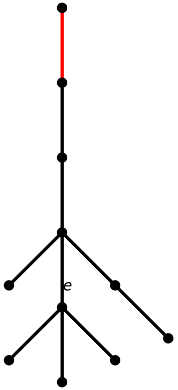
1. Jeu de coloration de sommets
2. Jeu de coloration d'arêtes
   - Définitions et premiers résultats
   - Forêts
   - Graphes $(1, d)$-décomposables
   - Chenilles

Stratégie d'activation pour les arêtes

Théorème (Lam, Shiu et Zhu en 1999)

Soit F une forêt. Alors $\chi'_g(F) \leq \Delta(F) + 2$.

Démonstration par stratégie d'activation : marque = **-** , actif = **-**

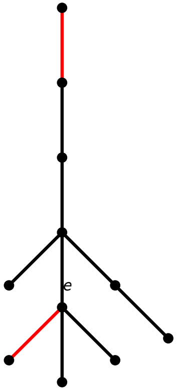


Stratégie d'activation pour les arêtes

Théorème (Lam, Shiu et Zhu en 1999)

Soit F une forêt. Alors $\chi'_g(F) \leq \Delta(F) + 2$.

Démonstration par stratégie d'activation : marque = - , actif = -

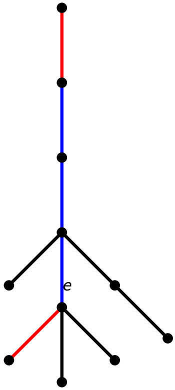


Stratégie d'activation pour les arêtes

Théorème (Lam, Shiu et Zhu en 1999)

Soit F une forêt. Alors $\chi'_g(F) \leq \Delta(F) + 2$.

Démonstration par stratégie d'activation : marque $=$ - , actif $=$ -

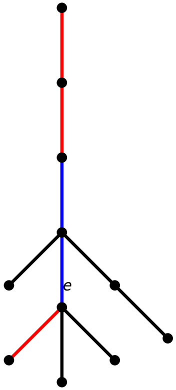


Stratégie d'activation pour les arêtes

Théorème (Lam, Shiu et Zhu en 1999)

Soit F une forêt. Alors $\chi'_g(F) \leq \Delta(F) + 2$.

Démonstration par stratégie d'activation : marque = -, actif = -

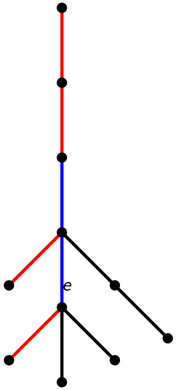


Stratégie d'activation pour les arêtes

Théorème (Lam, Shiu et Zhu en 1999)

Soit F une forêt. Alors $\chi'_g(F) \leq \Delta(F) + 2$.

Démonstration par stratégie d'activation : marque = – , actif = –

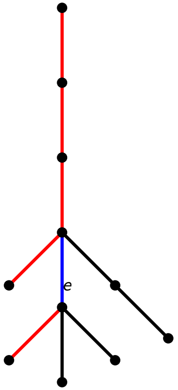


Stratégie d'activation pour les arêtes

Théorème (Lam, Shiu et Zhu en 1999)

Soit F une forêt. Alors $\chi'_g(F) \leq \Delta(F) + 2$.

Démonstration par stratégie d'activation : marque = – , actif = –

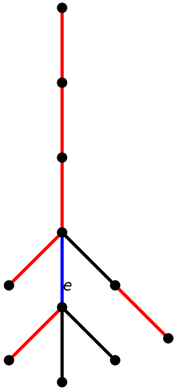


Stratégie d'activation pour les arêtes

Théorème (Lam, Shiu et Zhu en 1999)

Soit F une forêt. Alors $\chi'_g(F) \leq \Delta(F) + 2$.

Démonstration par stratégie d'activation : marque = – , actif = –

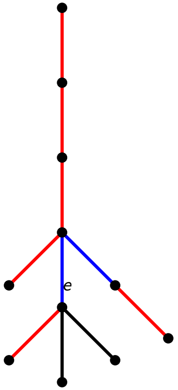


Stratégie d'activation pour les arêtes

Théorème (Lam, Shiu et Zhu en 1999)

Soit F une forêt. Alors $\chi'_g(F) \leq \Delta(F) + 2$.

