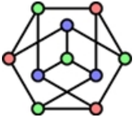
Indice chromatique fort des graphes distances

Maxime Savaro

2 novembre 2015



Graphe distance

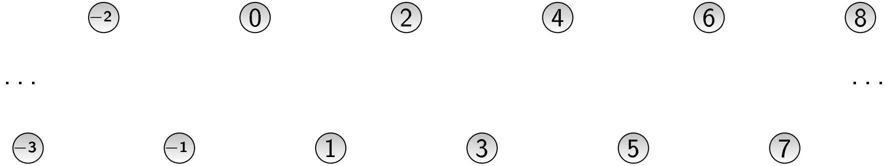
Graphe distance

Soit $D \in \mathbb{N}^*$ (les éléments de D sont appelés *générateurs*). Le *graphe distance* généré par D est le graphe $G(D) = (\mathbb{Z}, E)$ où $(a, b) \in E$ ssi $|b - a| = d \in D$. L'arête (a, b) est alors dite de type d. En particulier, $G(D)$ est un graphe infini Δ-régulier, avec $\Delta = 2|D|$.

Graphe distance

Graphe distance

Soit $D \in \mathbb{N}^*$ (les éléments de D sont appelés *générateurs*). Le *graphe distance* généré par D est le graphe $G(D) = (\mathbb{Z}, E)$ où $(a, b) \in E$ ssi $|b - a| = d \in D$. L'arête (a, b) est alors dite de type d. En particulier, $G(D)$ est un graphe infini Δ-régulier, avec $\Delta = 2|D|$.

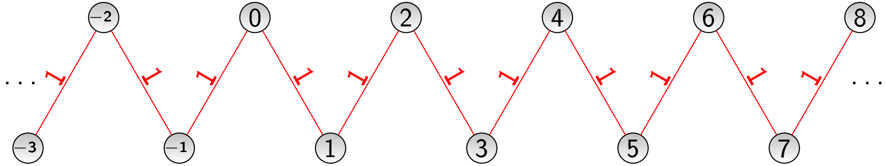


Le graphe distance $G(1, 2)$.

Graphe distance

Graphe distance

Soit $D \in \mathbb{N}^*$ (les éléments de D sont appelés *générateurs*). Le *graphe distance* généré par D est le graphe $G(D) = (\mathbb{Z}, E)$ où $(a, b) \in E$ ssi $|b - a| = d \in D$. L'arête (a, b) est alors dite de type d. En particulier, $G(D)$ est un graphe infini Δ-régulier, avec $\Delta = 2|D|$.

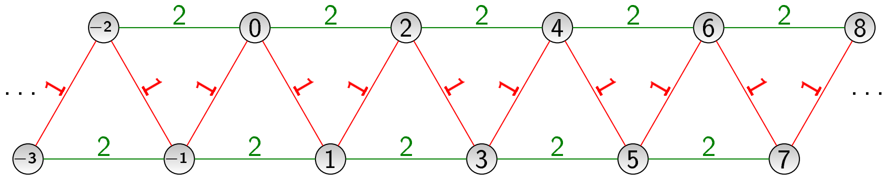


Le graphe distance $G(1, 2)$.

Graphe distance

Graphe distance

Soit $D \in \mathbb{N}^*$ (les éléments de D sont appelés *générateurs*). Le *graphe distance* généré par D est le graphe $G(D) = (\mathbb{Z}, E)$ où $(a, b) \in E$ ssi $|b - a| = d \in D$. L'arête (a, b) est alors dite de type d. En particulier, $G(D)$ est un graphe infini Δ-régulier, avec $\Delta = 2|D|$.

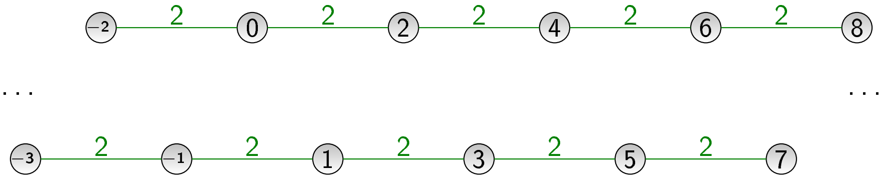


Le graphe distance $G(1, 2)$.

Graphe distance

Graphe distance

Soit $D \in \mathbb{N}^*$ (les éléments de D sont appelés *générateurs*). Le *graphe distance* généré par D est le graphe $G(D) = (\mathbb{Z}, E)$ où $(a, b) \in E$ ssi $|b - a| = d \in D$. L'arête (a, b) est alors dite de type d. En particulier, $G(D)$ est un graphe infini Δ-régulier, avec $\Delta = 2|D|$.

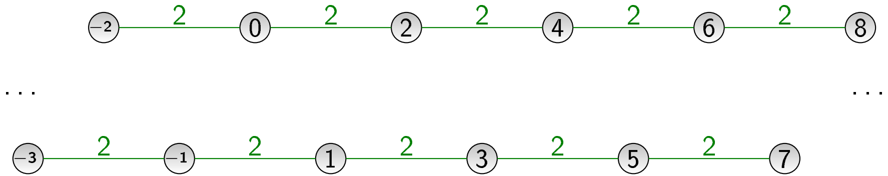


Le graphe distance $G(1, 2)$.

Graphe distance

Graphe distance

Soit $D \in \mathbb{N}^*$ (les éléments de D sont appelés *générateurs*). Le *graphe distance* généré par D est le graphe $G(D) = (\mathbb{Z}, E)$ où $(a, b) \in E$ ssi $|b - a| = d \in D$. L'arête (a, b) est alors dite de type d. En particulier, $G(D)$ est un graphe infini Δ-régulier, avec $\Delta = 2|D|$.



Le graphe distance $G(1, 2)$.

On peut supposer sans perte de généralité que $\text{pgcd}(D) = 1$.

Résultats élémentaires sur $\chi(D)$

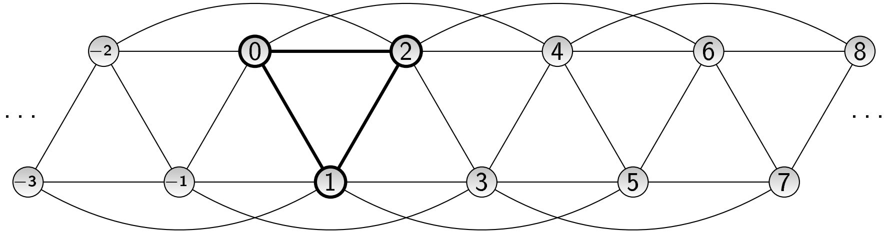
Lemme (Folklore)

Si $[\![1,k]\!] \subset D \subset \mathbb{N} \setminus (k+1)\mathbb{N}$, alors $\chi(D) = k+1$.

Résultats élémentaires sur $\chi(D)$

Lemme (Folklore)

Si $[\![1, k]\!] \subset D \subset \mathbb{N} \setminus (k+1)\mathbb{N}$, alors $\chi(D) = k + 1$.

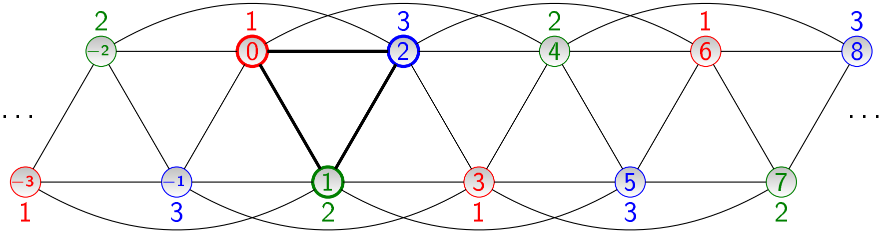


$G(1, 2, 4)$

Résultats élémentaires sur $\chi(D)$

Lemme (Folklore)

Si $[\![1,k]\!] \subset D \subset \mathbb{N} \setminus (k+1)\mathbb{N}$, alors $\chi(D) = k+1$.

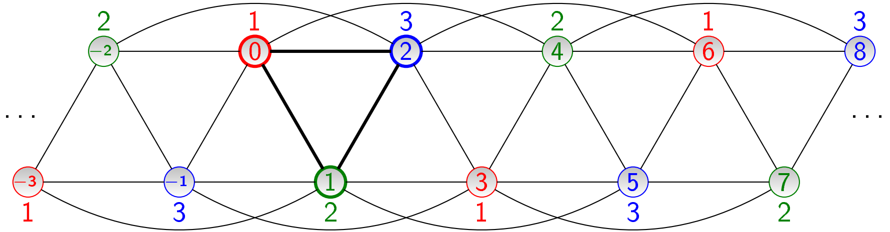


$G(1,2,4)$

Résultats élémentaires sur $\chi(D)$

Lemme (Folklore)

Si $[\![1,k]\!] \subset D \subset \mathbb{N} \setminus (k+1)\mathbb{N}$, alors $\chi(D) = k+1$.



$G(1,2,4)$

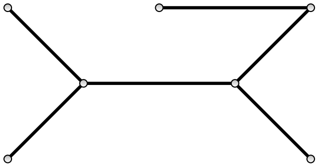
Lemme (Walther)

$$\chi(D) \leq |D| + 1.$$

L'indice chromatique fort (Fouquet, Jolivet, 1983)

k-coloration forte d'arêtes

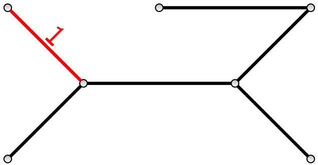
Une *k-coloration forte d'arêtes* d'un graphe G est une application $c : E(G) \to \{1, \ldots, k\}$ telle que deux arêtes adjacentes ou adjacentes à une même arête reçoivent des couleurs différentes.
L'*indice chromatique fort* de G, $\chi'_s(G)$, est le plus petit entier k pour lequel G admet une k-coloration forte d'arêtes.



L'indice chromatique fort (Fouquet, Jolivet, 1983)

k-coloration forte d'arêtes

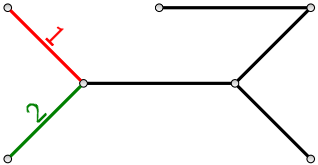
Une *k-coloration forte d'arêtes* d'un graphe G est une application $c : E(G) \to \{1, \ldots, k\}$ telle que deux arêtes adjacentes ou adjacentes à une même arête reçoivent des couleurs différentes.
L'*indice chromatique fort* de G, $\chi'_s(G)$, est le plus petit entier k pour lequel G admet une k-coloration forte d'arêtes.



L'indice chromatique fort (Fouquet, Jolivet, 1983)

k-coloration forte d'arêtes

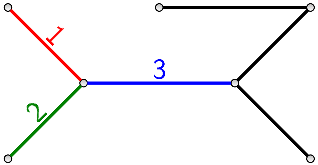
Une *k-coloration forte d'arêtes* d'un graphe G est une application $c : E(G) \to \{1, \ldots, k\}$ telle que deux arêtes adjacentes ou adjacentes à une même arête reçoivent des couleurs différentes.
L'*indice chromatique fort* de G, $\chi'_s(G)$, est le plus petit entier k pour lequel G admet une k-coloration forte d'arêtes.



