Jérôme DURAND-LOSE

Automates cellulaires, simulation et réversibilité

LaBRI, UMR CNRS 5 800,
Université Bordeaux I,
351, cours de la Libération,
33 405 TALENCE Cedex,
FRANCE.

jdurand@labri.u-bordeaux.fr

http://dept-info.labri.u-bordeaux.fr/~jdurand/

Introduction

Définitions

Propriétés

Simulation

Universalité

Conclusion

Introduction

Propriétés mathématiques des « shift dynamical systems »

Modélisation physique

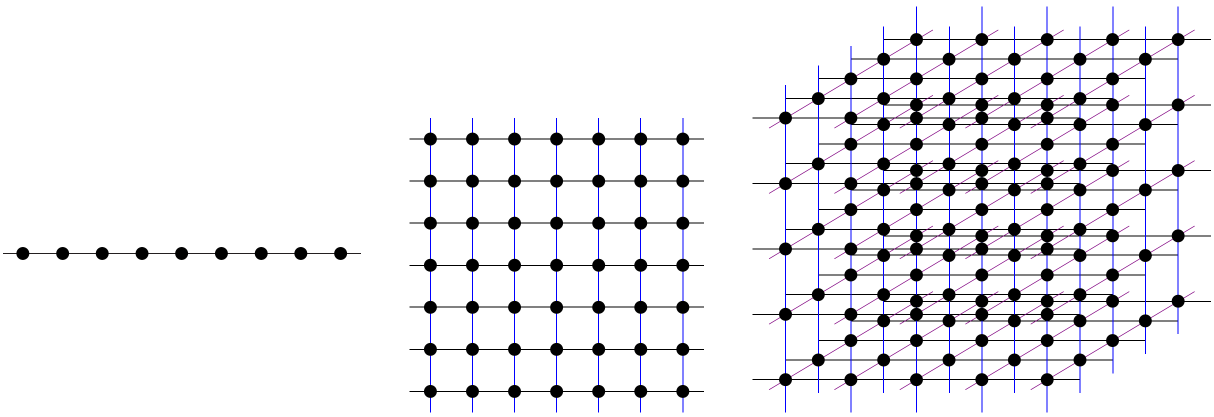
Économies d'énergie

Limites du calcul réversible

(Bennett, Toffoli and Margolus)

Espace sous-jacent

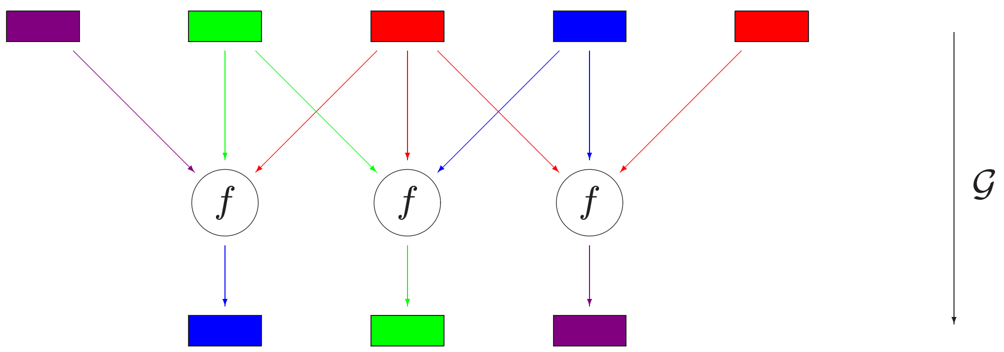
Dimension : d $\rightsquigarrow$ $\mathbb{Z}^d$



