Couverture des digraphes par des galaxies

Henri Perret du Cray

LIMOS, Clermont-Ferrand

JGA 2015

1. Introduction

2. Résultats connus et conjectures

3. Quelques résultats
   - digraphes 2-dégénérés
   - Les tournois

4. Conclusion

Introduction

Problème de Facility Location

- Données : un digraphe (V, A), des coûts sur les arcs et les sommets
- Résultat : un ensemble de sommets S et un ensemble d'arcs T tel que tout sommet de $V - S$ soit relié à un sommet de S par T qui minimise la somme des coûts.

Introduction

Problème de Facility Location

- Données : un digraphe (V, A), des coûts sur les arcs et les sommets
- Résultat : un ensemble de sommets S et un ensemble d'arcs T tel que tout sommet de $V - S$ soit relié à un sommet de S par T qui minimise la somme des coûts.

Graphe de Facility Location

Adjacence entre deux arcs :

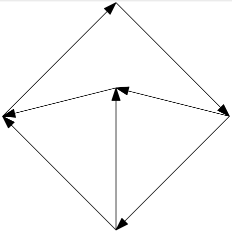
Introduction

Problème de Facility Location

- Données : un digraphe (V, A), des coûts sur les arcs et les sommets
- Résultat : un ensemble de sommets S et un ensemble d'arcs T tel que tout sommet de $V - S$ soit relié à un sommet de S par T qui minimise la somme des coûts.

Graphe de Facility Location

Adjacence entre deux arcs :



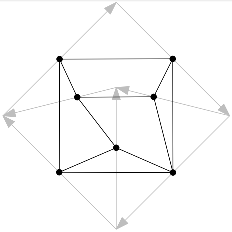
Introduction

Problème de Facility Location

- Données : un digraphe (V, A), des coûts sur les arcs et les sommets
- Résultat : un ensemble de sommets S et un ensemble d'arcs T tel que tout sommet de $V - S$ soit relié à un sommet de S par T qui minimise la somme des coûts.

Graphe de Facility Location

Adjacence entre deux arcs :



Equivalence entre :

- Résoudre Facility Location dans D.
- Résoudre Stable Maximum dans $FL(D)$.

Le problème du stable reste NP-Complet dans les graphes de Facility Location

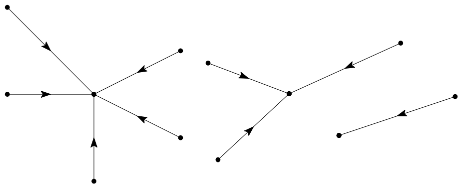
Coloration des graphes de FL

Ce problème revient à la coloration par des galaxies dans le digraphe d'origine.

Coloration des arcs : chaque couleur induit une galaxie.

Quelques définitions

- étoile : tous les arcs partagent la même tête ;
- galaxie : ensemble d'étoiles ;
- on note *dst*(D) (*directed star arboricity*) le nombre de galaxies nécessaires pour couvrir l'ensemble des arcs d'un digraphe D.



$$\Delta(D) = max\{d^+(x) + d^-(x), x \in V(D)\}$$

1 Introduction

2 Résultats connus et conjectures

3 Quelques résultats

4 Conclusion

Résultats connus et conjectures

O. Amini, F. Havet, F. Huc, et S. Thomassé (2010)

Pour tout digraphe D, $dst(D) \leq 2\Delta^+ + 1$.

D. Gonçalves, F. Havet, A. Pinlou, et S. Thomassé (2012)

Pour tout digraphe D, $dst(D) \leq \Delta + 1$.

Conjectures (O. Amini, F. Havet, F. Huc, et S. Thomassé (2010))

1. $dst(D) \leq 2\Delta^+$, si $\Delta^+ \geq 2$
2. $dst(D) \leq \Delta$, si $\Delta \geq 3$

Conjectures (O. Amini, F. Havet, F. Huc, et S. Thomassé (2010))

1. $dst(D) \leq 2\Delta^+$, si $\Delta^+ \geq 2$
2. $dst(D) \leq \Delta$, si $\Delta \geq 3$

- Ces 2 conjectures sont vérifiées dans les digraphes acycliques.
- Il existe des digraphes acycliques tels que $dst(D) = 2\Delta^+$.
- La conjecture 2 est vraie dans le cas $\Delta = 3$.

