Problèmes de détection de partition en communautés dans les graphes

Cristina Bazgan, Janka Chlebíková, Thomas Pontoizeau

JGA Orléans 2015

5 novembre 2015

Plan

Motivations

Chercher une communauté ou une partition en communautés ?

- s-Club [Mokken '79]
- Densités [Mancoridis et al. '98]

- Partition satisfaisante [Bazgan et al. '06]
- Partition en communautés [Olsen '13]

Définitions

Partition en communautés

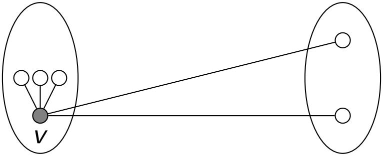
Définition

Une partition en k communautés dans un graphe connexe $G = (V, E)$ est une partition $\Pi = \{C_1, \ldots, C_k\}$ de V, $k \geq 2$, telle que $\forall i \in \{1, \ldots, k\}, |C_i| \geq 2$, et $\forall v \in C_i, \forall C_j \in \Pi$, $j \neq i$, la contrainte suivante est respectée :

$$\frac{|N_{C_i}(v)|}{|C_i| - 1} \geq \frac{|N_{C_j}(v)|}{|C_j|} \qquad (*)$$

Définitions

Degré intérieur / degré extérieur



- $d_{in}(v) = 3$
- $d_{out}(v) = 2$

Définitions

Partition en deux communautés

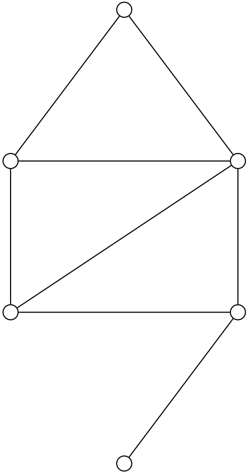
Définition

Une partition en deux communautés dans un graphe connexe $G = (V, E)$ est une partition $\Pi = \{C_1, C_2\}$ de V, telle que $|C_1|, |C_2| \geq 2$, et $\forall v \in C_i, \forall C_j \in \Pi$, $j \neq i$, la contrainte suivante est respectée :

