Colorations bornées

Mohammed SENHAJI

LaBRI

3 novembre 2015

Introduction

- Introduite par P. Hanse, A. Hertz et J. Kuplinsky (1993).
- Variante de la coloration propre des graphes, où on borne la taille des classes de couleurs.
- Équivalent à :
  - Partition en stables de tailles bornées.
  - Planification de tâches incompatibles de mêmes durées.
  - Si la borne est 2, alors le problème est équivalent à trouver un couplage maximum dans le graphe complémentaire.
- On s'intéresse ici aux colorations bornées d'autres types de coloration (orientée, acyclique, par liste).
- Jamais étudiées auparavant, donc pas de résultats connus, mais certains résultats de la coloration bornée sont valables sur d'autres variantes.

1 Définitions

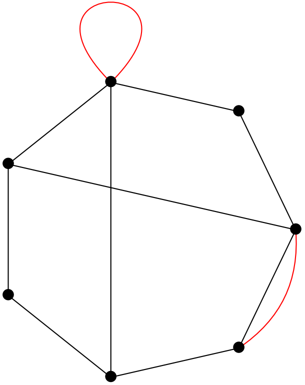
2 Coloration acyclique

3 Coloration orientée

4 Coloration par liste

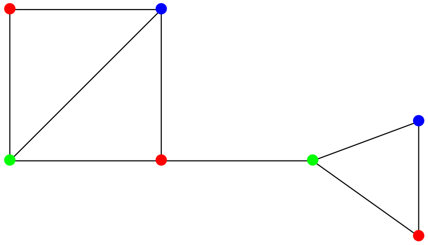
5 Conclusion

Graphe



- Pas de boucles
- Pas d'arêtes multiples

Colorations



Coloration propre

Colorations

Définition

- *Une coloration (propre) d'un graphe $G = (V, E)$ est une fonction c de V dans un ensemble de couleur Ω, telle que :*

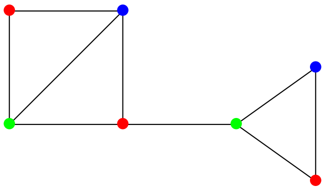
$$\forall u, v \in V, uv \in E \implies c(u) \neq c(v)$$

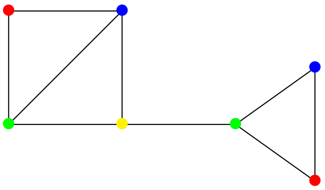
- *Si B est un entier positif la coloration c est dite B-bornée, si :*

$$\forall d \in \Omega, |c^{-1}(d)| \leq B$$

- *Le nombre chromatique d'un graphe G, noté $\chi(G)$ est le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour colorer G.*
- *Le nombre chromatique B-borné d'un graphe G, noté $\chi^B(G)$ est le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour une coloration B-bornée de G.*

Colorations





À gauche une coloration qui n'est pas 2-bornée et à droite une coloration 2-bornée

Colorations

Théorème (P. Hanse, A. Hertz et J. Kuplinsky (1993))

Pour tout graphe à n sommets $G = (V, E)$, et tout entier positif B, on a :

$$max\{\chi(G), \left\lceil \frac{n}{B} \right\rceil\} \leq \chi^B(G) \leq \left\lfloor \frac{n - \chi(G)}{B} \right\rfloor + \chi(G)$$

et ces bornes sont optimales.

Idée de preuve :
La borne inférieure résulte du fait que toute coloration bornée est une coloration, et qu'avec $\chi^B(G)$ couleurs on ne peut pas colorer plus que $B \cdot \chi^B(G)$ sommets.

1 Définitions

2 Coloration acyclique

3 Coloration orientée

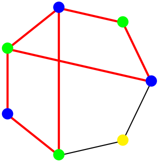
4 Coloration par liste

5 Conclusion

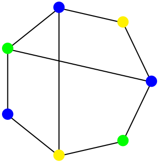
Coloration acyclique

Définition

Une coloration c d'un graphe G est dite acyclique si il n'existe pas de cycle dans G coloré avec au plus deux couleurs par c.



Coloration non acyclique



Coloration acyclique

Nombre chromatique

Remarque

Soit B un entier positif, le nombre chromatique acyclique et le nombre chromatique acyclique B-borné d'un graphe G, sont définis de la même manière que pour la coloration propre.