L'indice chromatique fort (Fouquet, Jolivet, 1983)

k-coloration forte d'arêtes

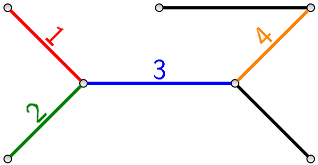
Une *k-coloration forte d'arêtes* d'un graphe G est une application $c : E(G) \to \{1, \ldots, k\}$ telle que deux arêtes adjacentes ou adjacentes à une même arête reçoivent des couleurs différentes.
L'*indice chromatique fort* de G, $\chi'_s(G)$, est le plus petit entier k pour lequel G admet une k-coloration forte d'arêtes.



L'indice chromatique fort (Fouquet, Jolivet, 1983)

k-coloration forte d'arêtes

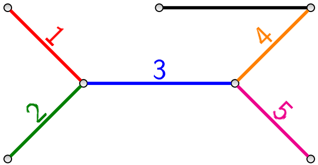
Une *k-coloration forte d'arêtes* d'un graphe G est une application $c : E(G) \to \{1, \ldots, k\}$ telle que deux arêtes adjacentes ou adjacentes à une même arête reçoivent des couleurs différentes.
L'*indice chromatique fort* de G, $\chi'_s(G)$, est le plus petit entier k pour lequel G admet une k-coloration forte d'arêtes.



L'indice chromatique fort (Fouquet, Jolivet, 1983)

k-coloration forte d'arêtes

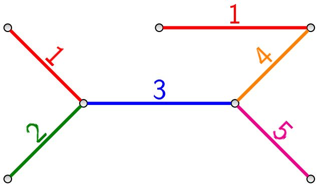
Une *k-coloration forte d'arêtes* d'un graphe G est une application $c : E(G) \to \{1, \ldots, k\}$ telle que deux arêtes adjacentes ou adjacentes à une même arête reçoivent des couleurs différentes.
L'*indice chromatique fort* de G, $\chi'_s(G)$, est le plus petit entier k pour lequel G admet une k-coloration forte d'arêtes.



L'indice chromatique fort (Fouquet, Jolivet, 1983)

k-coloration forte d'arêtes

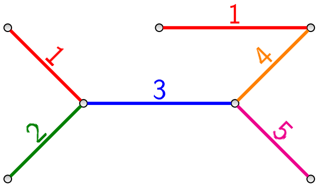
Une *k-coloration forte d'arêtes* d'un graphe G est une application $c : E(G) \to \{1, \ldots, k\}$ telle que deux arêtes adjacentes ou adjacentes à une même arête reçoivent des couleurs différentes.
L'*indice chromatique fort* de G, $\chi'_s(G)$, est le plus petit entier k pour lequel G admet une k-coloration forte d'arêtes.



L'indice chromatique fort (Fouquet, Jolivet, 1983)

k-coloration forte d'arêtes

Une *k-coloration forte d'arêtes* d'un graphe G est une application $c : E(G) \to \{1, \ldots, k\}$ telle que deux arêtes adjacentes ou adjacentes à une même arête reçoivent des couleurs différentes.
L'*indice chromatique fort* de G, $\chi'_s(G)$, est le plus petit entier k pour lequel G admet une k-coloration forte d'arêtes.

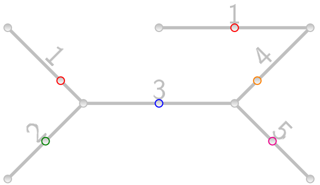


$$\chi'_s = 5$$

L'indice chromatique fort (Fouquet, Jolivet, 1983)

k-coloration forte d'arêtes

Une *k-coloration forte d'arêtes* d'un graphe G est une application $c : E(G) \to \{1, \ldots, k\}$ telle que deux arêtes adjacentes ou adjacentes à une même arête reçoivent des couleurs différentes.
L'*indice chromatique fort* de G, $\chi'_s(G)$, est le plus petit entier k pour lequel G admet une k-coloration forte d'arêtes.

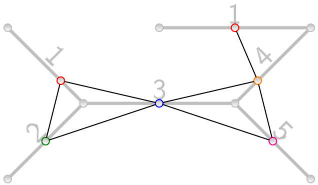


$$\chi'_s = 5$$

L'indice chromatique fort (Fouquet, Jolivet, 1983)

k-coloration forte d'arêtes

Une *k-coloration forte d'arêtes* d'un graphe G est une application $c : E(G) \to \{1, \ldots, k\}$ telle que deux arêtes adjacentes ou adjacentes à une même arête reçoivent des couleurs différentes.
L'*indice chromatique fort* de G, $\chi'_s(G)$, est le plus petit entier k pour lequel G admet une k-coloration forte d'arêtes.

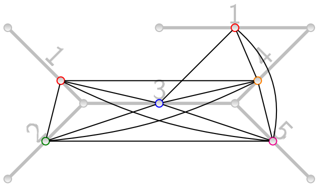


$$\chi'_s = 5$$

L'indice chromatique fort (Fouquet, Jolivet, 1983)

k-coloration forte d'arêtes

Une *k-coloration forte d'arêtes* d'un graphe G est une application $c : E(G) \to \{1, \ldots, k\}$ telle que deux arêtes adjacentes ou adjacentes à une même arête reçoivent des couleurs différentes.
L'*indice chromatique fort* de G, $\chi'_s(G)$, est le plus petit entier k pour lequel G admet une k-coloration forte d'arêtes.

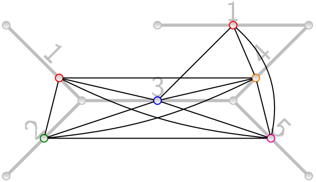


$$\chi'_s = 5$$

L'indice chromatique fort (Fouquet, Jolivet, 1983)

k-coloration forte d'arêtes

Une *k-coloration forte d'arêtes* d'un graphe G est une application $c : E(G) \to \{1, \ldots, k\}$ telle que deux arêtes adjacentes ou adjacentes à une même arête reçoivent des couleurs différentes.
L'*indice chromatique fort* de G, $\chi'_s(G)$, est le plus petit entier k pour lequel G admet une k-coloration forte d'arêtes.



$\chi'_s = 5$

Propriété

Si G est Δ-régulier, alors $2\Delta - 1 \leq \chi'_s(G) \leq 2\Delta(\Delta - 1) + 1$.

La conjecture d'Erdős et Nešetřil

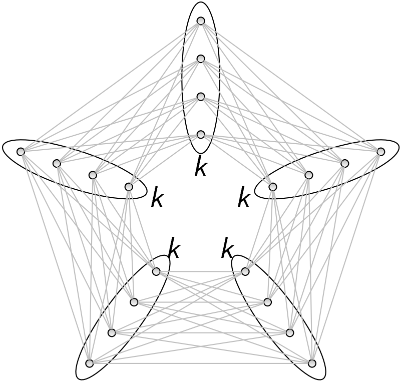
Conjecture [Erdős, Nešetřil, 1985]

$\chi'_s(G) \leq \frac{5}{4}\Delta^2$ si Δ est pair et $\chi'_s(G) \leq \frac{1}{4}(5\Delta^2 - 2\Delta + 1)$ si Δ est impair.

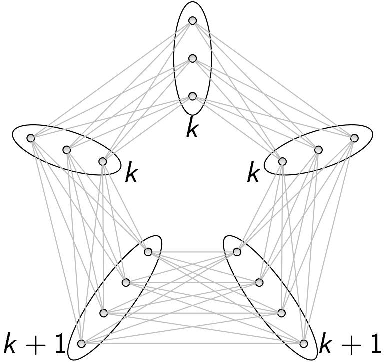
La conjecture d'Erdős et Nešetřil

Conjecture [Erdős, Nešetřil, 1985]

$\chi'_s(G) \leq \frac{5}{4}\Delta^2$ si Δ est pair et $\chi'_s(G) \leq \frac{1}{4}(5\Delta^2 - 2\Delta + 1)$ si Δ est impair.

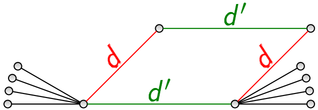


$\Delta = 2k,\ \chi'_s = 5k^2$



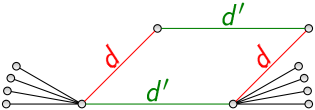
$\Delta = 2k+1,\ \chi'_s = 5k^2 + 4k + 1$