1 Introduction

2 Résultats connus et conjectures

3 Quelques résultats
- digraphes 2-dégénérés
- Les tournois

4 Conclusion

Les digraphes 2-dégénérés

Définition : graphe k-dégénéré

- G vide
- $(G - x)$ k-dégénéré

Le digraphe D est k-dégénéré si son graphe sous-jacent est k-dégénéré.

Théorème 1

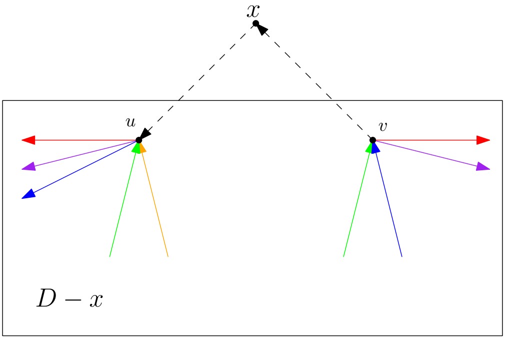
Soit D un digraphe 2-dégénéré, $dst(D) \leq \Delta^+ + 2$.

Par récurrence : $D = (V, A)$ un digraphe 2-dégénéré et $x \in V$ de degré inférieur à 2 tel que $D - x$ est 2-dégénéré.
Supposons $D - x$ $(\Delta^+ + 2)$-colorable avec au plus 2 couleurs entrantes par sommet.

3 cas possibles,

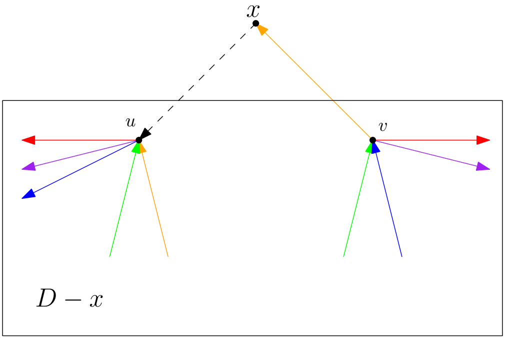
Par récurrence : $D = (V, A)$ un digraphe 2-dégénéré et $x \in V$ de degré inférieur à 2 tel que $D - x$ est 2-dégénéré.
Supposons $D - x$ $(\Delta^+ + 2)$-colorable avec au plus 2 couleurs entrantes par sommet.

3 cas possibles,



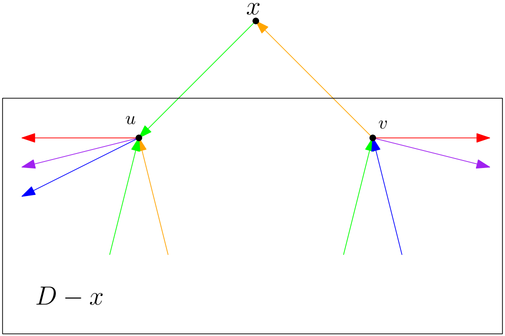
Par récurrence : $D = (V, A)$ un digraphe 2-dégénéré et $x \in V$ de degré inférieur à 2 tel que $D - x$ est 2-dégénéré.
Supposons $D - x$ $(\Delta^+ + 2)$-colorable avec au plus 2 couleurs entrantes par sommet.

3 cas possibles,



Par récurrence : $D = (V, A)$ un digraphe 2-dégénéré et $x \in V$ de degré inférieur à 2 tel que $D - x$ est 2-dégénéré.
Supposons $D - x$ $(\Delta^+ + 2)$-colorable avec au plus 2 couleurs entrantes par sommet.

3 cas possibles,



D est $(\Delta^+ + 2)$-colorable.

Les tournois

Définition : tournoi

Orientation d'un graphe complet.

Théorème 2

Soit T un tournoi à n sommets, $n > 3$, $dst(T) \leq \Delta$ ($\Delta = n - 1$).

Corollaire 1

Soit T un tournoi à n sommets, $n > 3$, $dst(T) \leq 2\Delta^{+}$.

Tournois : démonstration

Théorème 2

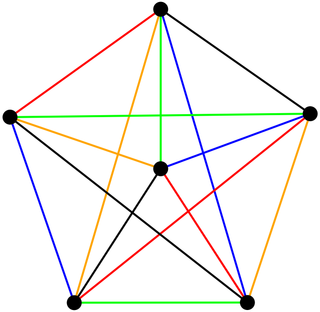
Soit T un tournoi à n sommets, $n > 3$, $dst(T) \leq \Delta$ $(\Delta = n - 1)$.