Espace infini

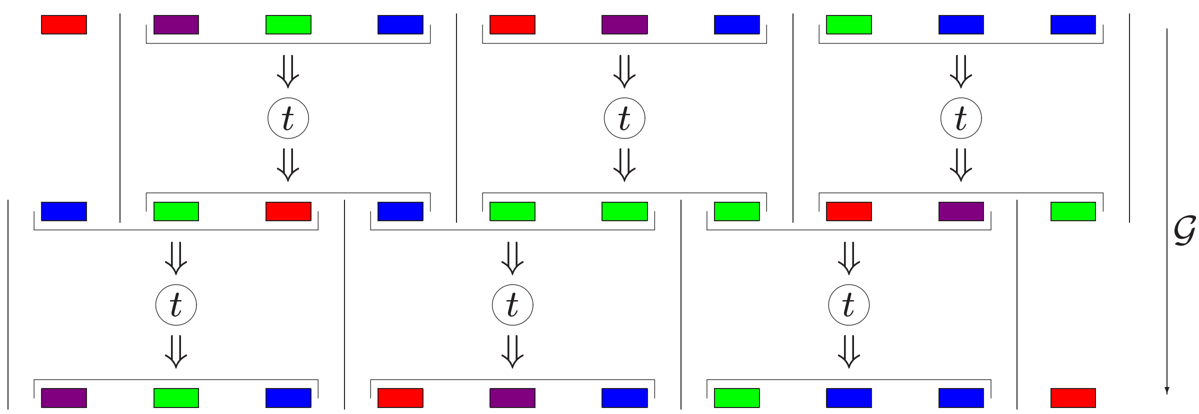
Automate cellulaire (CA)

États	:	$\mathcal{S}$		
Rayon	:	r		
Fonction locale	:	f	:	$\mathcal{S}^{2r+1} \longrightarrow \mathcal{S}$



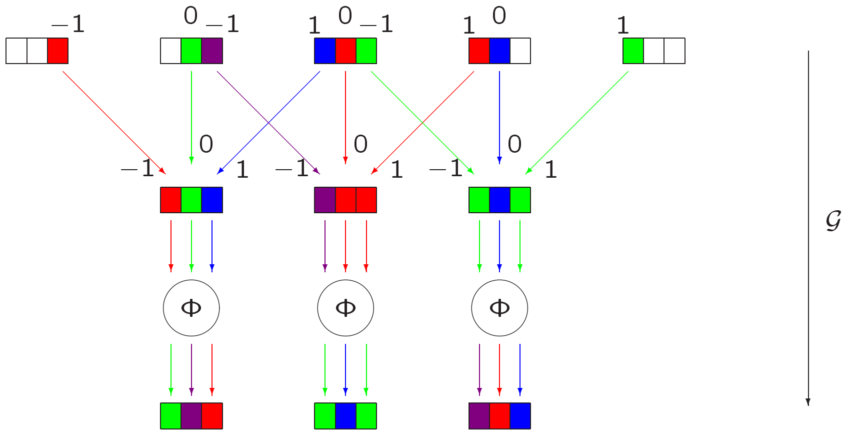
Automate cellulaire par blocs (BCA) (Margolus 84)

États	:	$\mathcal{S}$		
Largeur	:	w		
Fonction de bloc	:	t	:	$\mathcal{S}^w \longrightarrow \mathcal{S}^w$
Nombre de partitions	:	n		$1 \leq n$
Origines	:	$(o_i)_{1 \leq i \leq n}$	$\in$	$\{\ 0,\ 1\ 2\ \ldots\ w-1\ \}$



Automate cellulaire partitionné (PCA) (Morita 89)

$$
\begin{array}{llll}
\text{Rayon} & : & r & \\
\text{États} & : & \mathcal{S} & = \prod_{i=-r}^{r} \mathcal{S}_i \\
\text{Fonction Locale} & : & \Phi & : \prod_{i=-r}^{r} \mathcal{S}_i \longrightarrow \prod_{i=-r}^{r} \mathcal{S}_i
\end{array}
$$



Réversibilité

xCA A est réversible

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \mathcal{G}_{\mathsf{A}}^{-1} \quad \text{existe} \\ \exists \mathsf{B}\ (\text{xCA}),\ \mathcal{G}_{\mathsf{B}} = \mathcal{G}_{\mathsf{A}}^{-1} \end{cases}$$

Résultats connus

A est réversible $\iff$ $\mathcal{G}_{\mathsf{A}}$ est injective
(Moore 62, Myhill 63, Hedlund 69, Richardson 72)

Réversibilité des 1-CA est décidable
(Amoroso and Patt 72)