Anti-couplages



Anti-couplage générique

Anti-couplages



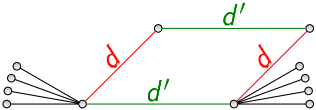
Anti-couplage générique

Théorème

Si $|D| \geq 2$, alors

$$\chi'_s(D) \geq 4|D|.$$

Anti-couplages

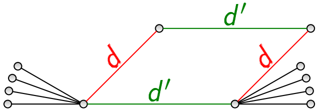


Anti-couplage générique

Théorème

Si $|D| \geq 2$, alors
$$\chi'_s(D) > 4|D|.$$

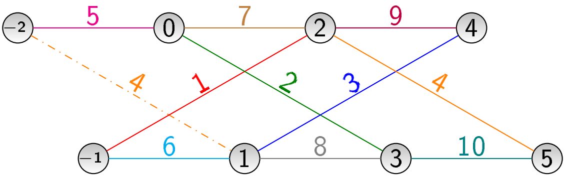
Anti-couplages



Anti-couplage générique

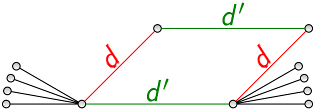
Théorème

Si $|D| \geq 2$, alors
$$\chi'_s(D) > 4|D|.$$



$G(2,3)$

Anti-couplages

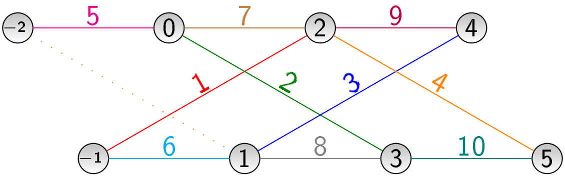


Anti-couplage générique

Théorème

Si $|D| \geq 2$, alors

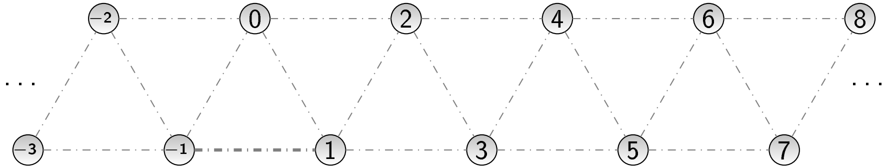
$$\chi'_s(D) > 4|D|.$$



$G(2,3)$

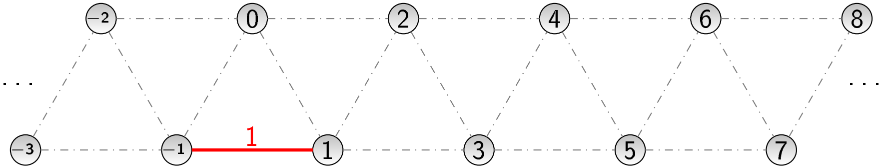
Anti-couplage relatif

Premier exemple



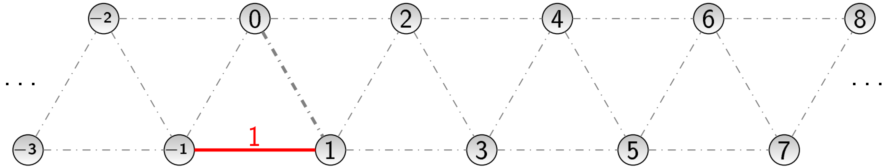
$G(1,2)$

Premier exemple



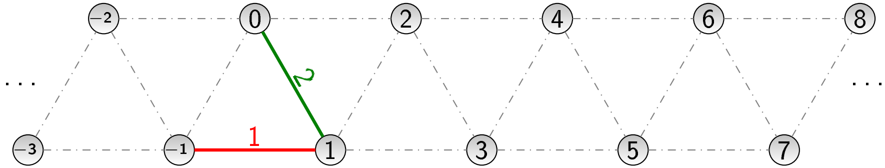
$G(1, 2)$

Premier exemple



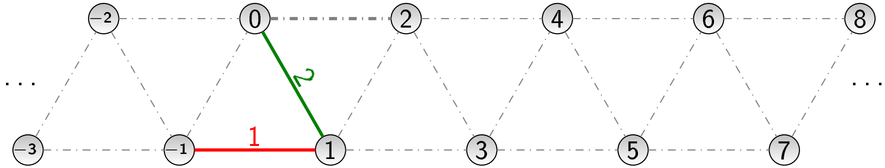
$G(1, 2)$

Premier exemple



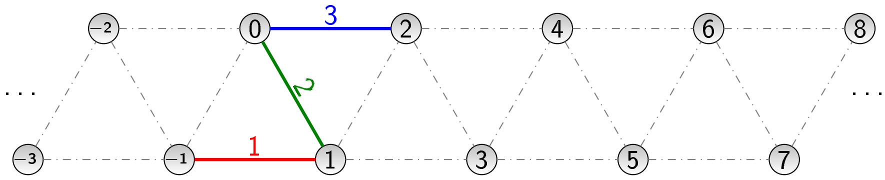
$G(1,2)$

Premier exemple



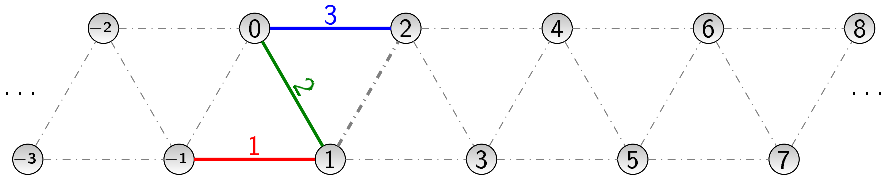
$G(1,2)$

Premier exemple



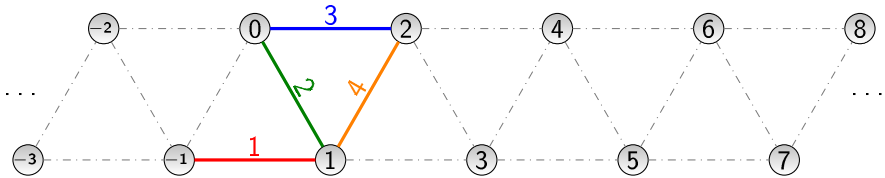
$G(1,2)$

Premier exemple



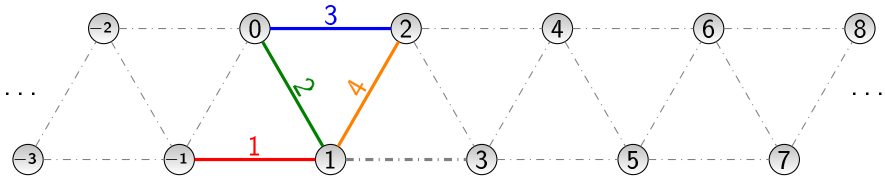
$G(1,2)$

Premier exemple



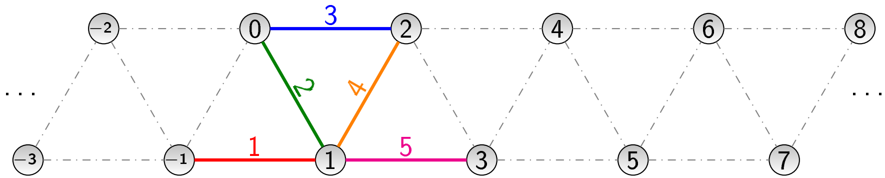
$G(1,2)$

Premier exemple



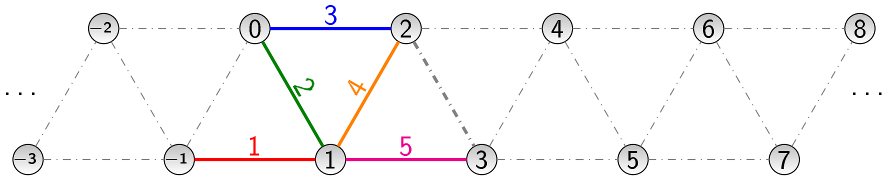
$G(1,2)$

Premier exemple



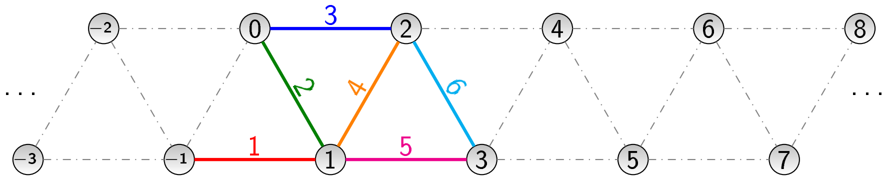
$G(1, 2)$

Premier exemple



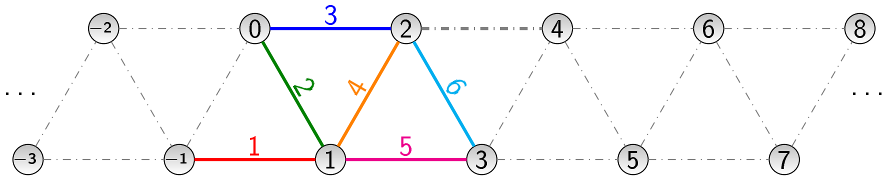
$G(1,2)$

Premier exemple



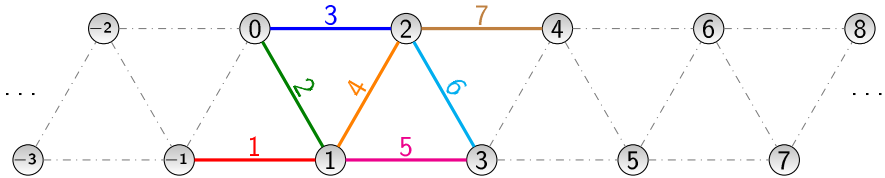
$G(1, 2)$

Premier exemple



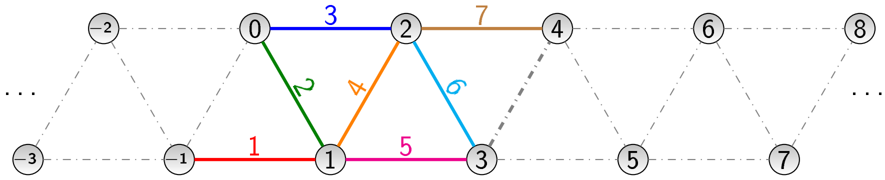
$G(1,2)$

Premier exemple



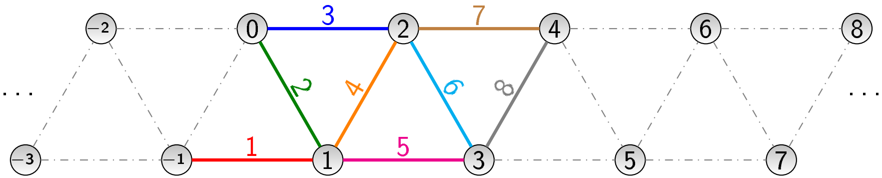
$G(1, 2)$

Premier exemple



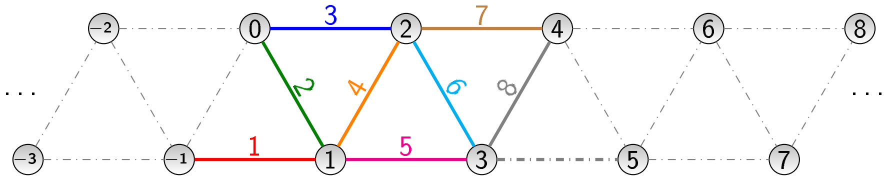
$G(1,2)$

Premier exemple