$$\frac{d_{in}(v)}{|C_i| - 1} \geq \frac{d_{out}(v)}{|C_j|} \qquad (*)$$

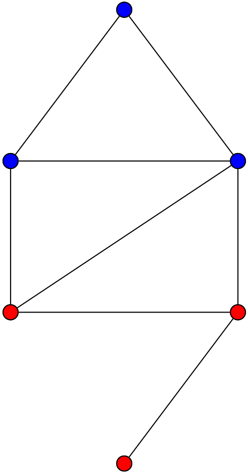
Exemple

Partition en k communautés



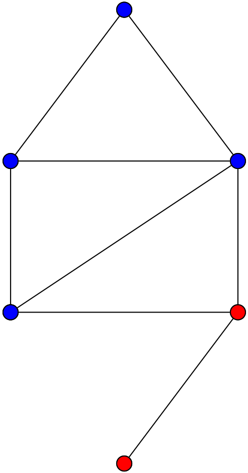
Exemple

Partition en k communautés

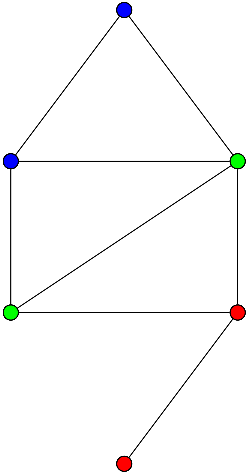


Exemple

Partition en k communautés

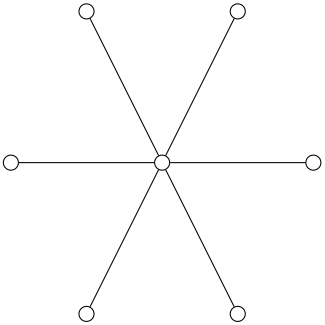


Exemple
Partition en k communautés



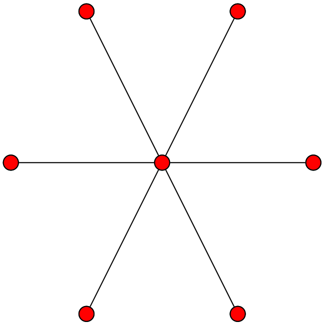
Exemple

Partition en k communautés



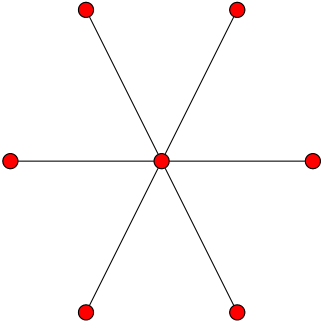
Exemple

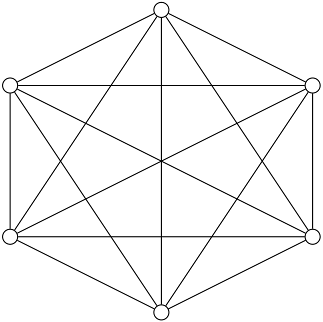
Partition en k communautés



Exemple

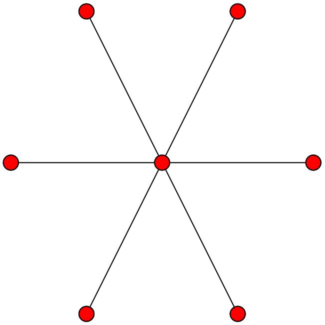
Partition en k communautés

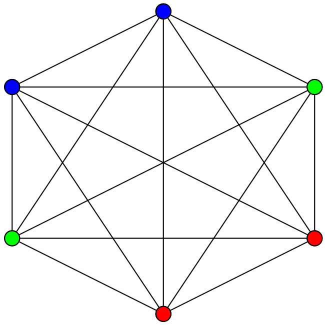




Exemple

Partition en k communautés





Résultats connus

Partition en k communautés

- Déterminer s'il existe une partition en communautés dont une partie contient un sous ensemble $S \subset V$ donné en entrée est NP-complet. [Olsen '13]
- Déterminer une structure de communauté quelconque est polynomial. [Olsen '13]
- Déterminer si un graphe contient une partition en deux communautés de taille égale est NP-complet. [Estivill-Castro et Parsa '13]

Résultats connus
Partition en deux communautés

Classes de graphes ayant toujours une partition en deux communautés trouvable en temps polynomial :

- graphes 3-réguliers, même si la connexité est requise.
- graphes de largeur arborescente bornée (sauf les étoiles), même si l'équilibre est requis [Bazgan et al. '06].
- graphes de degré maximum 2.
- graphes complets.

Problèmes

Partition en deux communautés

PARTITION EN DEUX COMMUNAUTES

Input : Un graphe $G = (V, E)$
Question : Existe-t'il une partition de V en deux communautés ?

PARTITION EN DEUX COMMUNAUTES EQUILIBREE

Input : Un graphe $G = (V, E)$
Question : Existe-t'il une partition de V en deux communautés de taille égale ?

Théorème

Une partition en deux communautés existe toujours dans les graphes 3-réguliers et une telle partition peut se trouver en temps polynomial.

Algorithme polynomial
Idée de l'algorithme

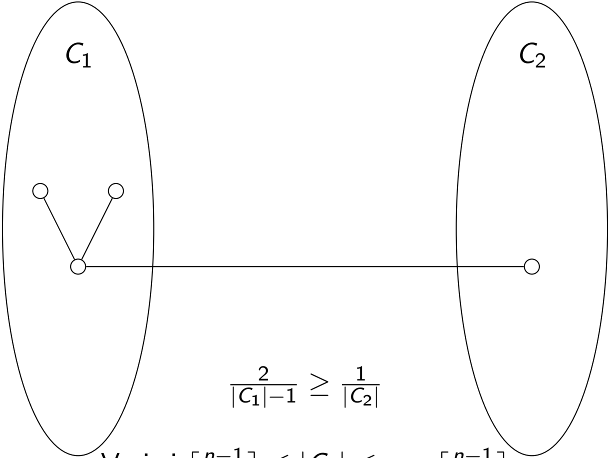
Lemme

Soit G un graphe 3-régulier de taille n et $\{C_1, C_2\}$ une partition de V.