Démonstration par stratégie d'activation : marque = – , actif = –

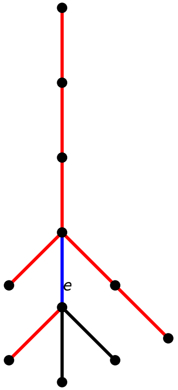


Stratégie d'activation pour les arêtes

Théorème (Lam, Shiu et Zhu en 1999)

Soit F une forêt. Alors $\chi'_g(F) \leq \Delta(F) + 2$.

Démonstration par stratégie d'activation : marque = − , actif = −

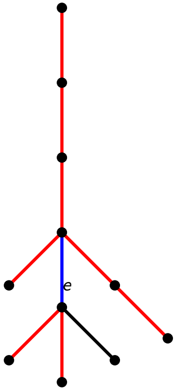


Stratégie d'activation pour les arêtes

Théorème (Lam, Shiu et Zhu en 1999)

Soit F une forêt. Alors $\chi'_g(F) \leq \Delta(F) + 2$.

Démonstration par stratégie d'activation : marque = – , actif = –

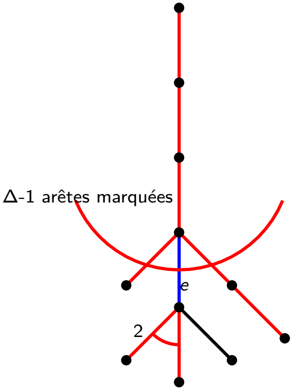


Stratégie d'activation pour les arêtes

Théorème (Lam, Shiu et Zhu en 1999)

Soit F une forêt. Alors $\chi'_g(F) \leq \Delta(F) + 2$.

Démonstration par stratégie d'activation : marque = - , actif = -



Quelques améliorations

Théorème (Erdös, Faigle, Hochtättler et Kern, 2003)

Pour tout $\Delta \geq 2$, il existe une forêt F de degré maximum Δ tel que $\chi'_g(F) = \Delta + 1$.

Théorème (Erdös, Faigle, Hochtättler et Kern, 2003 ; Andres, 2006)

Soit $\mathcal{F}_\Delta$ la classe des forêts de degré maximum Δ.
Alors pour $\Delta \neq 4$, $\chi'_g(\mathcal{F}_\Delta) = \Delta + 1$.

Le seul cas indéterminé est $\Delta = 4$: $5 \leq \chi'_g(\mathcal{F}_4) \leq 6$.

Analogie

Peut-on utiliser les résultats des forêts de la coloration ludique des sommets pour les graphes $(1, d)$-décomposables ?

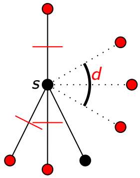
Sommaire

1. Jeu de coloration de sommets
2. Jeu de coloration d'arêtes
   - Définitions et premiers résultats
   - Forêts
   - Graphes $(1, d)$-décomposables
   - Chenilles

Difficultés

Pour les sommets : $G = F \cup G_2 \Rightarrow col_g(G) \leq col_g(F) + \Delta(G_2)$.

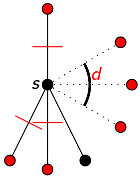
Sommets :



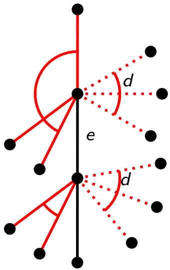
Difficultés

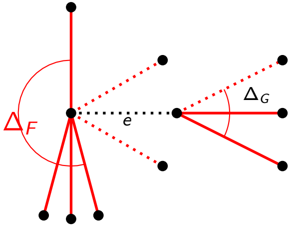
Pour les sommets : $G = F \cup G_2 \Rightarrow col_g(G) \leq col_g(F) + \Delta(G_2)$.
Pour les arêtes on ne peut pas conclure ce résultat :

Sommets :



Arêtes :

