

Le problème et ses applications

Nous étudions dans ce stage de Master 1 une méthode de débruitage d'images proposée par Zoran et Weiss dans [4] et en proposons une modification basée sur le transport optimal.

Le problème du débruitage d'images consiste à estimer une image $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$, considérée ici comme un vecteur, à partir d'une observation 'bruitée' $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$. Le nature du lien entre \mathbf{x} et \mathbf{y} est considéré ici comme étant aléatoire. Un modèle additif pour en rendre compte s'écrit

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \eta, \quad (1)$$

où η est une réalisation d'une variable aléatoire centrée.

Le problème du débruitage d'images se rencontre chaque fois que l'amplitude du signal enregistré est faible. C'est le cas par exemple en photographie numérique, lorsque les capteurs utilisés reçoivent un faible nombre de photons, à cause d'un éclairage insuffisant ou d'une durée d'exposition trop courte.

Modélisation des patches

L'approche de Zoran et Weiss est basée sur la modélisation probabiliste des patches **non bruités** de la classe d'images que l'on souhaite considérer (ici, les images "naturelles"). Un patch est une "imagette", généralement carrée, extraite d'une image de plus grande taille.

Le modèle que nous avons retenu pour ce stage est celui du mélange gaussien : tout patch \mathbf{z} est ainsi considéré comme une réalisation d'une variable aléatoire de densité

$$p(\mathbf{z}) = \sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(\mathbf{z} | \mu_k, \Sigma_k), \quad (2)$$

$\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ désignant la densité d'une loi normale de moyenne μ et de matrice de covariance Σ .

Les paramètres du modèle sont appris en amont du débruitage, sur un large ensemble de patches extraits d'images naturelles **non bruitées**. Le modèle est ensuite fixé, en particulier il n'est pas réévalué lorsqu'une nouvelle image bruitée est obtenue.

Les matrices de covariance présentes dans (2) induisent des structures particulières comme illustré dans la figure suivante, extraite de [1].