- Si $\lceil \frac{n-1}{3} \rceil \leq |C_1| \leq n - \lceil \frac{n-1}{3} \rceil$, alors tout sommet de C_1 ayant au plus un voisin dans C_2 satisfait la condition (*).
- Si $|C_1| = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ ou $|C_1| = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, alors tout sommet de C_1 ayant deux voisins dans C_2 satisfait la condition (*).

Algorithme polynomial

Idée de l'algorithme

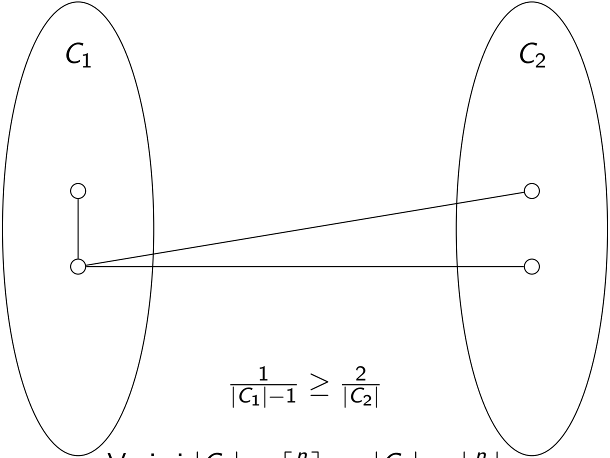


$$\frac{2}{|C_1|-1} \geq \frac{1}{|C_2|}$$

Vrai si $\lceil \frac{n-1}{3} \rceil \leq |C_1| \leq n - \lceil \frac{n-1}{3} \rceil$

Algorithme polynomial

Idée de l'algorithme



$$\frac{1}{|C_1|-1} \geq \frac{2}{|C_2|}$$

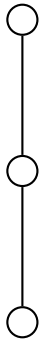
Vrai si $|C_1| = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ ou $|C_1| = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$

Algorithme polynomial

Idée de l'algorithme

Algorithme polynomial
Idée de l'algorithme

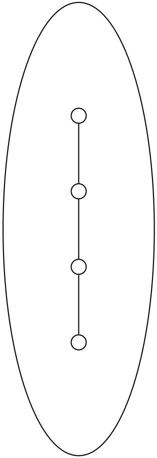
Algorithme polynomial
Idée de l'algorithme