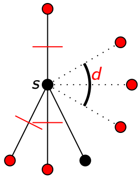




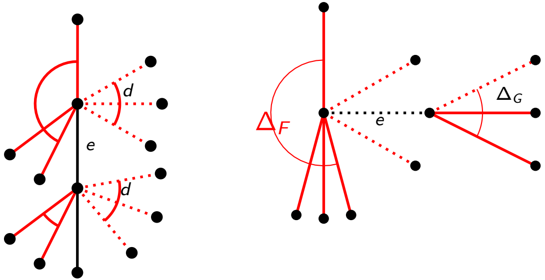
Difficultés

Pour les sommets : $G = F \cup G_2 \Rightarrow col_g(G) \leq col_g(F) + \Delta(G_2)$.
Pour les arêtes on ne peut pas conclure ce résultat :

Sommets :



Arêtes :



Ceci ne permet pas d'améliorer la borne connue : $\chi'_g(G) \leq 2\Delta - 1$.

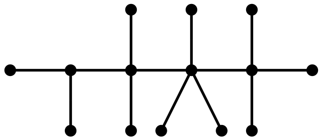
Sommaire

1. Jeu de coloration de sommets
2. Jeu de coloration d'arêtes
   - Définitions et premiers résultats
   - Forêts
   - Graphes $(1, d)$-décomposables
   - Chenilles

Définition

Définition

Une chenille est un arbre composé d'un chemin, appelé colonne, et d'arêtes incidentes à celle-ci, appelées pieds.

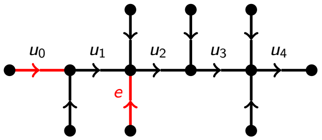


Marquage sur les chenilles

Théorème (Charpentier et P.)

Soit C une chenille de degré maximum Δ. Alors, $col'_g(C) \leq \max\{5, \Delta\}$.

- arêtes orientées
- Alice marque l'arête qui suit
- ou l'arête qui précède dans la colonne

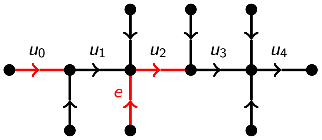


Marquage sur les chenilles

Théorème (Charpentier et P.)

Soit C une chenille de degré maximum Δ. Alors, $col'_g(C) \leq \max\{5, \Delta\}$.

- arêtes orientées
- Alice marque l'arête qui suit
- ou l'arête qui précède dans la colonne

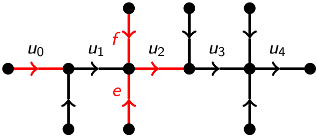


Marquage sur les chenilles

Théorème (Charpentier et P.)

Soit C une chenille de degré maximum Δ. Alors, $col'_g(C) \leq \max\{5, \Delta\}$.

- arêtes orientées
- Alice marque l'arête qui suit
- ou l'arête qui précède dans la colonne



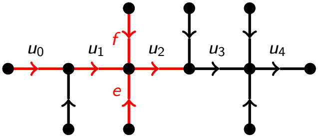
Quand une arête de la colonne est marquée, elle a au plus quatre arêtes voisines marquées.

Marquage sur les chenilles

Théorème (Charpentier et P.)

Soit C une chenille de degré maximum Δ. Alors, $col'_g(C) \leq \max\{5, \Delta\}$.

- arêtes orientées
- Alice marque l'arête qui suit
- ou l'arête qui précède dans la colonne



Quand une arête de la colonne est marquée, elle a au plus quatre arêtes voisines marquées. Quand un pied est marqué, il a au plus $\Delta - 1$ arêtes voisines.

Coloration sur les chenilles

Donc, d'après ce qu'on vient de voir :

Théorème (Charpentier et P.)

Soit $\mathcal{C}_\Delta$ la classe des chenilles de degré maximum Δ.
Pour $\Delta \geq 5$: $\chi'_g(\mathcal{C}_\Delta) = \Delta$

Coloration sur les chenilles

Donc, d'après ce qu'on vient de voir :

Théorème (Charpentier et P.)

Soit $\mathcal{C}_\Delta$ la classe des chenilles de degré maximum Δ.
Pour $\Delta \geq 5$: $\chi'_g(\mathcal{C}_\Delta) = \Delta$

Théorème (Charpentier et P.)

Pour $2 \leq \Delta \leq 4$: $\chi'_g(\mathcal{C}_\Delta) = \Delta + 1$.

Coloration sur les chenilles

Donc, d'après ce qu'on vient de voir :

Théorème (Charpentier et P.)