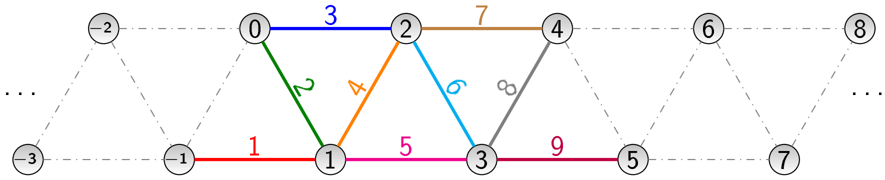
$G(1,2)$

Premier exemple



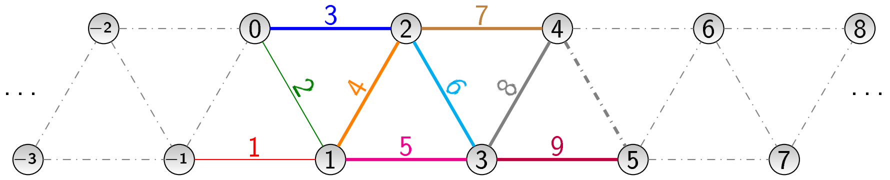
$G(1,2)$

Premier exemple



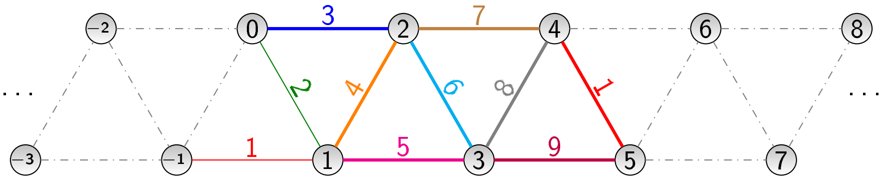
$G(1,2)$

Premier exemple



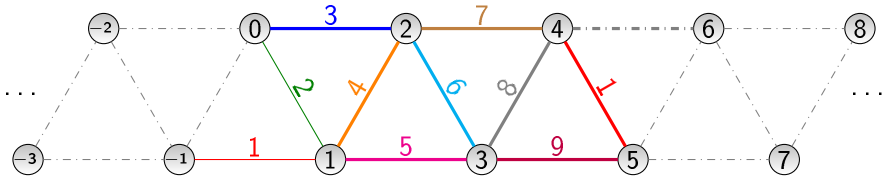
$G(1,2)$

Premier exemple



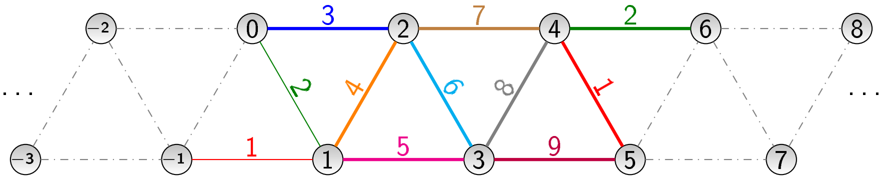
$G(1,2)$

Premier exemple



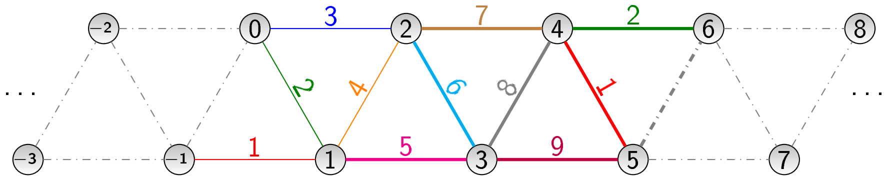
$G(1,2)$

Premier exemple



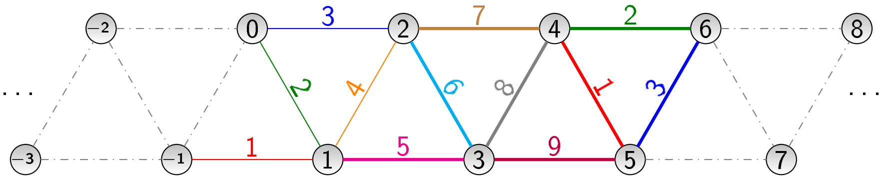
$G(1,2)$

Premier exemple



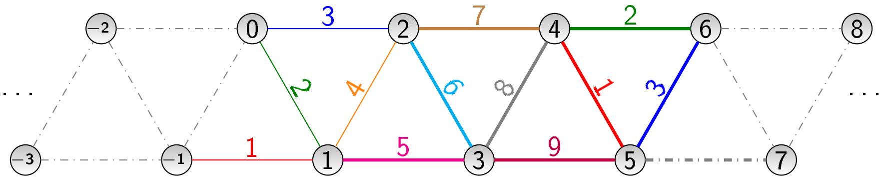
$G(1,2)$

Premier exemple



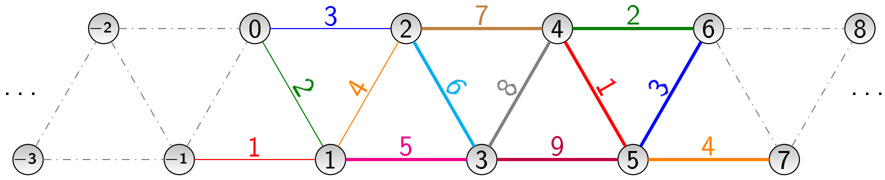
$G(1,2)$

Premier exemple



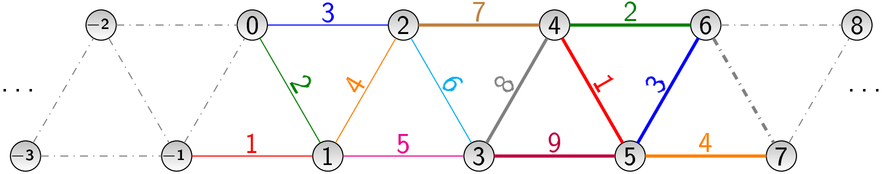
$G(1,2)$

Premier exemple



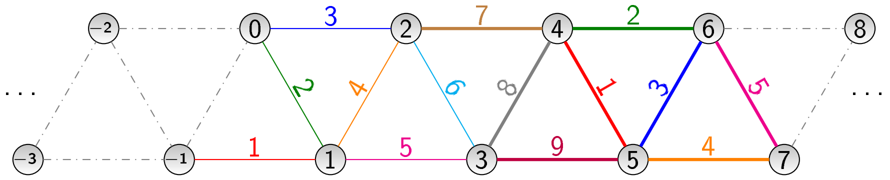
$G(1,2)$

Premier exemple



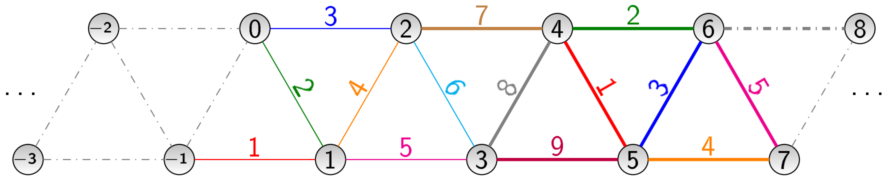
$G(1, 2)$

Premier exemple



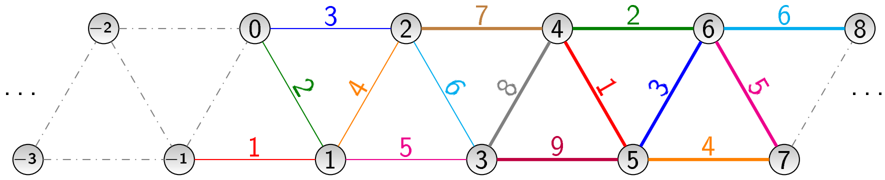
$G(1, 2)$

Premier exemple



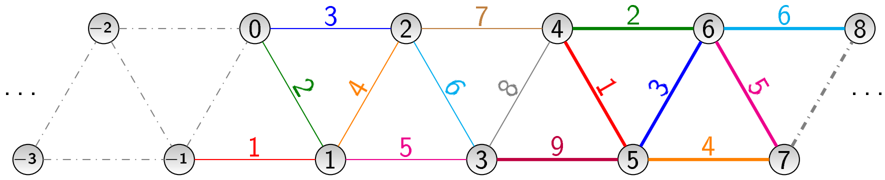
$G(1,2)$

Premier exemple



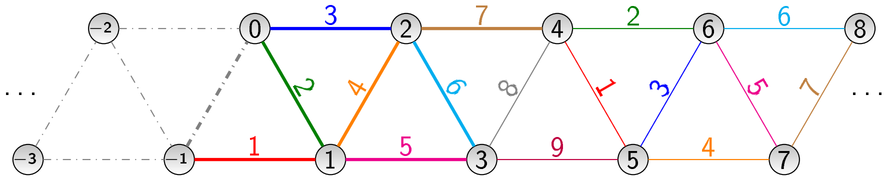
$G(1, 2)$

Premier exemple



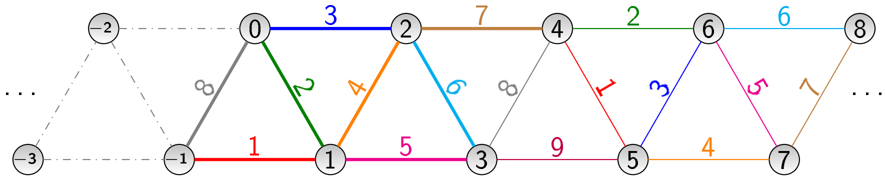
$G(1,2)$

Premier exemple



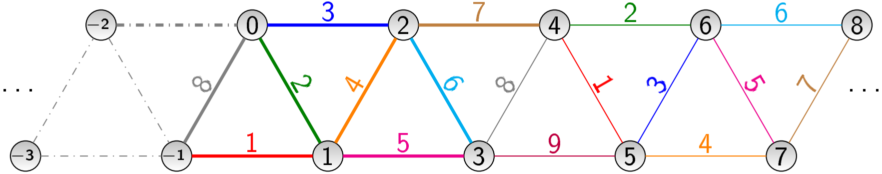
$G(1, 2)$

Premier exemple



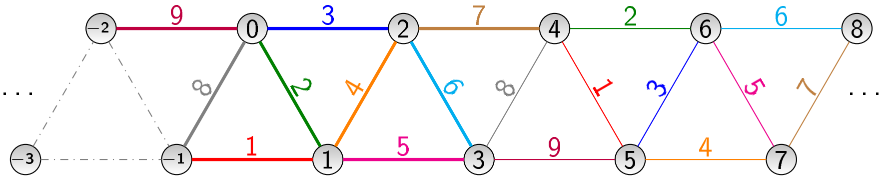
$G(1, 2)$

Premier exemple



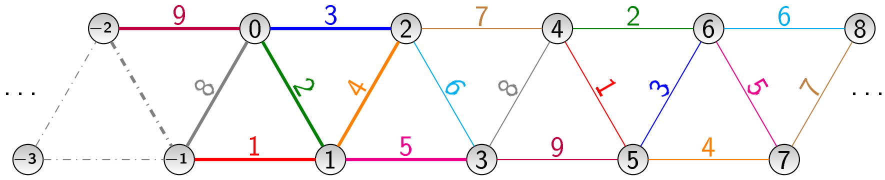
$G(1,2)$

Premier exemple



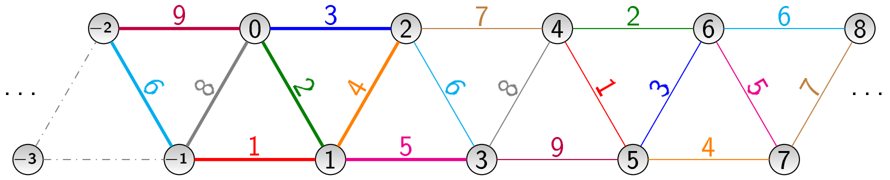
$G(1,2)$

Premier exemple



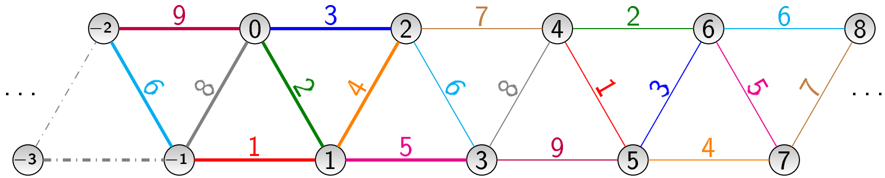
$G(1,2)$

Premier exemple



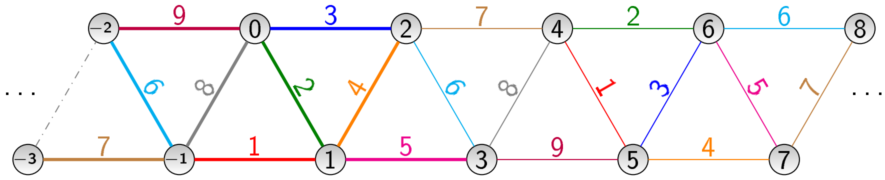
$G(1,2)$

Premier exemple



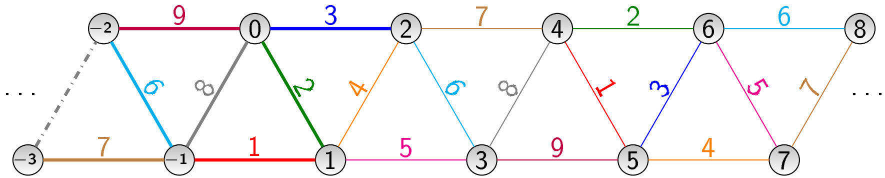
$G(1,2)$

Premier exemple



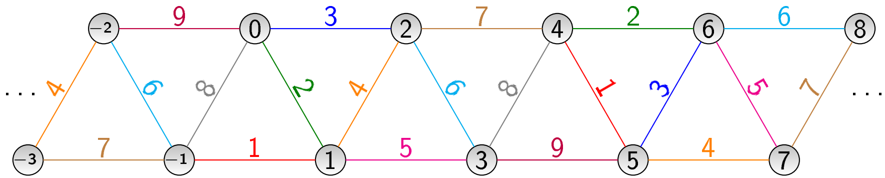
$G(1,2)$

Premier exemple



$G(1, 2)$

Premier exemple

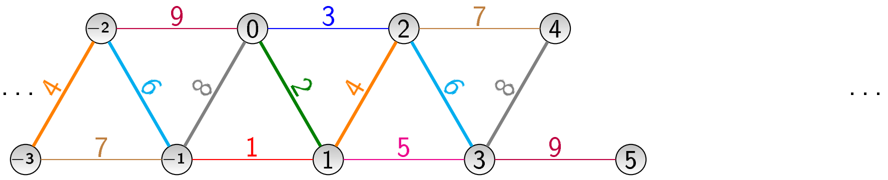


$G(1,2)$

Théorème

$$\chi'_s([\![1,k]\!]) = \frac{3}{2}k(k+1) \simeq \frac{3}{8}\Delta^2 \left(\leq \frac{5}{4}\Delta^2\right)$$