Algorithme polynomial

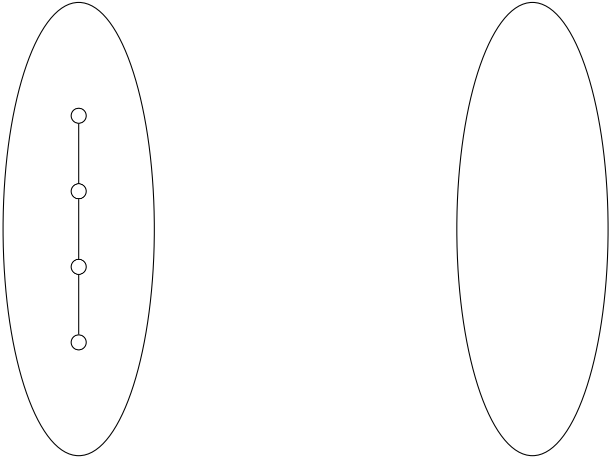
Idée de l'algorithme

Algorithme polynomial
Idée de l'algorithme



$$|C_1| = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil$$

Algorithme polynomial
Idée de l'algorithme

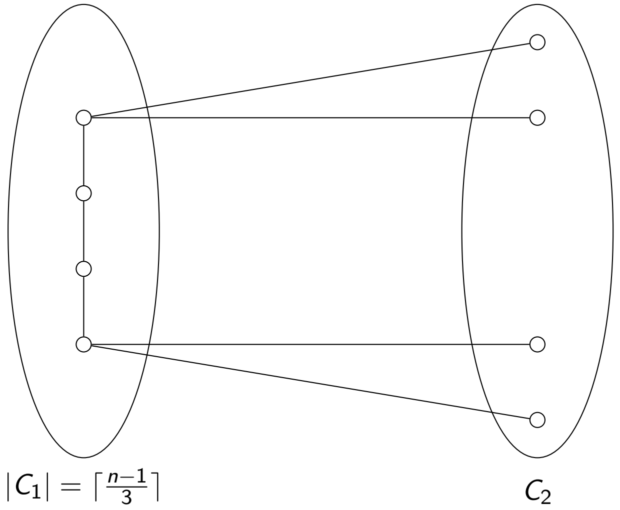


$|C_1| = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil$

C_2

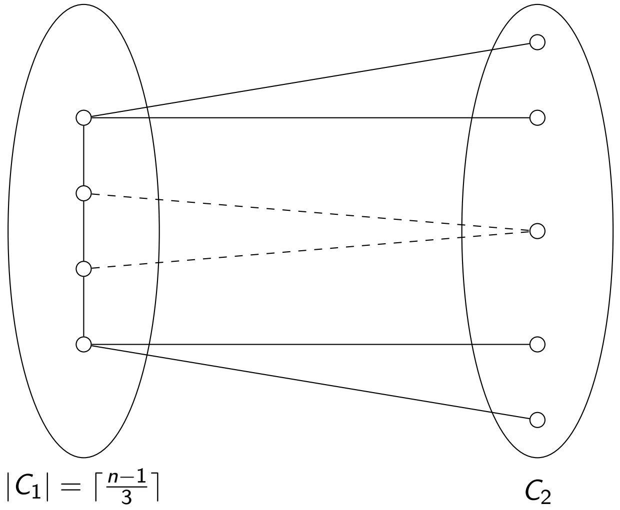
Algorithme polynomial

Idée de l'algorithme

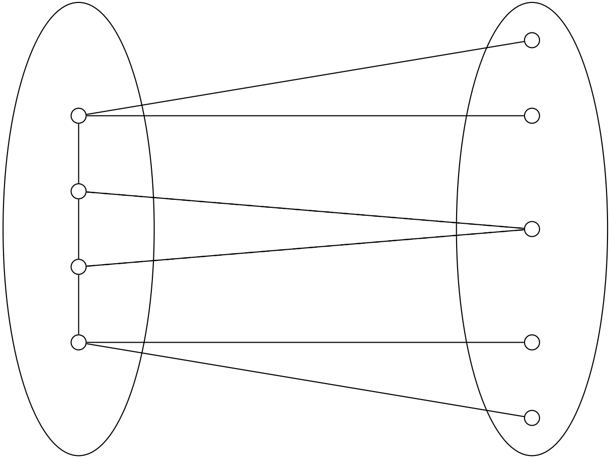


Algorithme polynomial

Idée de l'algorithme



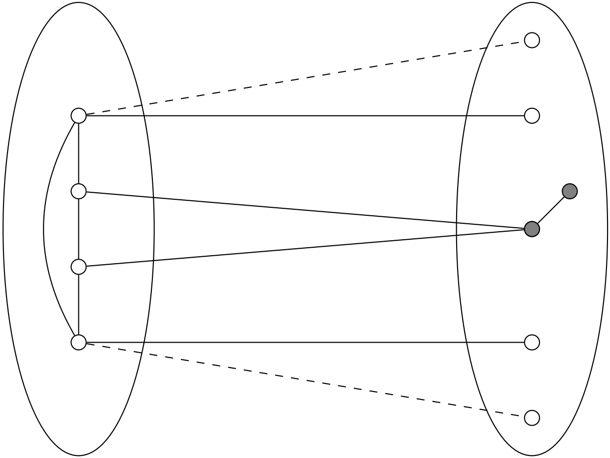
Algorithme polynomial
Idée de l'algorithme