Réversibilité des d-CA est indécidable pour $2 \leq d$
(Kari 89)

Réversibilité des BCA et des PCA est décidable

Simulation

B simule A

$\Updownarrow$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{C}_{\mathsf{A}} \arrow[r, "\mathcal{G}^{n}_{\mathsf{A}}"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathcal{C}_{\mathsf{A}} \\ \mathcal{C}_{\mathsf{B}} \arrow[r, "\mathcal{G}^{\phi(n,.)}_{\mathsf{B}}"] & \mathcal{C}_{\mathsf{B}} \arrow[u, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

$\Updownarrow$

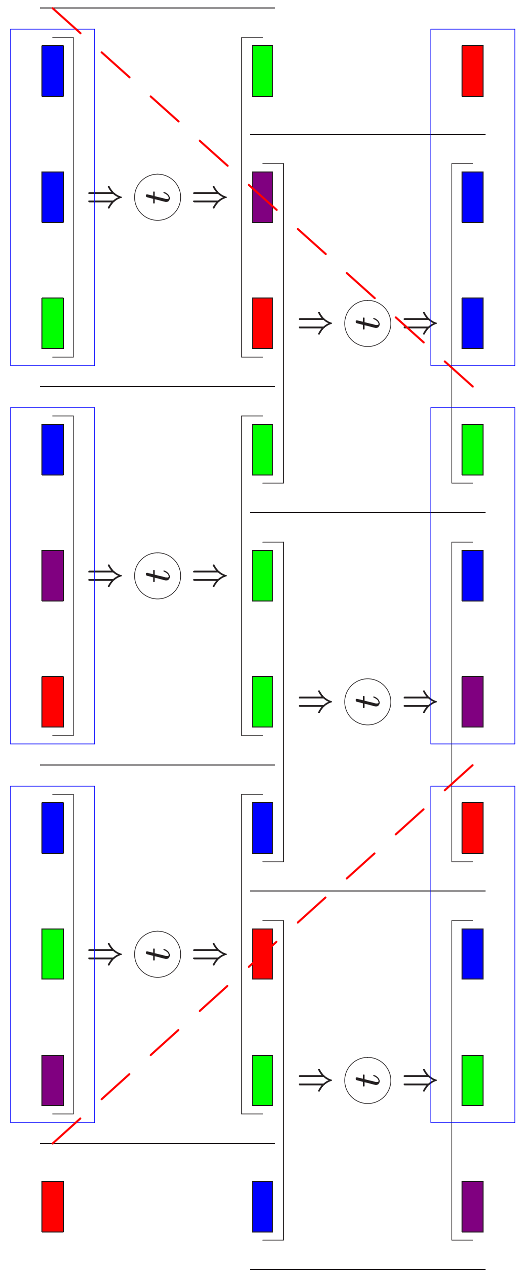
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall c \in \mathcal{C}_{\mathsf{A}}, \qquad \mathcal{G}^{n}_{\mathsf{A}}(c) \;=\; \beta \circ \mathcal{G}^{\phi(n,c)}_{\mathsf{B}} \circ \alpha$$

Pour toute configuration, même infinie

Tout d-CA peut être simulé par un $(d+1)$-R-CA

(Toffoli 77)