Premier exemple

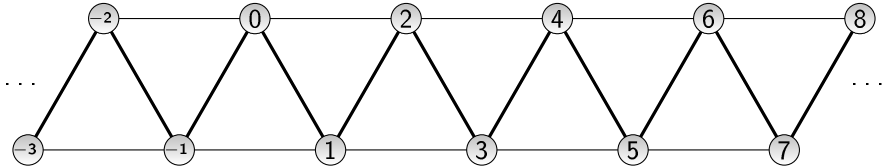


$G(1,2)$

Théorème

$$\chi'_s([\![1,k]\!]) = \frac{3}{2}k(k+1) \simeq \frac{3}{8}\Delta^2 \left(\leq \frac{5}{4}\Delta^2\right)$$

Premier exemple

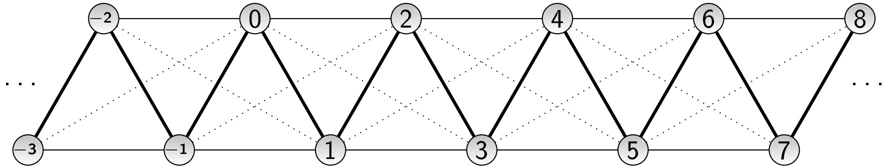


$G(1,2)$

Théorème

$$\chi'_s([\![1,k]\!]) = \frac{3}{2}k(k+1) \simeq \frac{3}{8}\Delta^2 \left(\leq \frac{5}{4}\Delta^2\right)$$

Premier exemple

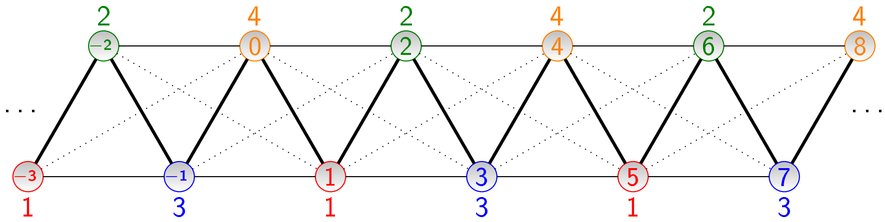


$G(1, 2)$

Théorème

$$\chi'_s([\![1, k]\!]) = \frac{3}{2}k(k+1) \simeq \frac{3}{8}\Delta^2 \left(\leq \frac{5}{4}\Delta^2\right)$$

Premier exemple

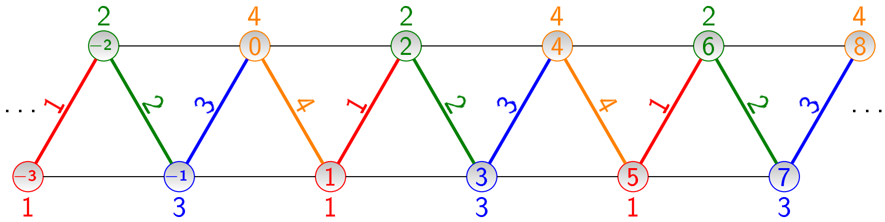


$G(1,2)$

Théorème

$$\chi'_s([\![1,k]\!]) = \frac{3}{2}k(k+1) \simeq \frac{3}{8}\Delta^2 \left(\leq \frac{5}{4}\Delta^2\right)$$

Premier exemple

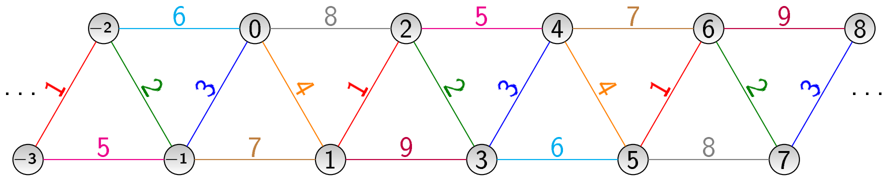


$G(1,2)$

Théorème

$$\chi'_s([\![1,k]\!]) = \frac{3}{2}k(k+1) \simeq \frac{3}{8}\Delta^2 \left(\leq \frac{5}{4}\Delta^2\right)$$

Premier exemple



$G(1,2)$

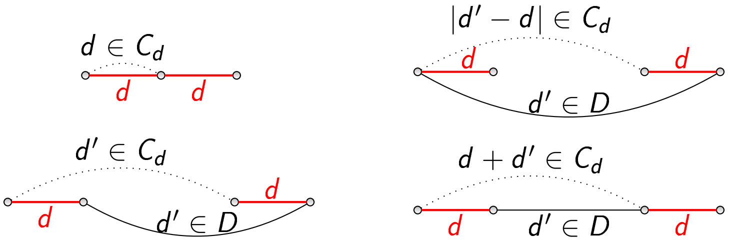
Théorème

$$\chi'_s([\![1,k]\!]) = \frac{3}{2}k(k+1) \simeq \frac{3}{8}\Delta^2 \left(\leq \frac{5}{4}\Delta^2\right)$$

Les distances critiques

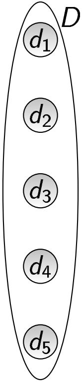
Distances critiques

Une *distance critique* pour le générateur $d \in D$ est un entier d tel que deux arêtes de type d et dont les plus petites extrémités respectives sont distantes de d en valeur absolue sont à distance au plus 2 dans $G(D)$.
L'ensemble des distances critiques pour le générateur $d \in D$ est noté C_d^D.

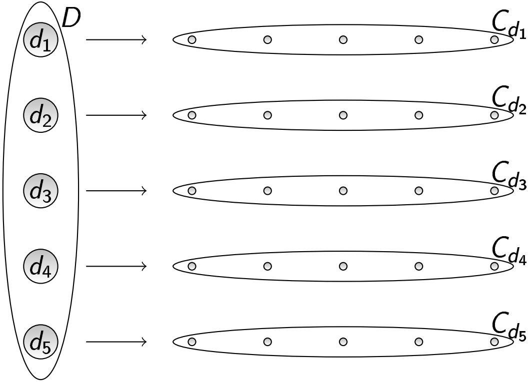


Distances critiques pour le générateur d.