- Par définition on a : $\chi_a^B(G) \geq \chi_a(G) \geq \chi(G)$ et $\chi_a^B(G) \geq \chi^B(G)$
- La preuve du théorème de Hanse, Hertz et Kuplinsky s'étend aussi à la coloration acyclique et on a donc :

$$max\{\chi_a(G), \left\lceil \frac{n}{B} \right\rceil\} \leq \chi_a^B(G) \leq \left\lfloor \frac{n - \chi_a(G)}{B} \right\rfloor + \chi_a(G)$$

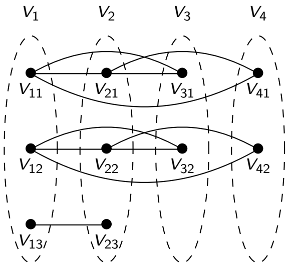
- Ces bornes sont optimales.

Nombre chromatique

Preuve : Soient n, p, $B > 0$ tels que $p, B \leq n$, et $c = max\{\lceil \frac{n}{B} \rceil, p\}$, on va prouver qu'il existe un graphe G tel que :

- G a n sommets.
- $\chi_a(G) = p$.
- $\chi_a^B(G) = c$.

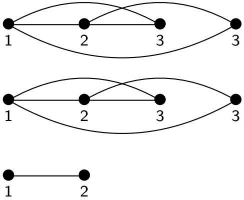
Soient $V_1, V_2, ..., V_c$, c ensembles indépendants de sommets, avec $|V_i| = \lceil \frac{n}{c} \rceil$ si $i \leq n \mod c$, et $|V_i| = \lfloor \frac{n}{c} \rfloor$ sinon. Chaque sommet de v sera noté v_{ij}, avec v_{ij} étant le j-ième sommet de V_i. On met une arrête entre v_{ij} et $v_{i'j'}$, si et seulement si $j = j'$ et $i \leq p - 1 \vee i' \leq p - 1$.

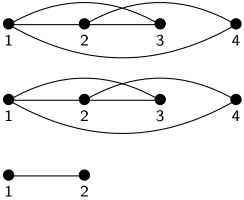


$n = 10,\ B = 3,\ p = 3,\ c = 4$

Nombre chromatique

Preuve(suite) :



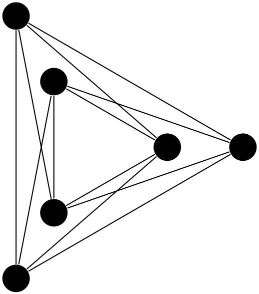


- On colore chaque sommet v_{ij} par :
  - La couleur i si $i \leq p - 1$.
  - La couleur p sinon.
- $\chi_a = p$.

- $|V_i| \leq \left\lceil \frac{n}{c} \right\rceil \leq B$
- $\chi_a^B = c$.

Nombre chromatique

Preuve(suite) : La borne supérieure est atteinte par les graphes k-partis complets.



1 Définitions

2 Coloration acyclique

3 Coloration orientée

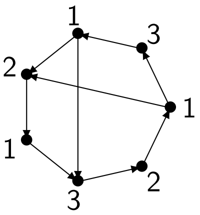
4 Coloration par liste

5 Conclusion

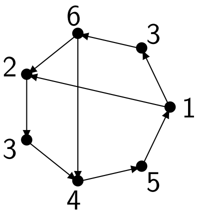
Coloration orientée

Définition

Une coloration $c : V \mapsto \Omega$ d'un graphe orienté $G = (V, E)$ est dite orientée si tous les arcs entre deux classes de couleurs sont orientés dans le même sens.



Coloration non orientée



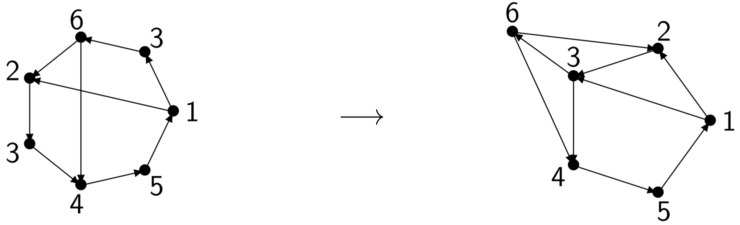
Coloration orientée

Homomorphisme

Remarque

Une coloration orientée c d'un graphe orienté $G = (V, E)$ définit un homomorphisme de G vers une graphe G' dont les sommets sont les couleurs utilisées par c. Inversement tout homomorphisme de graphe définit une coloration orientée sur le graphe de départ.

$$uv \in E(G) \implies c(u)c(v) \in E(G')$$



Nombre chromatique

Remarque

Soit B un entier positif, le nombre chromatique orienté et le nombre chromatique orienté B-borné d'un graphe G, sont définis de la même manière que pour la coloration propre.