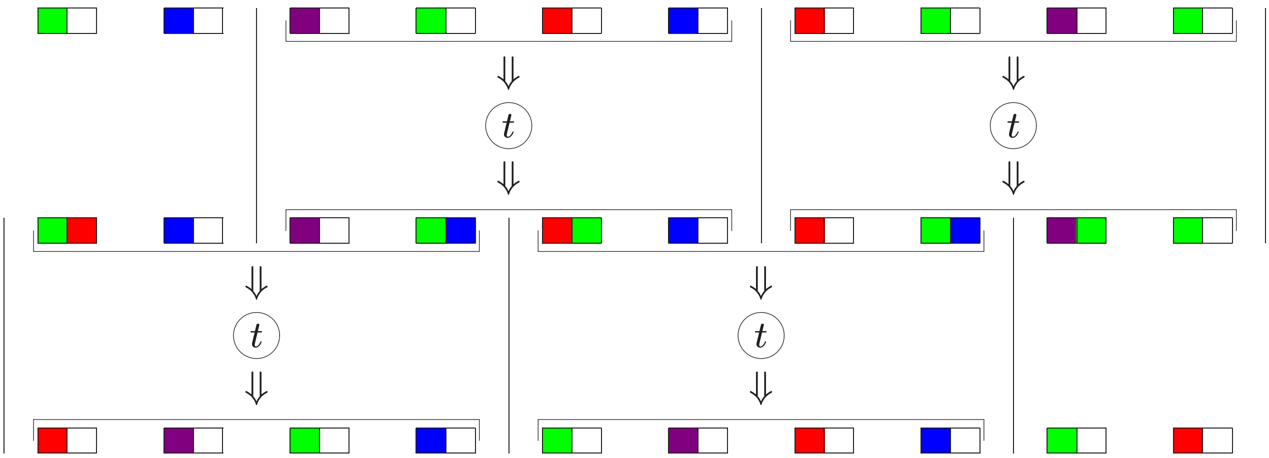
Identification



Réversibilité préservée

BCA et PCA sont des CA

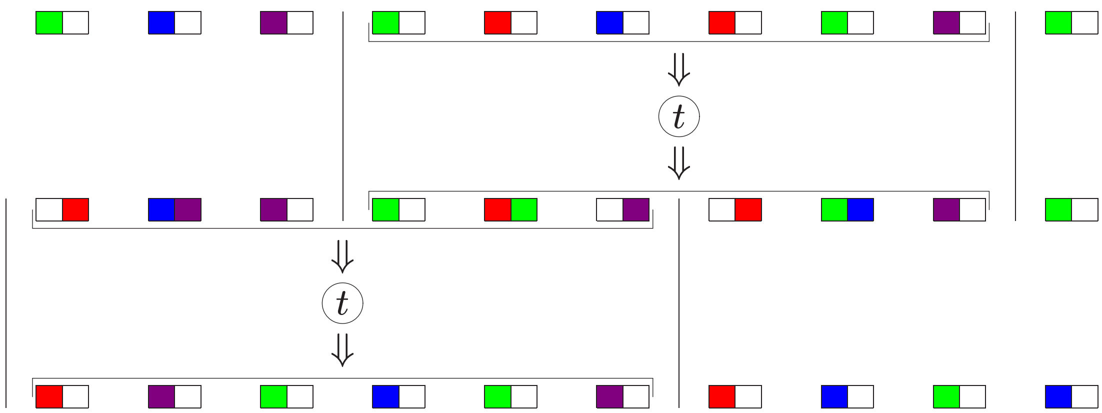
CA par BCA



Réversibilité non préservée

R-CA par R-BCA

Inverse calculable $\qquad$ r assez large les deux