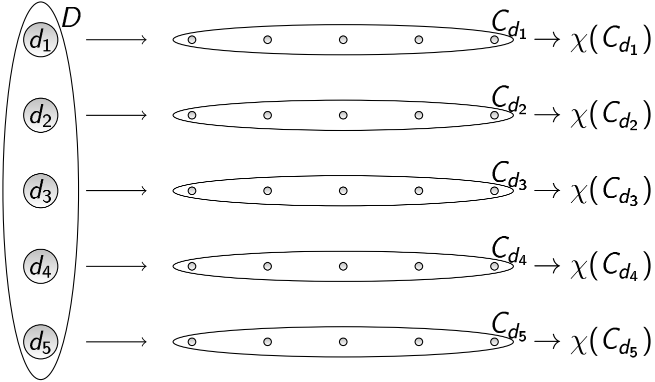
La méthode des distances critiques



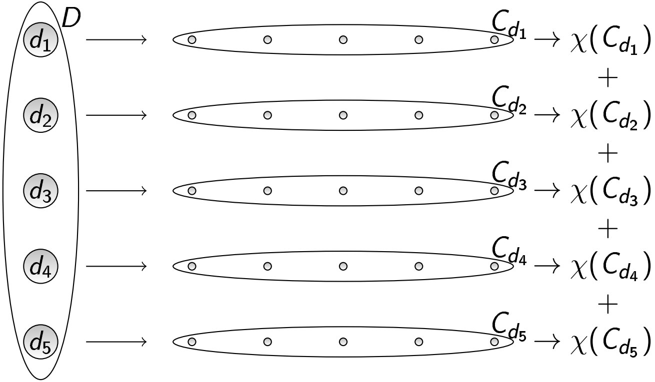
La méthode des distances critiques



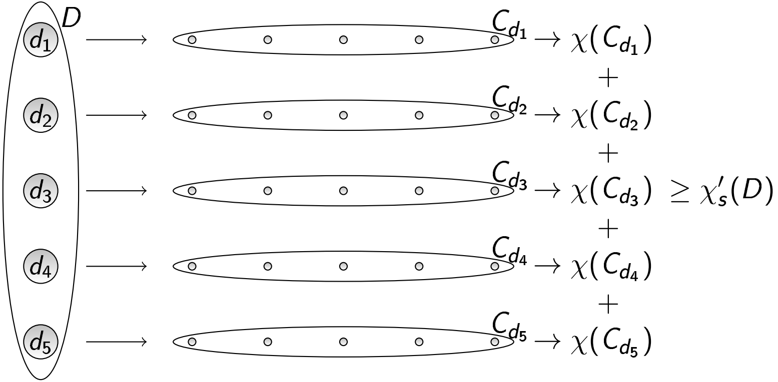
La méthode des distances critiques



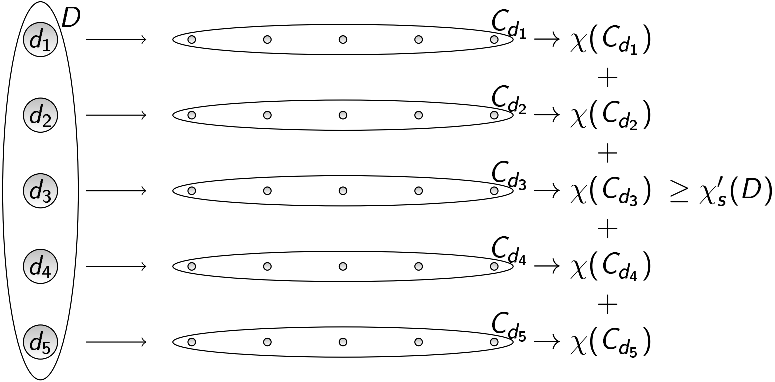
La méthode des distances critiques



La méthode des distances critiques



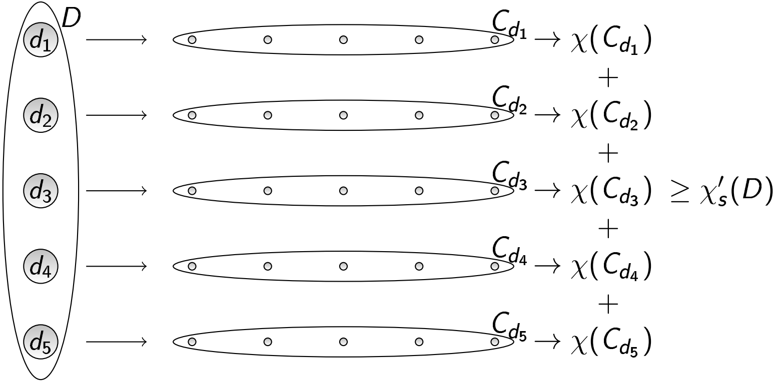
La méthode des distances critiques



Théorème

$$\chi'_s(D) \leq \sum_{d \in D} \chi(C_d).$$

La méthode des distances critiques

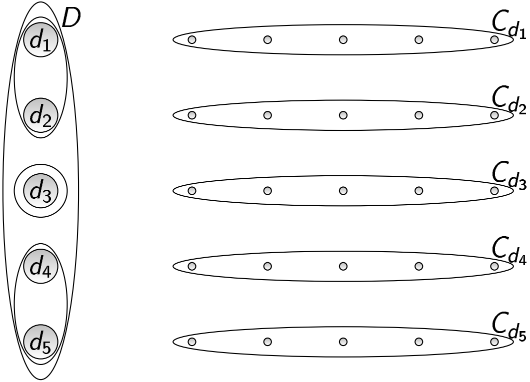


Théorème

$$\chi'_s(D) \leq \sum_{d \in D} \chi(C_d).$$

$$\chi'_s(D) \leq 3|D|^2 = \frac{3}{4}\Delta^2.$$

La méthode des distances critiques

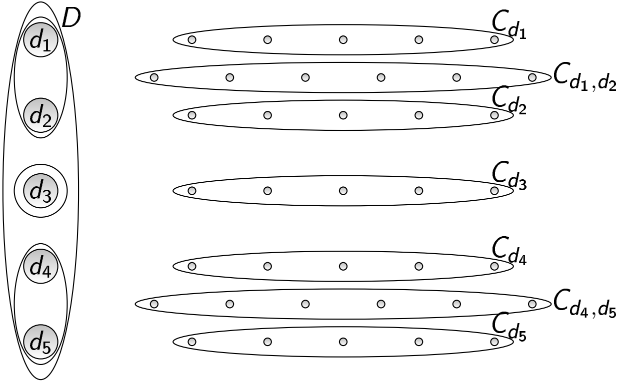


Théorème

$$\chi'_s(D) \leq \sum_{d \in D} \chi(C_d).$$

$$\chi'_s(D) \leq 3|D|^2 = \frac{3}{4}\Delta^2.$$

La méthode des distances critiques

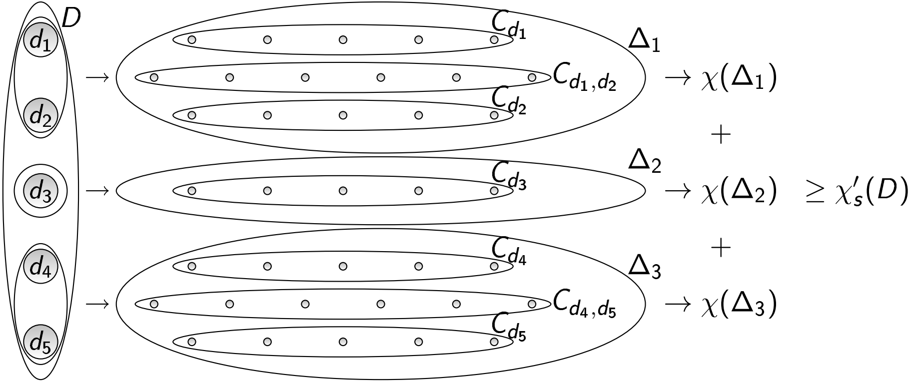


Théorème

$$\chi'_s(D) \leq \sum_{d \in D} \chi(C_d).$$

$$\chi'_s(D) \leq 3|D|^2 = \frac{3}{4}\Delta^2.$$

La méthode des distances critiques



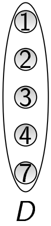
Théorème

$$\chi'_s(D) \leq \sum_{d \in D} \chi(C_d).$$

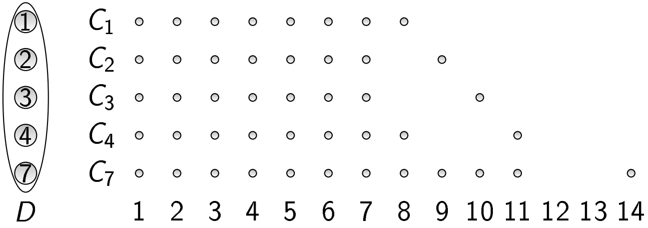
$$\chi'_s(D) \leq 3|D|^2 = \frac{3}{4}\Delta^2.$$

Application à $D = \{1, 2, 3, 4, 7\}$

Application à $D = \{1, 2, 3, 4, 7\}$



Application à $D = \{1, 2, 3, 4, 7\}$



Application à $D = \{1, 2, 3, 4, 7\}$

1	C_1	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	χ					
2	C_2	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	χ	$\circ$					
3	C_3	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	χ		$\circ$				
4	C_4	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	χ		$\circ$			
7	C_7	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	χ		$\circ$
D		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

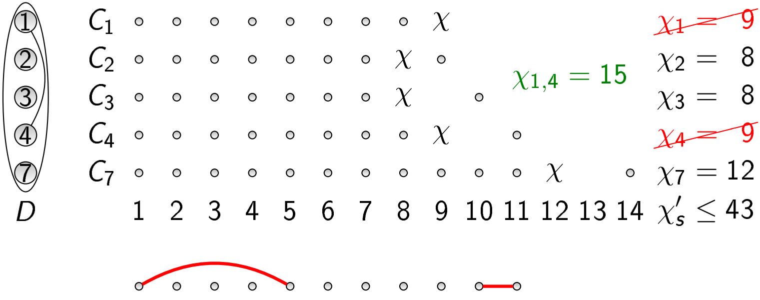
Application à $D = \{1, 2, 3, 4, 7\}$

1	C_1	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	χ						$\chi_1 = 9$
2	C_2	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	χ	$\circ$						$\chi_2 = 8$
3	C_3	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	χ		$\circ$					$\chi_3 = 8$
4	C_4	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	χ		$\circ$				$\chi_4 = 9$
7	C_7	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	χ		$\circ$	$\chi_7 = 12$
D		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	$\chi'_s \leq 46$

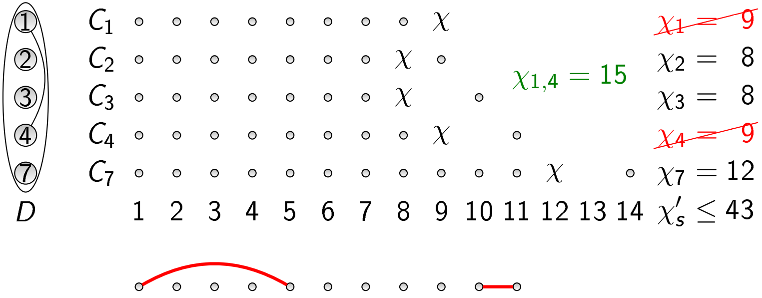
Application à $D = \{1, 2, 3, 4, 7\}$

1	C_1	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	χ						$\chi_1 = 9$
2	C_2	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	χ	∘						$\chi_2 = 8$
3	C_3	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	χ		∘					$\chi_3 = 8$
4	C_4	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	χ		∘				$\chi_4 = 9$
7	C_7	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	χ		∘	$\chi_7 = 12$
D		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	$\chi'_s \leq 46$

Application à $D = \{1, 2, 3, 4, 7\}$



Application à $D = \{1, 2, 3, 4, 7\}$



Théorème

Si $m+1 < x \leq 2m+1$ et $m \geq 4$, alors

$$\chi'_s([\![1, m]\!] \cup \{x\}) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}(m+1)(3m+2) + 2 & \text{si } x = m+2, \\ x + \frac{1}{2}(m+1)(3m+2) + 1 & \text{sinon} . \end{cases}$$

Application à $[\![1, m]\!] \setminus \{x\}$

Théorème

$$\chi'_s(D) \geq \begin{cases} \frac{1}{2}m(3m+1) + x(x-m-2) - 1 & \text{si } x \leq \frac{m}{3}, \\ \frac{1}{2}m(3m+1) + x(x-m-3) - 1 & \text{si } \frac{m}{3} < x \leq \frac{m}{2}, \\ \frac{3}{2}m(m+1) + x(x-m-3) & \text{sinon.} \end{cases}$$

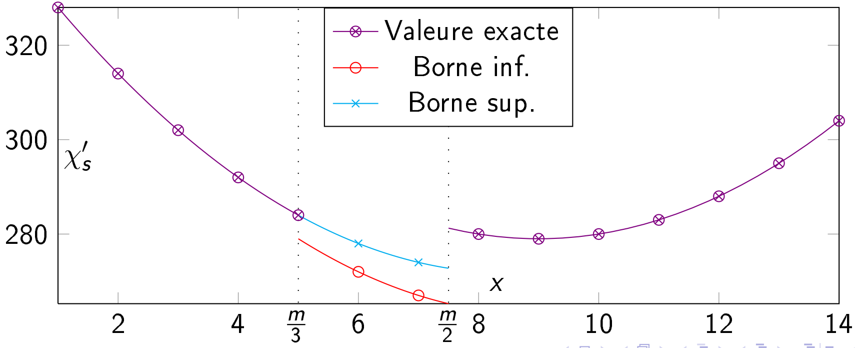
$$\chi'_s(D) \leq \begin{cases} \frac{1}{2}m(3m+1) + x(x-m-2) - 1 & \text{si } x \leq \frac{m}{2}, \\ \frac{3}{2}m(m+1) + x(x-m-3) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Application à $[\![1, m]\!] \setminus \{x\}$

Théorème

$$\chi'_s(D) \geq \begin{cases} \frac{1}{2}m(3m+1) + x(x-m-2) - 1 & \text{si } x \leq \frac{m}{3}, \\ \frac{1}{2}m(3m+1) + x(x-m-3) - 1 & \text{si } \frac{m}{3} < x \leq \frac{m}{2}, \\ \frac{3}{2}m(m+1) + x(x-m-3) & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\chi'_s(D) \leq \begin{cases} \frac{1}{2}m(3m+1) + x(x-m-2) - 1 & \text{si } x \leq \frac{m}{2}, \\ \frac{3}{2}m(m+1) + x(x-m-3) & \text{sinon.} \end{cases}$$