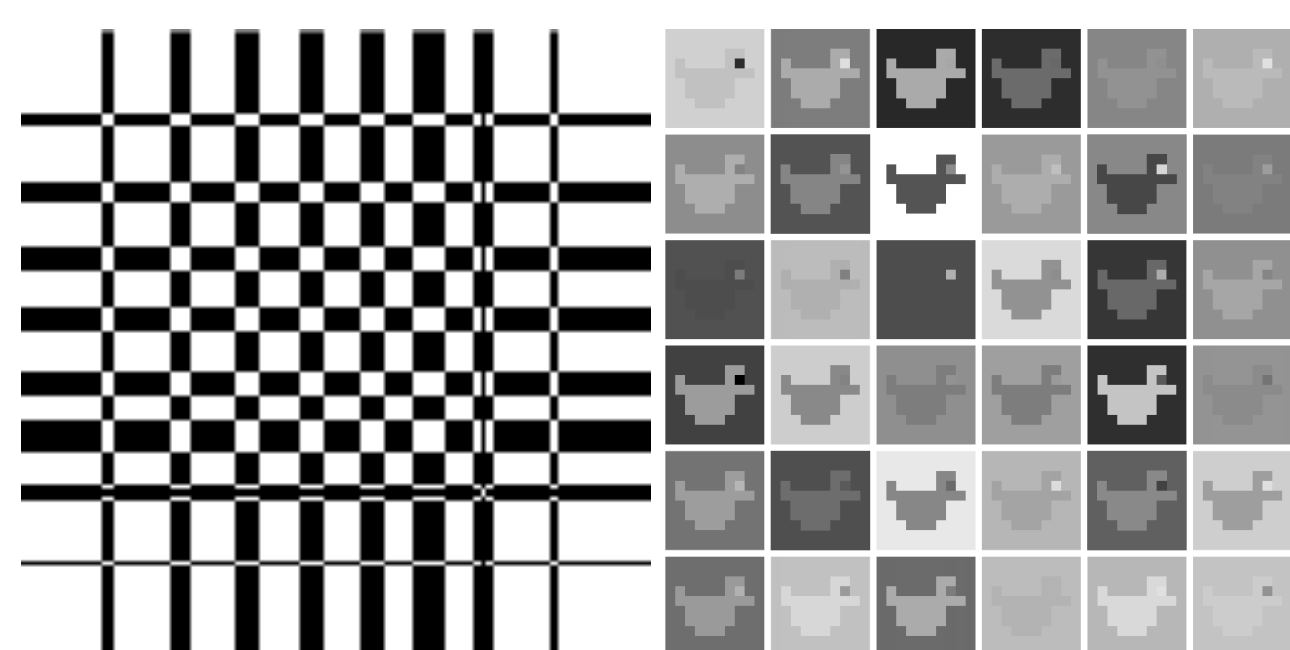


Fig. 1: À gauche : une matrice de covariance Σ ; à droite : réalisations selon $\mathcal{N}(0.5I, \Sigma)$.

Des patches vers l'image entière

L'estimation de \mathbf{x} à partir d'une observation bruitée \mathbf{y} selon (1) s'obtient en minimisant une fonction de coût faisant intervenir la log-vraisemblance issue de (1) et une pénalisation, pen , issue du modèle (2). En faisant l'hypothèse d'un bruit blanc gaussien, on obtient la formulation

$$\text{Min}_{\mathbf{x}} \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 + \text{pen}(\mathbf{x}). \quad (3)$$

La pénalisation que nous avons étudiée est celle introduite dans [4] sous le nom ExPected Log-Likelihood (EPLL) qui s'écrit

$$\text{pen}(\mathbf{x}) = -\text{EPLL}(\mathbf{x}) = -\sum_{i=1}^M p(P_i \mathbf{x}) = -M \mathbb{E}_{\mathbf{z} \sim \nu} [p(\mathbf{z})], \quad (4)$$

- $P_i(\mathbf{x})$ désignant le $i^{\text{ème}}$ patch extrait de \mathbf{x} ;
- M le nombre de patches extraits. Généralement, les patches sont extraits avec un chevauchement maximal;
- p la **densité du modèle génératif** qui s'applique aux patches;
- $\nu = 1/M \sum_{i=1}^M \delta_{P_i(\mathbf{x})}$ la distribution empirique associée aux patches extraits de \mathbf{x} .

Pour le modèle de mélange gaussien (2), la pénalisation s'écrit

$$\text{pen}(\mathbf{x}) = -\text{EPLL}(\mathbf{x}) = -\sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(P_i \mathbf{x} | \mu_k, \Sigma_k). \quad (5)$$

Une partie importante du travail du stage a porté sur la justification d'un algorithme d'optimisation proposé dans [4] permettant de fournir une solution approchée au problème (3).

Pénalisation basée sur le transport optimal

La pénalisation EPLL nécessite l'utilisation d'un modèle génératif **dont la densité peut être évaluée**. Afin de pouvoir intégrer les modèles appris par des réseaux génératifs profonds, par exemple antagonistes [2], il est nécessaire de proposer une autre approche. Durant ce stage, l'étude d'une nouvelle approche basée sur le transport optimal régularisé [3] a débuté. Il s'agit de pénaliser, **en moyenne**, une divergence basée sur la distance de Wasserstein entre la distribution empirique issue des patches extraits de \mathbf{x} et un échantillon simulé selon le modèle génératif retenu.

Une première mise en oeuvre, dans laquelle les gradients de la divergence mentionnée sont évalués par différentiation automatique a été réalisée. Les résultats sont prometteurs et la poursuite des travaux lors d'un stage de Master 2 suivi d'une thèse est envisagée.