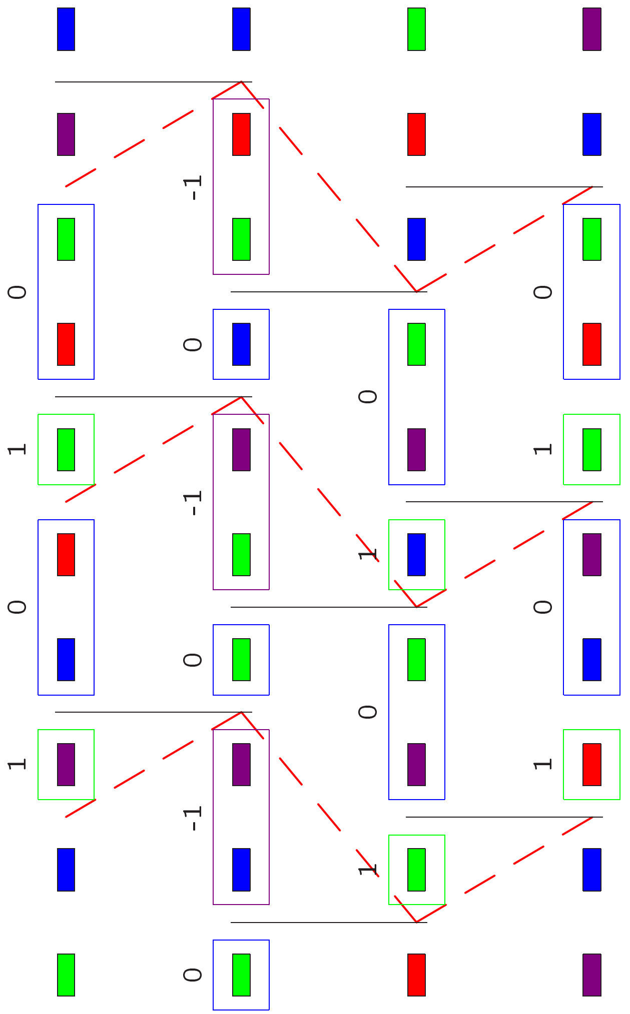


En dimension 1 et conjecture avec 2^d partitions (Kari 96)

Généralisation avec 2^{d+1} partitions de largeur $4r$ (Latin 95)

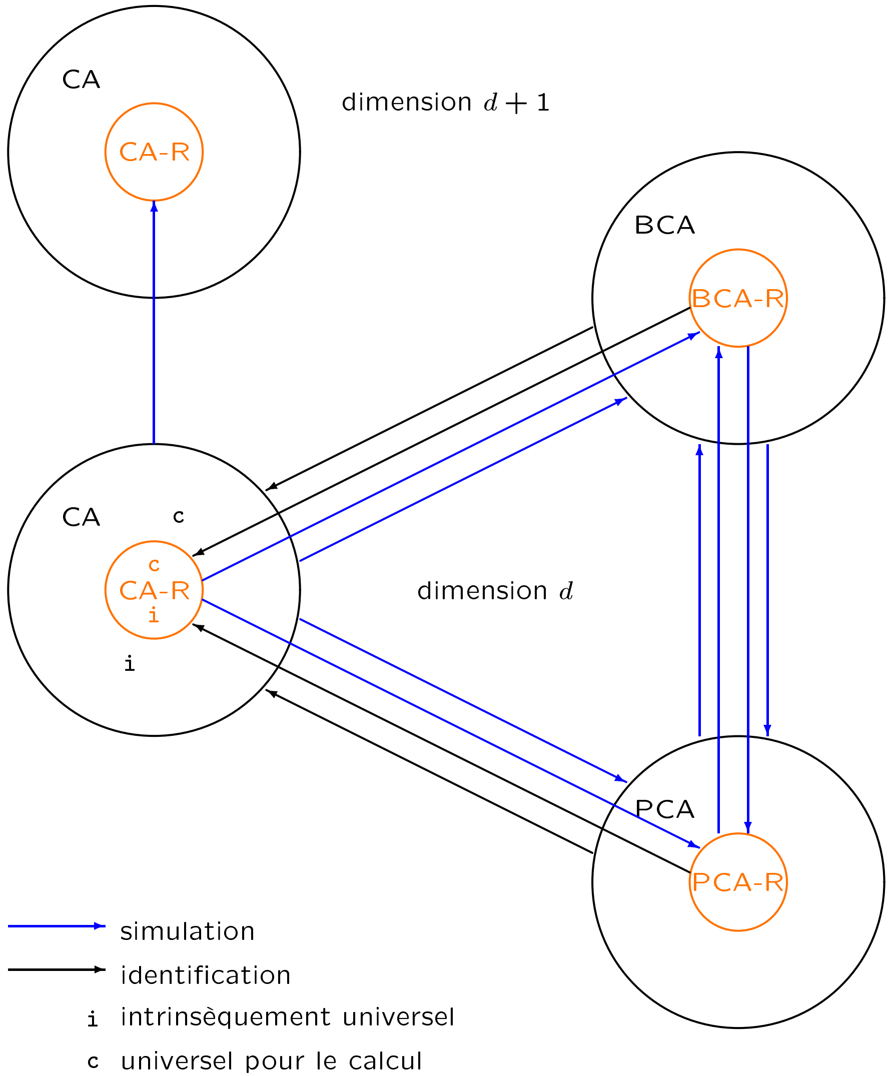
Généralisation avec $d+1$ partitions de largeur $3r(d+1)$ (soumis)