$|C_1| = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil$ C_2

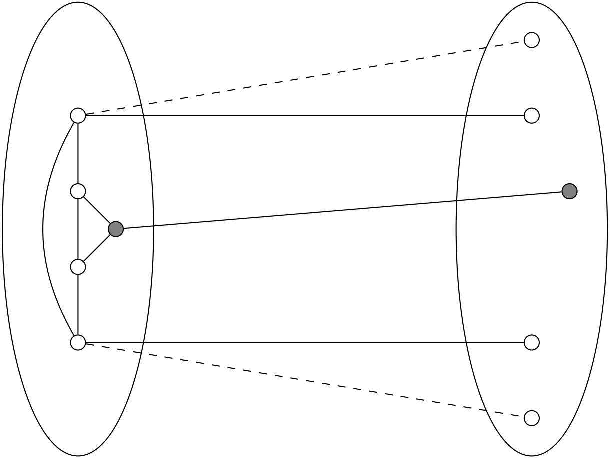
Algorithme polynomial

Idée de l'algorithme



$|C_1| = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil$ C_2

Algorithme polynomial
Idée de l'algorithme



$|C_1| = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil + 1$

C_2

Algorithme polynomial
Idée de l'algorithme

- A chaque fois que l'on transfert un tel sommet $w \in C_2$ dans C_1, au moins deux sommets dans C_1 ont trois voisins dans leur partie et $|C_1| = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil + 1$

Algorithme polynomial
Idée de l'algorithme

- A chaque fois que l'on transfert un tel sommet $w \in C_2$ dans C_1, au moins deux sommets dans C_1 ont trois voisins dans leur partie et $|C_1| = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil + 1$
- A chaque fois que l'on transfert k tels sommets $w \in C_2$ dans C_1, au moins $2k$ sommets dans C_1 ont trois voisins dans leur partie et $|C_1| = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil + k$.

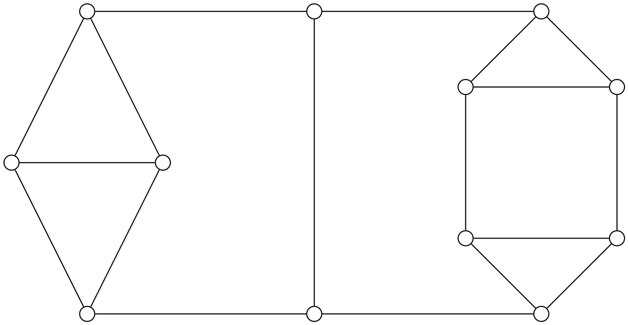
Algorithme polynomial

Idée de l'algorithme

- A chaque fois que l'on transfert un tel sommet $w \in C_2$ dans C_1, au moins deux sommets dans C_1 ont trois voisins dans leur partie et $|C_1| = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil + 1$
- A chaque fois que l'on transfert k tels sommets $w \in C_2$ dans C_1, au moins $2k$ sommets dans C_1 ont trois voisins dans leur partie et $|C_1| = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil + k$.
- Si l'on pouvait transférer $\lceil \frac{n-1}{3} \rceil$ tels sommets $w \in C_2$ dans C_1, on aurait au moins $2\lceil \frac{n-1}{3} \rceil$ sommets dans C_1 ont trois voisins dans leur partie et $|C_1| = 2\lceil \frac{n-1}{3} \rceil$ et le graphe ne serait pas connexe.