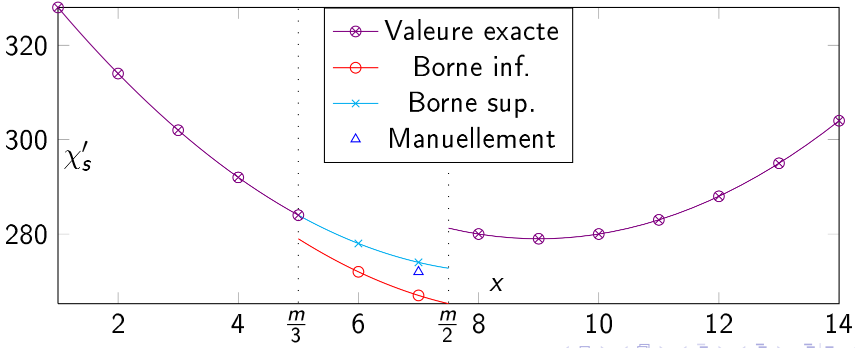


Application à $[\![1, m]\!] \setminus \{x\}$

Théorème

$$\chi'_s(D) \geq \begin{cases} \frac{1}{2}m(3m+1) + x(x-m-2) - 1 & \text{si } x \leq \frac{m}{3}, \\ \frac{1}{2}m(3m+1) + x(x-m-3) - 1 & \text{si } \frac{m}{3} < x \leq \frac{m}{2}, \\ \frac{3}{2}m(m+1) + x(x-m-3) & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\chi'_s(D) \leq \begin{cases} \frac{1}{2}m(3m+1) + x(x-m-2) - 1 & \text{si } x \leq \frac{m}{2}, \\ \frac{3}{2}m(m+1) + x(x-m-3) & \text{sinon.} \end{cases}$$



Application à $[\![\ell, m]\!]$

Théorème ($k = |D| = m - \ell + 1$)

$$\chi'_s(D) \geq \begin{cases} \frac{1}{2}(m+1)(3k-\ell+1) & \text{si } \ell - 1 \leq \frac{m}{3}, \\ \frac{1}{2}(m+1)(3k-\ell+1) - \ell(3\ell-3-m) & \text{si } \frac{m}{3} < \ell - 1 \leq \frac{m}{2}, \\ k^2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

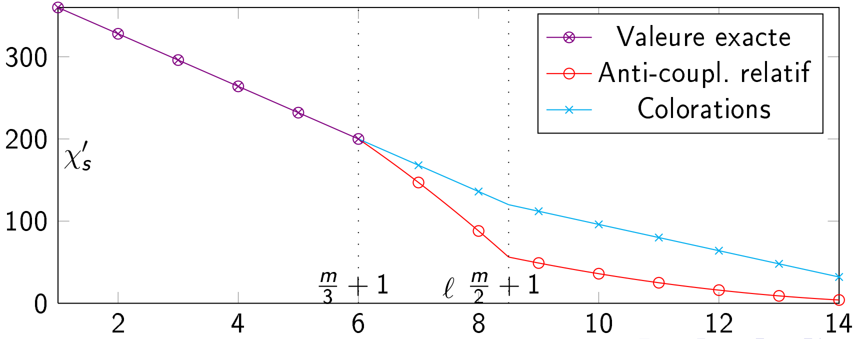
$$\chi'_s(D) \leq \begin{cases} \frac{1}{2}(m+1)(3k-\ell+1) & \text{si } \ell - 1 \leq \frac{m}{2}, \\ k(m+1) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Application à $[\![\ell, m]\!]$

Théorème ($k = |D| = m - \ell + 1$)

$$\chi'_s(D) \geq \begin{cases} \frac{1}{2}(m+1)(3k-\ell+1) & \text{si } \ell - 1 \leq \frac{m}{3}, \\ \frac{1}{2}(m+1)(3k-\ell+1) - \ell(3\ell-3-m) & \text{si } \frac{m}{3} < \ell - 1 \leq \frac{m}{2}, \\ k^2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\chi'_s(D) \leq \begin{cases} \frac{1}{2}(m+1)(3k-\ell+1) & \text{si } \ell - 1 \leq \frac{m}{2}, \\ k(m+1) & \text{sinon.} \end{cases}$$

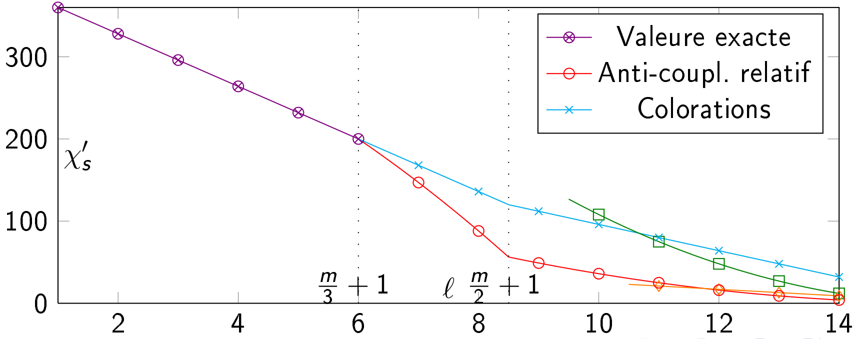


Application à $[\![\ell, m]\!]$

Théorème ($k = |D| = m - \ell + 1$)

$$\chi'_s(D) \geq \begin{cases} \frac{1}{2}(m+1)(3k-\ell+1) & \text{si } \ell - 1 \leq \frac{m}{3}, \\ \frac{1}{2}(m+1)(3k-\ell+1) - \ell(3\ell-3-m) & \text{si } \frac{m}{3} < \ell - 1 \leq \frac{m}{2}, \\ k^2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\chi'_s(D) \leq \begin{cases} \frac{1}{2}(m+1)(3k-\ell+1) & \text{si } \ell - 1 \leq \frac{m}{2}, \\ k(m+1) & \text{sinon.} \end{cases}$$

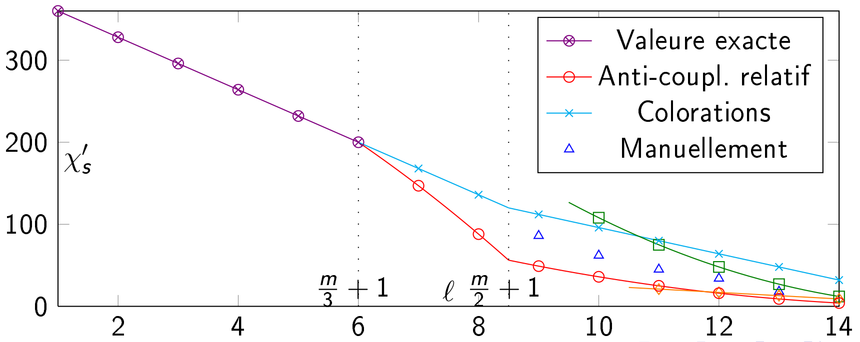


Application à $[\![\ell, m]\!]$

Théorème ($k = |D| = m - \ell + 1$)

$$\chi'_s(D) \geq \begin{cases} \frac{1}{2}(m+1)(3k-\ell+1) & \text{si } \ell - 1 \leq \frac{m}{3}, \\ \frac{1}{2}(m+1)(3k-\ell+1) - \ell(3\ell-3-m) & \text{si } \frac{m}{3} < \ell - 1 \leq \frac{m}{2}, \\ k^2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\chi'_s(D) \leq \begin{cases} \frac{1}{2}(m+1)(3k-\ell+1) & \text{si } \ell - 1 \leq \frac{m}{2}, \\ k(m+1) & \text{sinon.} \end{cases}$$



Ouvertures

- Bornes améliorables

Ouvertures

- Bornes améliorables
- Dans quels cas ces méthodes sont-elles optimales ?

Ouvertures

- Bornes améliorables
- Dans quels cas ces méthodes sont-elles optimales ?
- Implémentation sous forme d'heuristique

Ouvertures

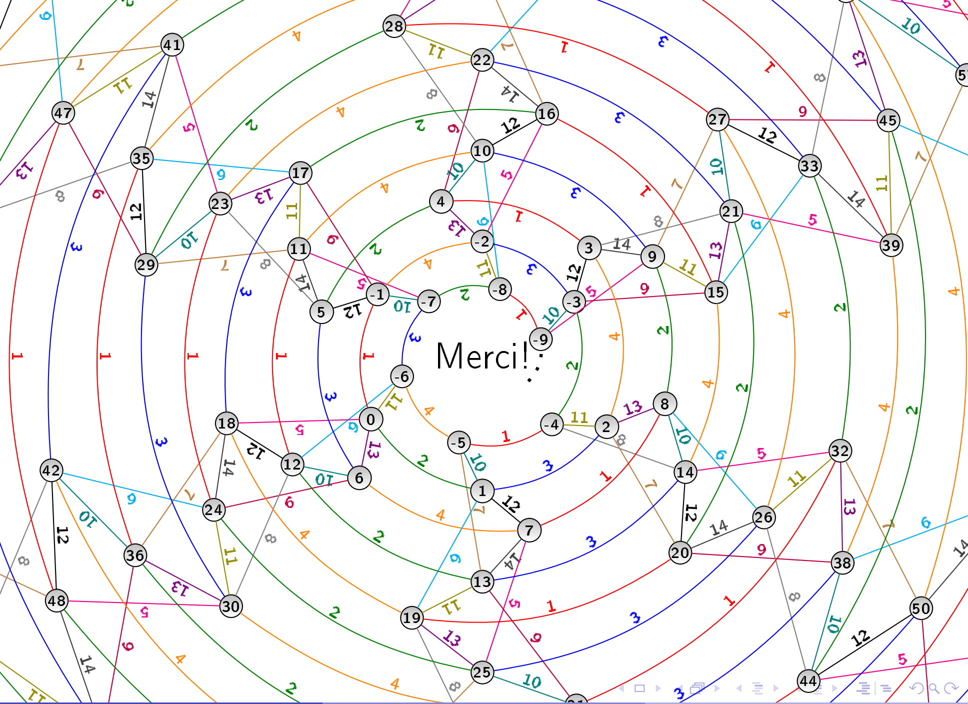
- Bornes améliorables
- Dans quels cas ces méthodes sont-elles optimales ?
- Implémentation sous forme d'heuristique
- Application à d'autres sous-familles de graphes distances

Ouvertures

- Bornes améliorables
- Dans quels cas ces méthodes sont-elles optimales ?
- Implémentation sous forme d'heuristique
- Application à d'autres sous-familles de graphes distances
- Application à d'autres colorations ($L(0, 1, 1)$, ...)