Quelques résultats

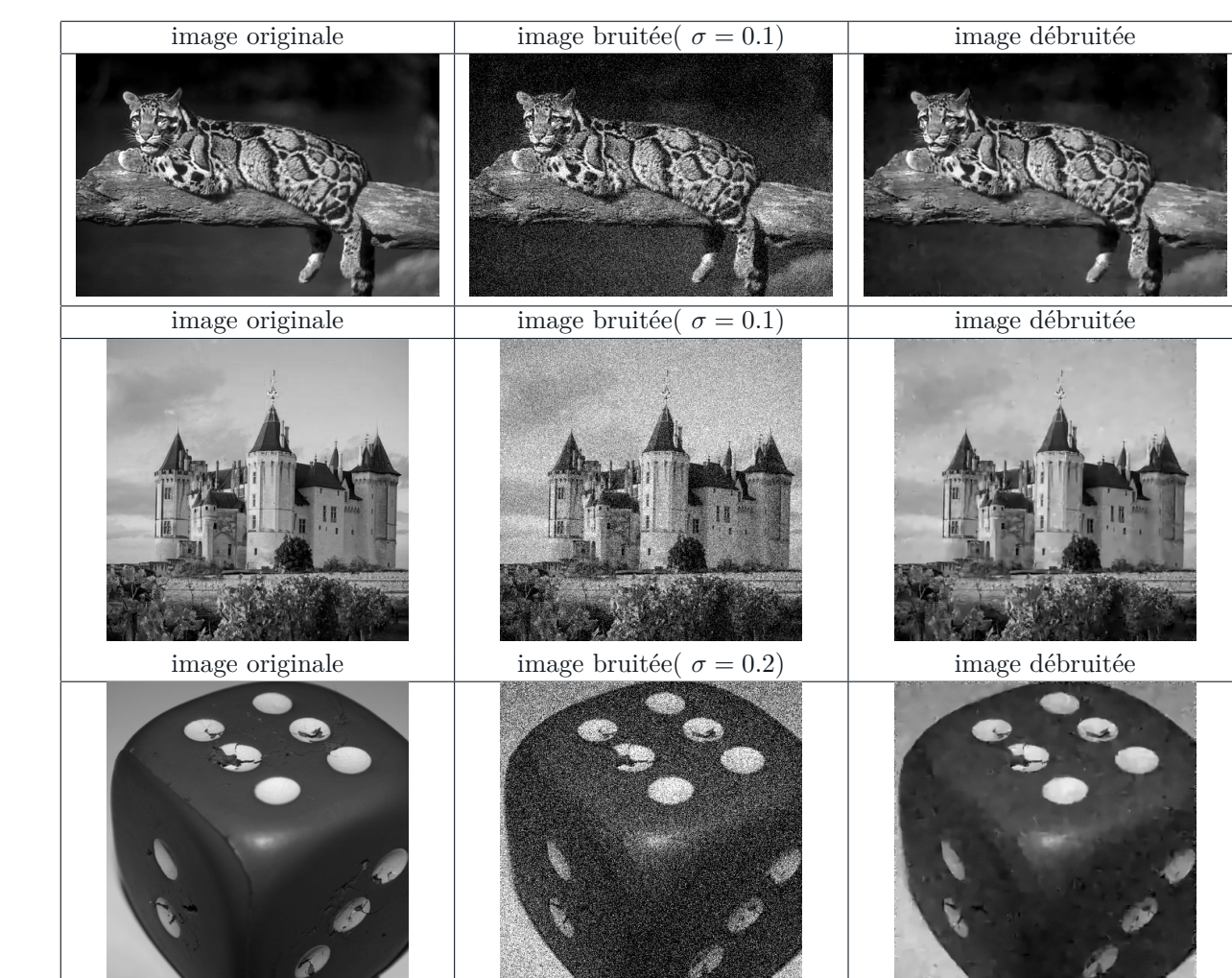


Fig. 2: Différents résultats pour la méthode de Zoran et Weiss

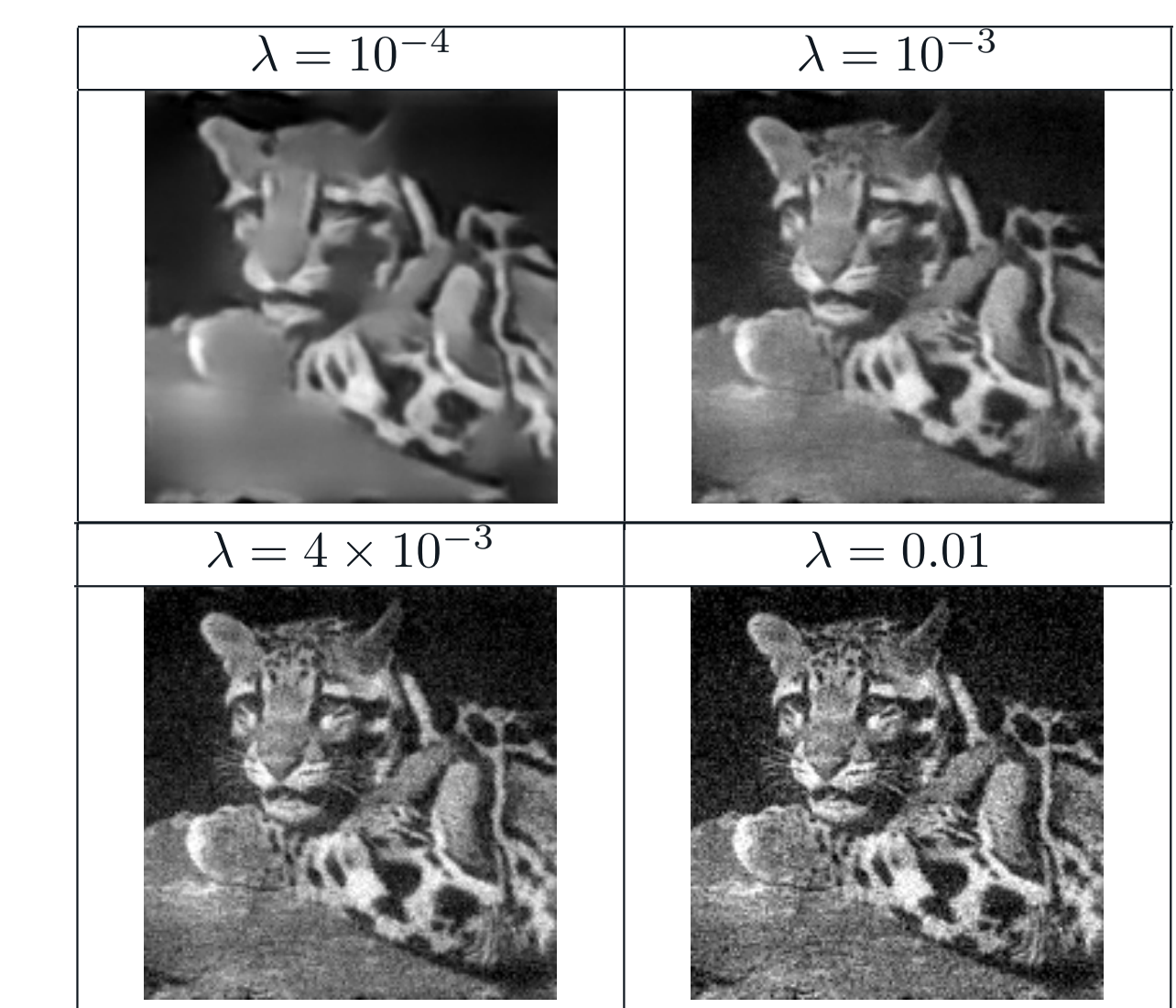


Fig. 3: Effet de la valeur du paramètre λ dans (3) sur le résultat de la méthode basée sur le transport optimal.

Remerciements

Ce stage a été financé par le Réseau Thématique de Recherche DIAMS.



References

- [1] Julie DELON et Antoine HOUDARD. "Gaussian priors for image denoising". In : *Denoising of Photographic Images and Video*. Springer, 2018, p. 125-149.
- [2] Ian GOODFELLOW et al. "Generative adversarial nets". In : *Advances in neural information processing systems*. 2014, p. 2672-2680.
- [3] Gabriel PEYRÉ, Marco CUTURI et al. "Computational Optimal Transport: With Applications to Data Science". In : *Foundations and Trends® in Machine Learning* 11.5-6 (2019), p. 355-607.
- [4] Daniel ZORAN et Yair WEISS. "From learning models of natural image patches to whole image restoration". In : *2011 International Conference on Computer Vision*.