- Par définition on a : $\chi_o^B(G) \geq \chi_o(G) \geq \chi(G)$ et $\chi_o^B(G) \geq \chi^B(G)$
- La preuve du théorème de Hanse, Hertz et Kuplinsky s'étend aussi à la coloration orientée et on a donc :

$$max\{\chi_o(G), \left\lceil \frac{n}{B} \right\rceil\} \leq \chi_o^B(G) \leq \left\lfloor \frac{n - \chi_o(G)}{B} \right\rfloor + \chi_o(G)$$

Nombre chromatique

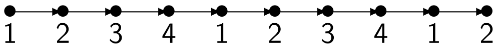
Remarque

Soit B un entier positif, le nombre chromatique orienté et le nombre chromatique orienté B-borné d'un graphe G, sont définis de la même manière que pour la coloration propre.

- L'optimalité n'a pas encore été prouvée.
- Borne inférieure atteinte par les chemins dirigés, les circuits (i.e. cycles avec tous les arcs orientés dans le même ses) et les
- Des tentatives sont en cours pour étendre ces résultats à d'autres orientations des cycles et des chaînes.

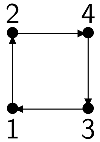
chemin dirigé

- Si P est un chemin dirigé de longueur au moins 2, alors $\chi_o(P) = 3$ et pour tout entier positif B, $\chi_o^B(P) = max\{\chi_o(P), \lceil \frac{n}{B} \rceil\}$.
- Il suffit de colorer successivement avec les couleurs $1, \ldots, max\{\chi_o(P), \lceil \frac{n}{B} \rceil\}$.



$n = 10, \ B = 3$

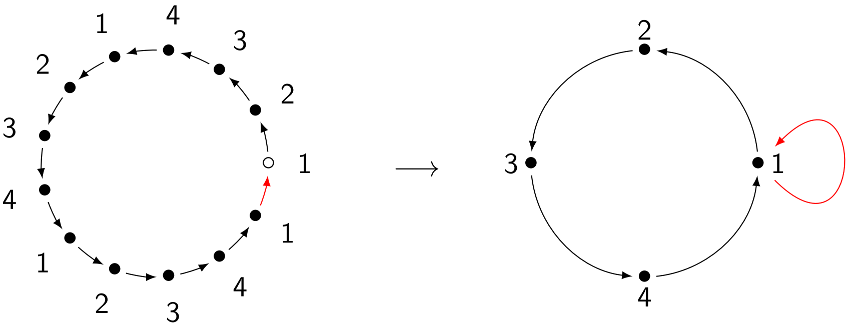
- cette coloration est un homomorphisme vers le circuit dirigé à $max\{\chi_o(P), \lceil \frac{n}{B} \rceil\}$ sommets.



Circuit

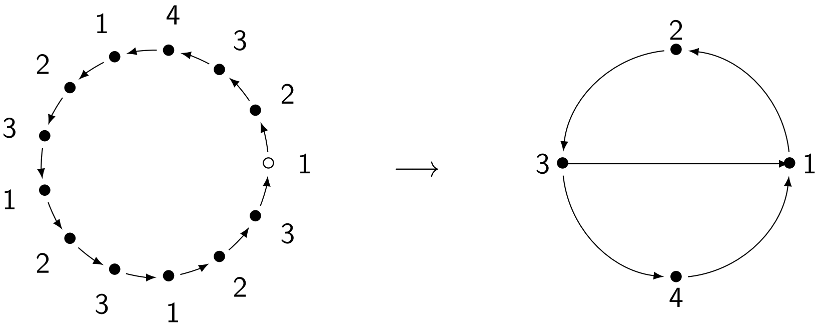
- Si C est un circuit de plus de 6 sommets, alors pour tout entier positif B, $\chi_o^B(C) = max\{\chi_o(C), \lceil \frac{n}{B} \rceil\}$.
- Si $max\{\chi_o(C), \lceil \frac{n}{B} \rceil\} = 3$ on prouve que la coloration comme pour les chemins dirigés fonctionne.
- Si $max\{\chi_o(C), \lceil \frac{n}{B} \rceil\} \geq 4$ on colore de la même manière que les chemins dirigés, si on a un conflit à la fin du circuit, comme l'image par cette coloration est un circuit de plus de 4 sommets on peut toujours ajouter des arcs à cette image sans créer de conflits.
- Le même raisonnement marche pour les graphes obtenus par l'inversion de l'orientation d'un seul arc d'un circuit.