Soit $\mathcal{C}_\Delta$ la classe des chenilles de degré maximum Δ.
Pour $\Delta \geq 5$: $\chi'_g(\mathcal{C}_\Delta) = \Delta$

Théorème (Charpentier et P.)

Pour $2 \leq \Delta \leq 4$: $\chi'_g(\mathcal{C}_\Delta) = \Delta + 1$.

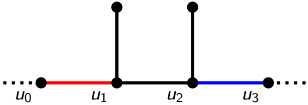
- $\Delta = 2$: c'est le cas des chaines.
- $\Delta = 3$: on va le voir ensemble.
- $\Delta = 4$: démonstration similaire à $\Delta = 3$.

Démonstration pour une chenille 3-régulière

Théorème (Charpentier et P.)

Si C est une chenille 3-régulière, alors, Bob a une stratégie gagnante sur C au jeu de coloration avec trois couleurs.

Avec quelles structures Bob peut-il s'assurer de gagner quand c'est à lui de jouer ?

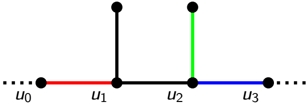


Démonstration pour une chenille 3-régulière

Théorème (Charpentier et P.)

Si C est une chenille 3-régulière, alors, Bob a une stratégie gagnante sur C au jeu de coloration avec trois couleurs.

Avec quelles structures Bob peut-il s'assurer de gagner quand c'est à lui de jouer ?

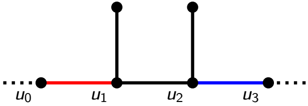


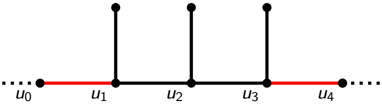
Démonstration pour une chenille 3-régulière

Théorème (Charpentier et P.)

Si C est une chenille 3-régulière, alors, Bob a une stratégie gagnante sur C au jeu de coloration avec trois couleurs.

Avec quelles structures Bob peut-il s'assurer de gagner quand c'est à lui de jouer ?



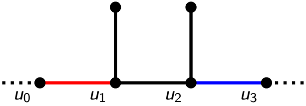


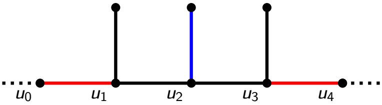
Démonstration pour une chenille 3-régulière

Théorème (Charpentier et P.)

Si C est une chenille 3-régulière, alors, Bob a une stratégie gagnante sur C au jeu de coloration avec trois couleurs.

Avec quelles structures Bob peut-il s'assurer de gagner quand c'est à lui de jouer ?



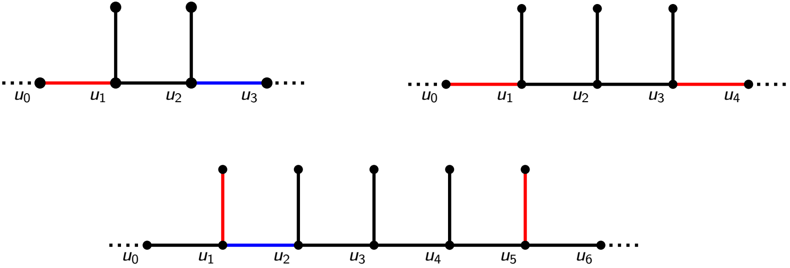


Démonstration pour une chenille 3-régulière

Théorème (Charpentier et P.)

Si C est une chenille 3-régulière, alors, Bob a une stratégie gagnante sur C au jeu de coloration avec trois couleurs.

Avec quelles structures Bob peut-il s'assurer de gagner quand c'est à lui de jouer ?

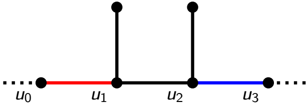


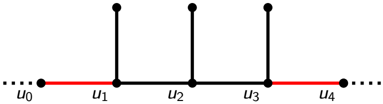
Démonstration pour une chenille 3-régulière

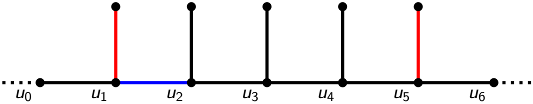
Théorème (Charpentier et P.)