BCA par PCA



Réversibilité préservée

Synthèse



Universel pour le calcul

A est CU

$\Updownarrow$

A est capable de simuler toute machine de Turing

Résultats connus

$\exists$ 1-CA CU

$\exists$ 2-R-CA CU

(Toffoli 77)

$\exists$ 1-R-CA CU

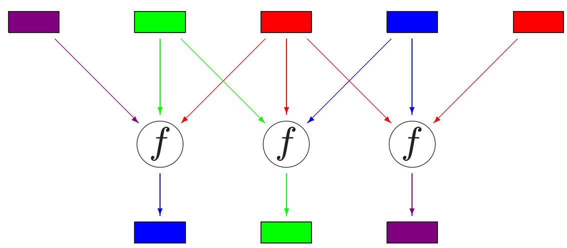
(Morita 89)

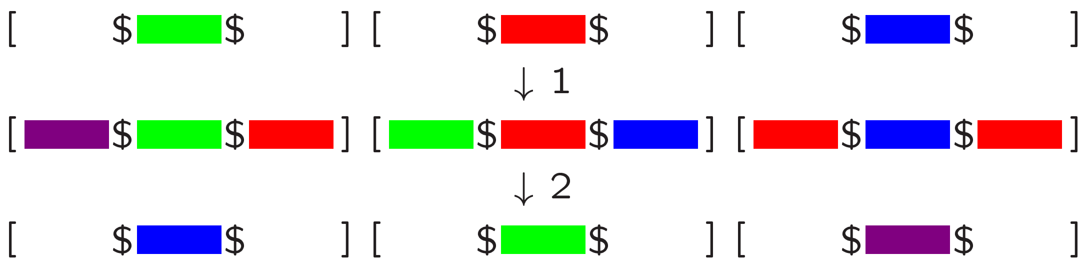
Intrinsèquement universel

A est IU dans une classe d'automates

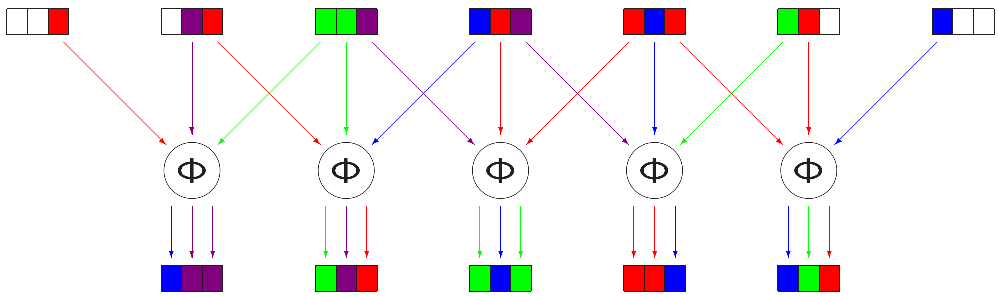
$\Updownarrow$

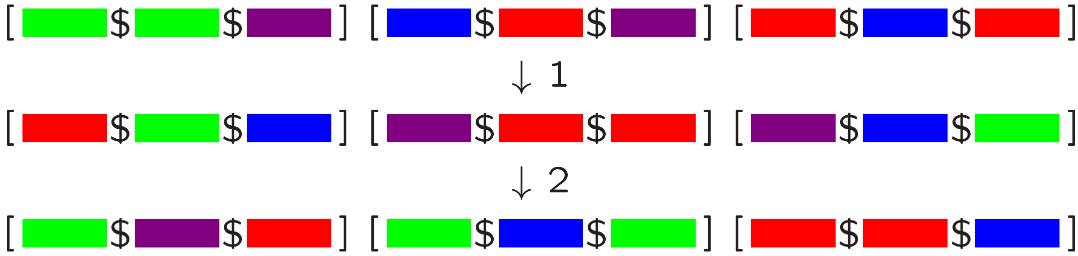
A est capable de simuler tout automate de cette classe





Réversible et intrinsèquement universel





Conclusion

Système de programmation cohérent

Q: Simulation des CA par des R-CA de même dimension ?