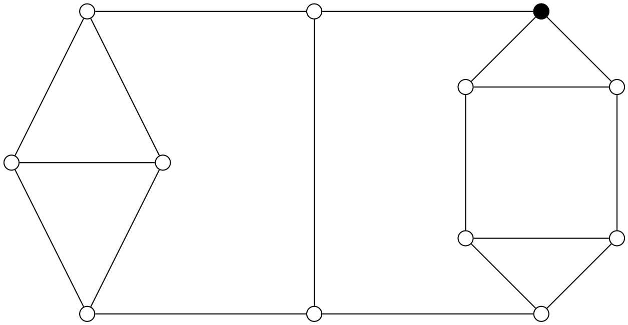
Algorithme polynomial

Exemple d'une partition non connexe



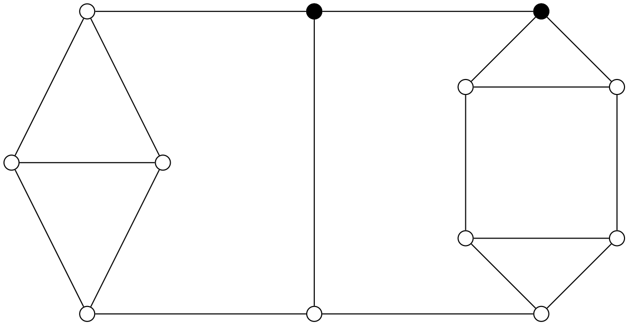
Algorithme polynomial

Exemple d'une partition non connexe



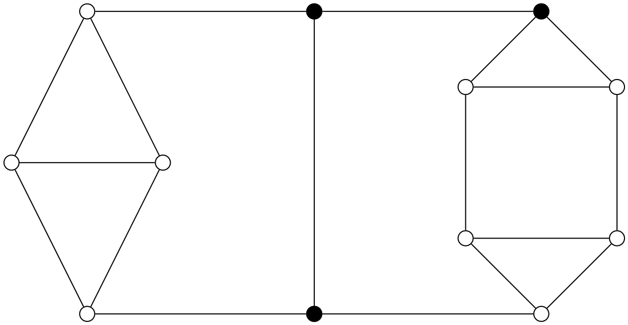
Algorithme polynomial

Exemple d'une partition non connexe



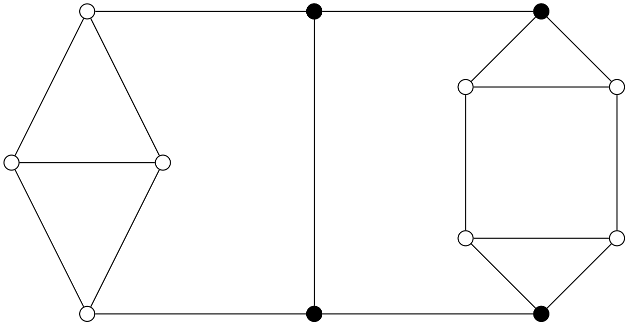
Algorithme polynomial

Exemple d'une partition non connexe



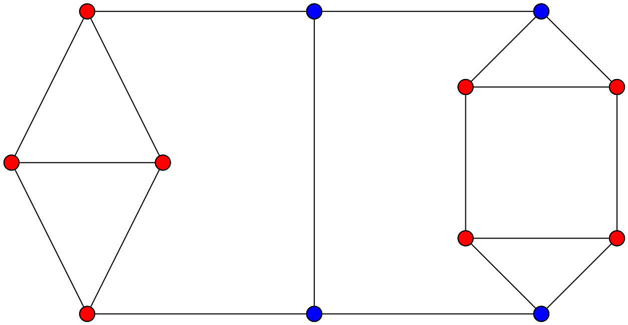
Algorithme polynomial

Exemple d'une partition non connexe



Algorithme polynomial

Exemple d'une partition non connexe



Algorithme polynomial
Avec connexité

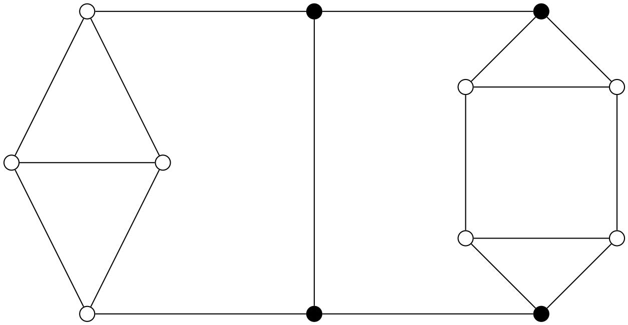
Gérer la connexité ?