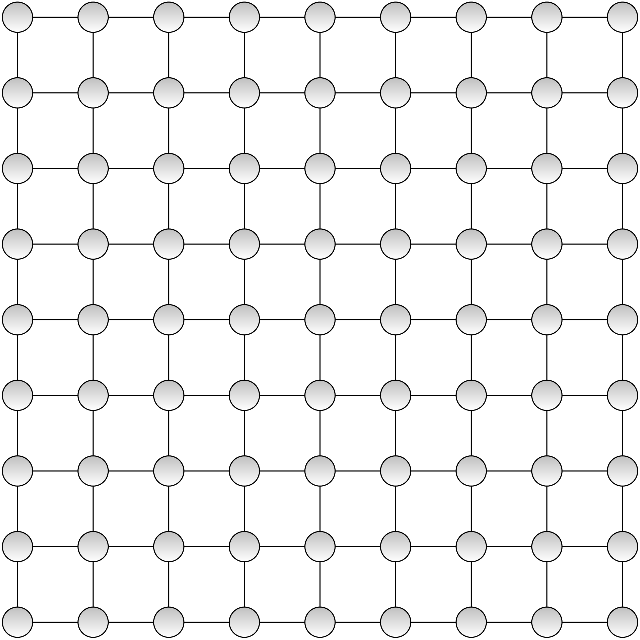
Ouvertures

- Bornes améliorables
- Dans quels cas ces méthodes sont-elles optimales ?
- Implémentation sous forme d'heuristique
- Application à d'autres sous-familles de graphes distances
- Application à d'autres colorations ($L(0,1,1)$, ...)
- Application à d'autres familles de graphes (graphes circulants, graphes distances sur $\mathbb{Z}^i$...)

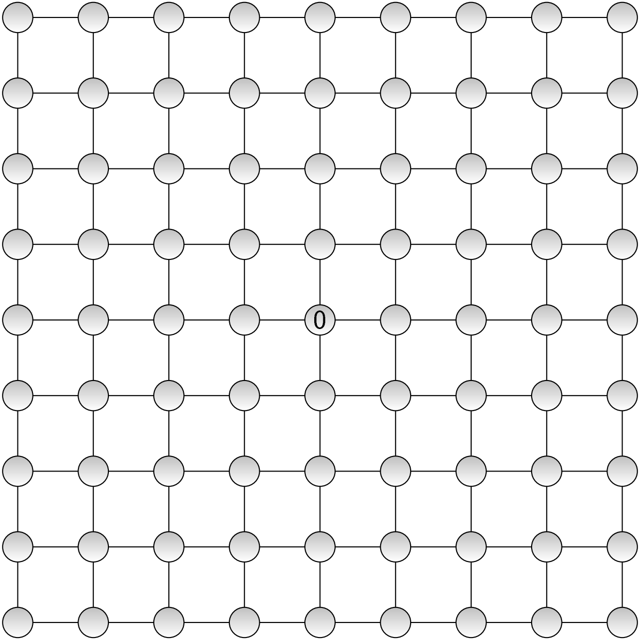


Merci !

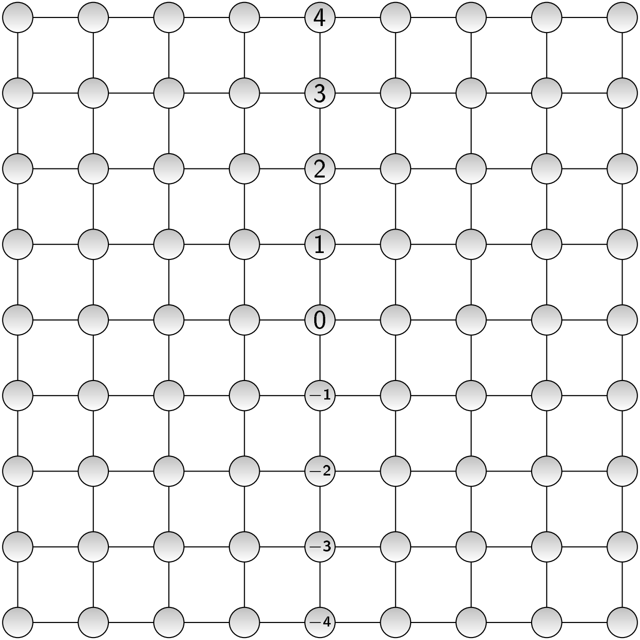
Preuve de $\chi'_s(D) > 4|D|$



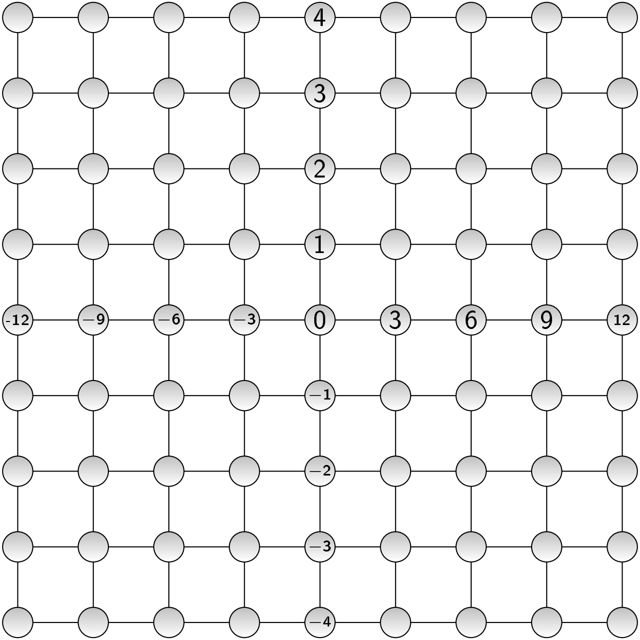
Preuve de $\chi'_s(D) > 4|D|$



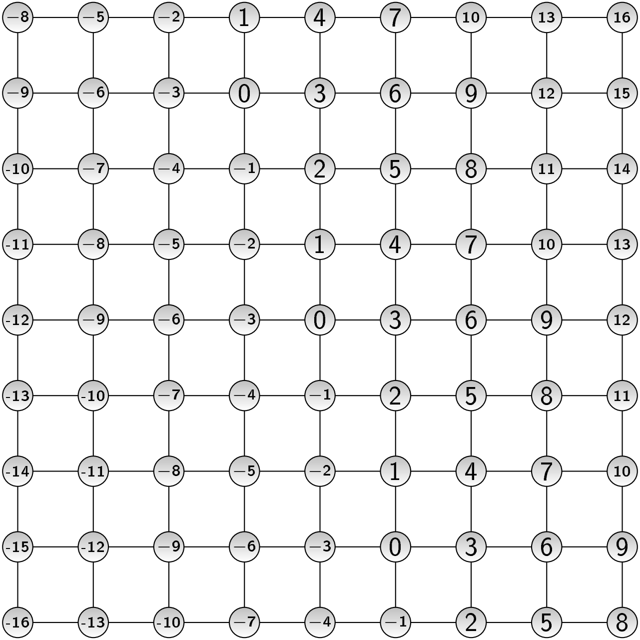
Preuve de $\chi'_s(D) > 4|D|$



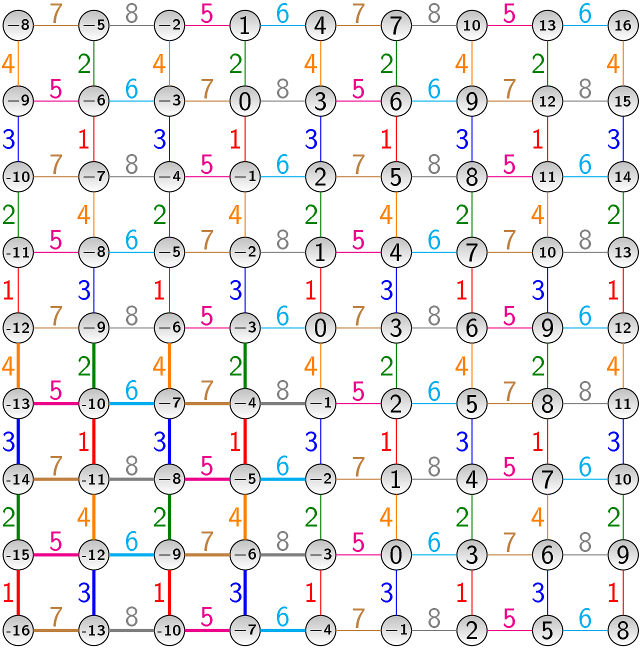
Preuve de $\chi'_s(D) > 4|D|$



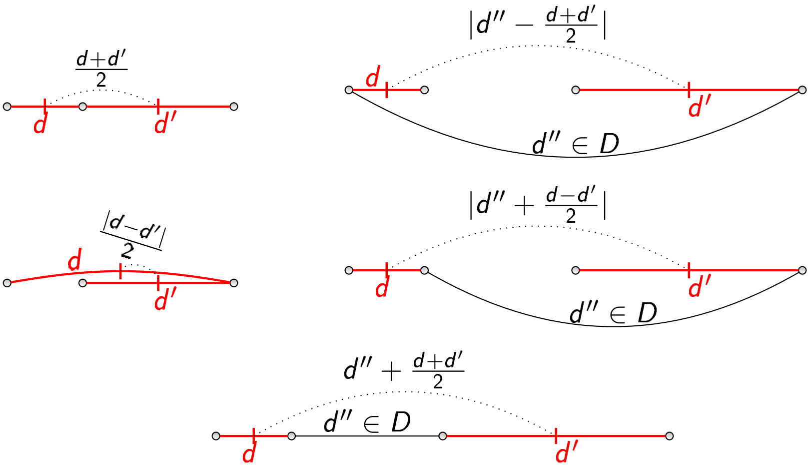
Preuve de $\chi'_s(D) > 4|D|$



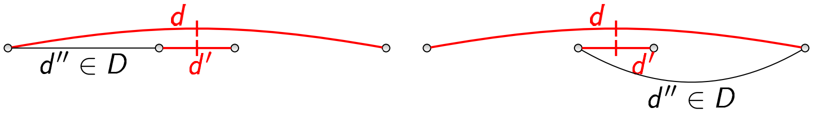
Preuve de $\chi'_s(D) > 4|D|$



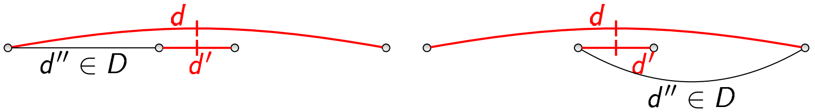
Les distances critiques relatives à deux générateurs



La méthode des distances critiques généralisée



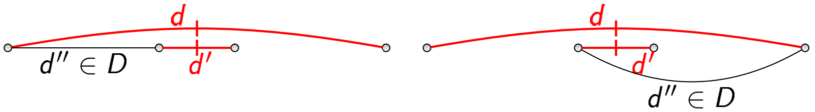
La méthode des distances critiques généralisée



graphe d'incompatibilité

Le *graphe d'incompatibilité* de D, est le graphe
$G_I^D = \left(D, \left\{(d, d') \in D^2 \middle| 0 \in C_{d,d'}\right\}\right)$

La méthode des distances critiques généralisée



graphe d'incompatibilité

Le *graphe d'incompatibilité* de D, est le graphe
$G_I^D = \left(D, \left\{(d,d') \in D^2 \middle| 0 \in C_{d,d'}\right\}\right)$

Théorème

Soit c une coloration propre de G_I. Pour tout $i \in Im(c)$, on note
$S_i = \left\{d \in D \middle| c(d) = i\right\}$ et $\Delta_i = \bigcup_{d,d' \in S_i} C_{d,d'} \cup \bigcup_{g \in S_i} C_d$, alors

$$\chi'_s(D) \leq \sum_{i \in Im(c)} \chi(\Delta_i).$$