Tournois : démonstration

Théorème 2

Soit T un tournoi à n sommets, $n > 3$, $dst(T) \leq \Delta$ ($\Delta = n - 1$).

Vrai pour les cas où n est pair (partition en $n - 1$ couplages parfaits).



Tournois : démonstration

Théorème 2

Soit T un tournoi à n sommets, $n > 3$, $dst(T) \leq \Delta$ ($\Delta = n - 1$).

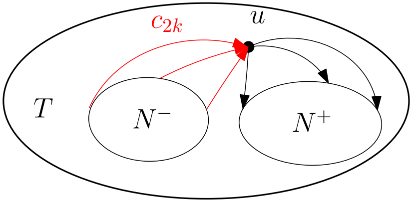
Idée de la preuve :

- supprimer un sommet pour se ramener au cas pair,
- étendre la coloration obtenue avec une seule couleur supplémentaire.

Tournois : démonstration

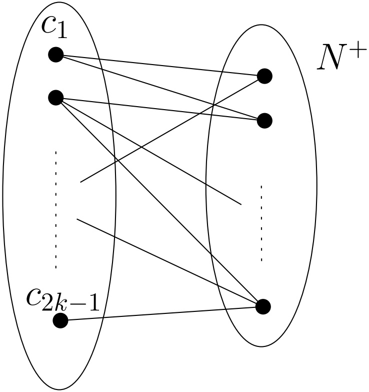
Théorème 2

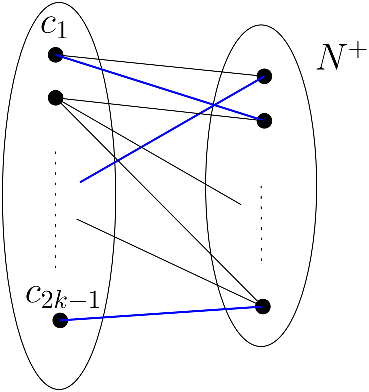
Soit T un tournoi à n sommets, $n > 3$, $dst(T) \leq \Delta$ ($\Delta = n - 1$).



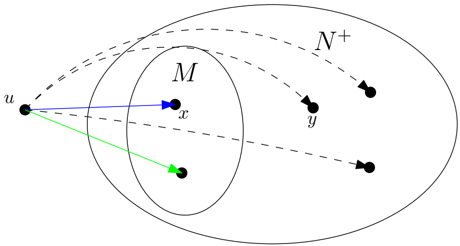
But : colorer les arcs sortant de u.

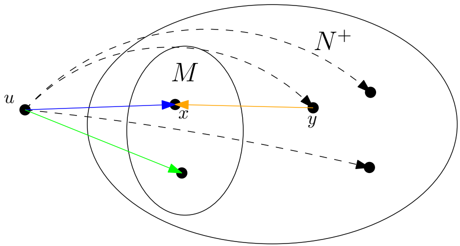
$|T| = 2k + 1$
$d^+(u) \geq d^-(u)$
$d^-(u) > 0$

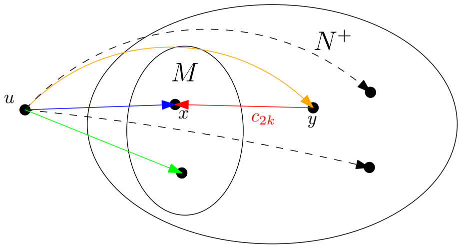

c_1
N^+
c_{2k-1}



Trouver un couplage maximum.


N^+
M
u
x
y


N^+
M
u
x
y


N^+
M
u
x
c_{2k}
y

1 Introduction

2 Résultats connus et conjectures

3 Quelques résultats

4 Conclusion

Pistes de recherche

- Les principales conjectures restent ouvertes.
- Améliorer la borne sur d'autres sous-classes de digraphes.

Pistes de recherche

- Les principales conjectures restent ouvertes.
- Améliorer la borne sur d'autres sous-classes de digraphes.

Merci de votre attention.

- O. Amini, F. Havet, F. Huc, et S. Thomassé. WDM and directed star arboricity. Combinatorics, Probability & Computing, 2010.
- D. Gonçalves, F. Havet, A. Pinlou, et S. Thomassé. On spanning galaxies in digraphs. Discrete Applied Mathematics, 2012.