Théorème

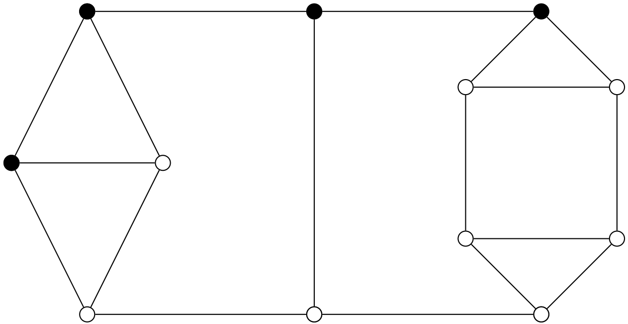
Une partition en deux communautés connexes existe toujours dans les graphes 3-réguliers et une telle partition peut se trouver en temps polynomial.

Algorithme polynomial

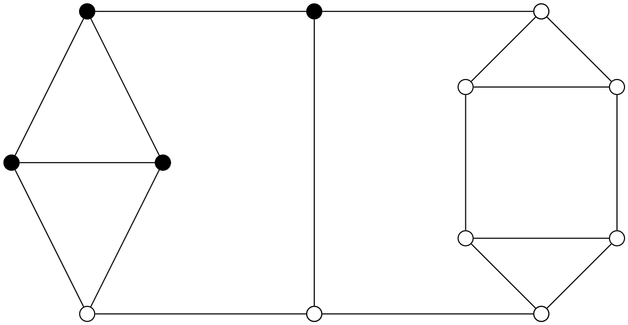
Avec connexité



Algorithme polynomial
Avec connexité

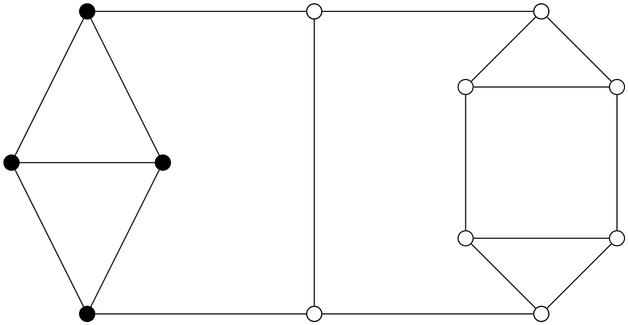


Algorithme polynomial
Avec connexité



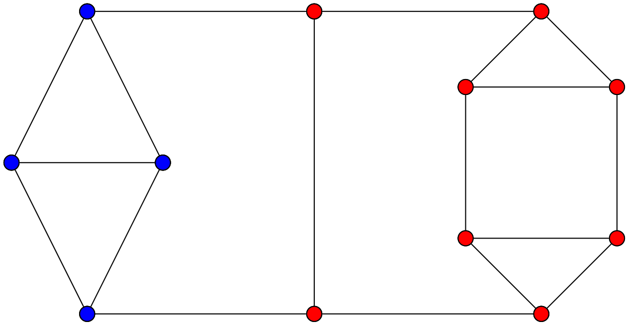
Algorithme polynomial

Avec connexité



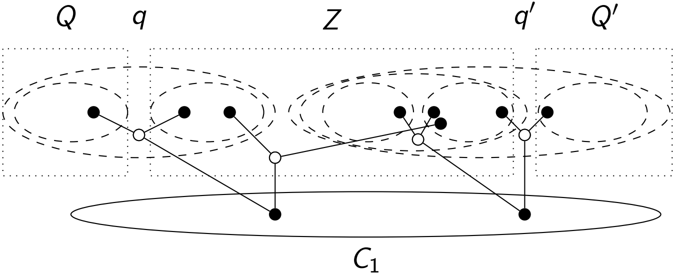
Algorithme polynomial

Avec connexité



Algorithme polynomial

Avec connexité



PARTITION EN DEUX COMMUNAUTES EQUILIBREES

Input : Un graphe $G = (V, E)$
Question : Existe-t'il une partition de V en deux communautés de taille égale ?