Si C est une chenille 3-régulière, alors, Bob a une stratégie gagnante sur C au jeu de coloration avec trois couleurs.

Avec quelles structures Bob peut-il s'assurer de gagner quand c'est à lui de jouer ?



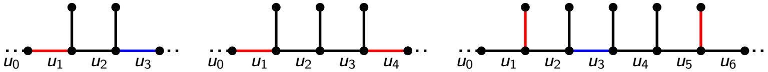




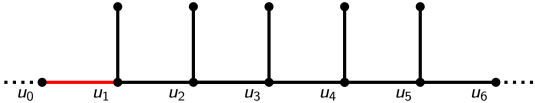
- si le bleu est sur un pied, c'est gagnant pour Bob aussi
- si l'arête n'est pas bleue mais rouge, c'est gagnant pour Bob aussi

Fin de la démonstration

Structures gagnantes pour Bob :

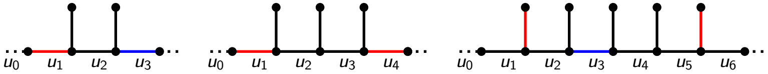


Stratégie :

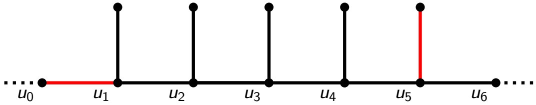


Fin de la démonstration

Structures gagnantes pour Bob :

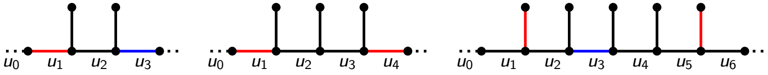


Stratégie :

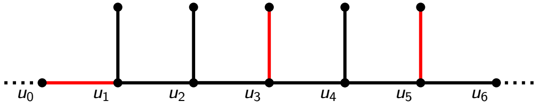


Fin de la démonstration

Structures gagnantes pour Bob :



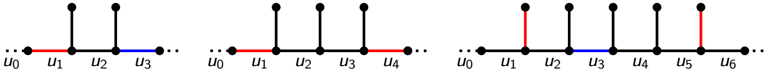
Stratégie :



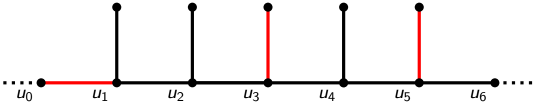
Donc Bob gagne avec trois couleurs et $\chi'_g(C) = 4$.

Fin de la démonstration

Structures gagnantes pour Bob :



Stratégie :



Donc Bob gagne avec trois couleurs et $\chi'_g(C) = 4$.
Pour le cas $\Delta = 4$, la démonstration est similaire mais avec plus de cas.

Bilan

Les forêts :

- Si $\Delta \neq 4$, alors $\chi'_g(\mathcal{F}_\Delta) = \Delta + 1$.
- Si $\Delta = 4$, alors $5 \leq \chi'_g(\mathcal{F}_\Delta) \leq 6$.

Problème ouvert : déterminer $\chi'_g(\mathcal{F}_4)$
Conjecture : $\chi'_g(\mathcal{F}_4) = 5$

Les chenilles :

- Si $\Delta \geq 5$, alors $\chi'_g(\mathcal{C}_\Delta) = \Delta$.
- Si $\Delta < 5$, alors $\chi'_g(\mathcal{C}_\Delta) = \Delta + 1$.

Bilan

Les forêts :

- Si $\Delta \neq 4$, alors $\chi'_g(\mathcal{F}_\Delta) = \Delta + 1$.
- Si $\Delta = 4$, alors $5 \leq \chi'_g(\mathcal{F}_\Delta) \leq 6$.

Problème ouvert : déterminer $\chi'_g(\mathcal{F}_4)$
Conjecture : $\chi'_g(\mathcal{F}_4) = 5$

Les chenilles :

- Si $\Delta \geq 5$, alors $\chi'_g(\mathcal{C}_\Delta) = \Delta$.
- Si $\Delta < 5$, alors $\chi'_g(\mathcal{C}_\Delta) = \Delta + 1$.

Ces valeurs là ne sont qu'une borne supérieure...

Problème ouvert : Pour une forêt ou une chenille G, déterminer la valeur exacte de $\chi'_g(G)$.

Merci pour votre attention !