Circuit



$n = 13,\ B = 4$

Circuit



$n = 13,\ B = 4$

1 Définitions

2 Coloration acyclique

3 Coloration orientée

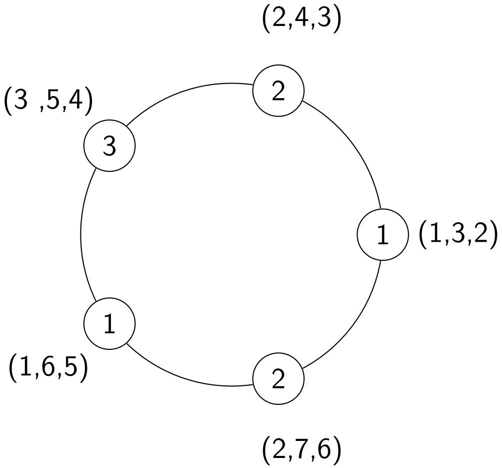
4 Coloration par liste

5 Conclusion

Coloration par liste

- On attribue une liste de couleurs $L(v)$ à chaque sommet v d'un graphe G.
- Une coloration par liste de (G, L) consiste à choisir pour chaque sommet v une couleur dans la liste $L(v)$, telle que la coloration soit propre.
- Pour k positif, un graphe est k-liste-colorable si et seulement si, pour toute affectation de liste L, telle que $\forall v \in V(G), |L(v)| \geq k$, on peut trouver une coloration par liste de (G, L)

Coloration par liste

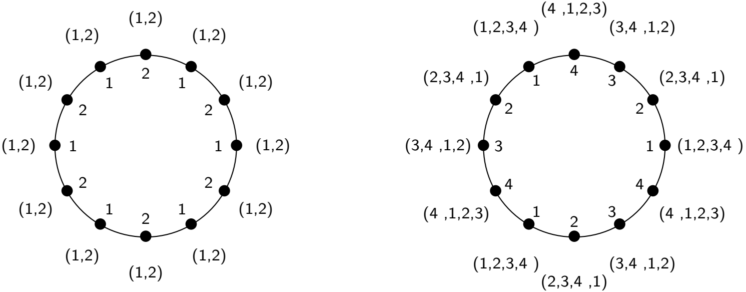


Nombre chromatique

Définition

Pour un graphe $G = (V, E)$, le plus petit entier k tel que G soit k-liste-colorable est appelé nombre chromatique par listes, et noté $\chi_\ell(G)$. Le nombre chromatique B-borné par listes, noté $\chi_\ell^B(G)$, est défini de la même manière que pour la coloration propre.

Nombre chromatique

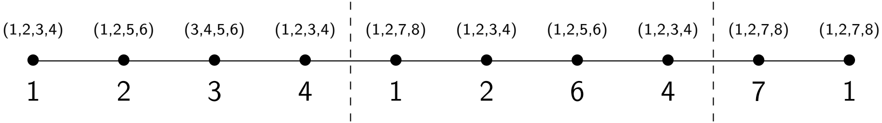


À gauche une 2-coloration par liste mais non 3-bornée, et à droite une 4-coloration par liste 3-bornée

Nombre chromatique

- $\chi_\ell^B \geq \chi_\ell \geq \chi$.
- $\chi_\ell^B \geq \chi^B$.
- La borne inférieure du théorème de Hanse, Hertz et Kuplinsky, tient toujours pour la coloration par liste.
- Les chaînes et les cycles atteignent cette borne inférieure, on a alors si G est une chaîne ou un cycle :

$$\chi_\ell^B(G) = max\{\left\lceil \frac{n}{B} \right\rceil, \chi_\ell(G)\}$$



$n = 10,\ B = 3\ c = 4$

1. Définitions
2. Coloration acyclique
3. Coloration orientée
4. Coloration par liste
5. Conclusion

- Le théorème de Hanse, Hertz et Kuplinsky, tient pour les colorations acyclique et orientée.
- L'optimalité a été prouvée pour la coloration acyclique, pas encore pour la coloration orientée.
- La borne inférieure tient pour la coloration par liste.
- Qu'en est il d'autres types de colorations de sommets ?
- Extension des résultats aux arbres, cycles, chaînes, graphes bipartis, etc.
- Peut on caractériser les graphes atteignant les bornes pour chaque coloration ?
- Colorations des arêtes.
- Étude algorithmique détaillée du problème, pour chaque coloration.

Merci.