PARTITION EN DEUX COMMUNAUTES EQUILIBREES

Input : Un graphe $G = (V, E)$
Question : Existe-t'il une partition de V en deux communautés de taille égale ?

PARTITION SATISFAISANTE EQUILIBREE

Input : Un graphe $G = (V, E)$
Question : Existe-t'il une partition des sommets en deux sous-ensembles de taille égale tels que $\forall v \in V, d_{in}(v) \geq d_{out}(v)$?

PARTITION EN DEUX COMMUNAUTES EQUILIBREES

Input : Un graphe $G = (V, E)$
Question : Existe-t'il une partition de V en deux communautés de taille égale ?

PARTITION SATISFAISANTE EQUILIBREE

Input : Un graphe $G = (V, E)$
Question : Existe-t'il une partition des sommets en deux sous-ensembles de taille égale tels que $\forall v \in V, d_{in}(v) \geq d_{out}(v)$?

Théorème

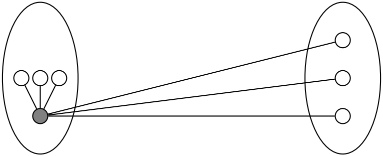
PARTITION SATISFAISANTE EQUILIBREE est NP-complet [Bazgan et al. '06].

Proposition

Soit $G = (V, E)$ un graphe avec n sommets sans sommet de degré $n - 1$.
Alors PARTITION SATISFAISANTE EQUILIBREE et PARTITION EN DEUX COMMUNAUTES EQUILIBREES sont équivalents sur G.

Proposition

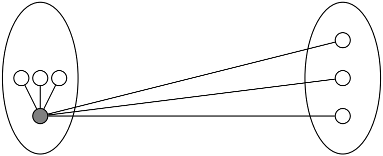
Soit $G = (V, E)$ un graphe avec n sommets sans sommet de degré $n - 1$.
Alors PARTITION SATISFAISANTE EQUILIBREE et PARTITION EN DEUX COMMUNAUTES EQUILIBREES sont équivalents sur G.



Proposition

Soit $G = (V, E)$ un graphe avec n sommets sans sommet de degré $n-1$.
Alors PARTITION SATISFAISANTE EQUILIBREE et PARTITION EN DEUX COMMUNAUTES EQUILIBREES sont équivalents sur G.

$\frac{n}{2} - 1$

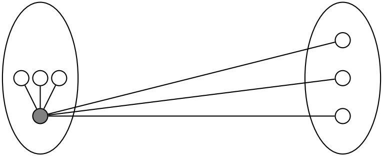


$\frac{n}{2}$

Proposition

Soit $G = (V, E)$ un graphe avec n sommets sans sommet de degré $n - 1$.
Alors PARTITION SATISFAISANTE EQUILIBREE et PARTITION EN DEUX COMMUNAUTES EQUILIBREES sont équivalents sur G.

$\frac{n}{2} - 1$



$\frac{n}{2}$

$$\frac{\frac{n}{2}-1}{\frac{n}{2}-1} \geq \frac{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}$$

Théorème

PARTITION EN DEUX COMMUNAUTES EQUILIBREES est NP-complet.

Conclusion
Problèmes ouverts

Conclusion

Problèmes ouverts

- PARTITION EN DEUX COMMUNAUTES dans d'autres classes de graphes.

Conclusion

Problèmes ouverts

- PARTITION EN DEUX COMMUNAUTES dans d'autres classes de graphes.
- Complexité de déterminer si un graphe admet une partition en k communautés avec k fixé.

Conclusion

Problèmes ouverts

- PARTITION EN DEUX COMMUNAUTES dans d'autres classes de graphes.
- Complexité de déterminer si un graphe admet une partition en k communautés avec k fixé.
- Complexité de déterminer s'il existe une structure de communauté dont une des parties est de taille au moins k

Merci !