

Calculer géométriquement sur le plan

– *machines à signaux* –

Jérôme DURAND-LOSE

MC2, LIP (UMR CNRS, ÉNS Lyon, INRIA, Univ. Claude Bernard Lyon 1)

et Université de Nice-Sophia Antipolis

LIFO – 19 avril 2004

Automates cellulaires

Réversibilité

Systemes complexes

Tas de sable

Machines à
signaux

Algorithmique distribuée

Auto-stabilisation

Lignes

discrètes / continus

Modèles de calcul

« continus »

Plan

- Origine
 - Automates cellulaires
- Machines à signaux
 - Universalité au sens du calcul
 - Modifications géométriques
- Accumulation
 - Non-prédictibilité de l'apparition
 - Exemples, Restriction et Utilisation
- Conclusion et perspectives

Origine

— Automates cellulaires —

Automates cellulaires

Outil de modélisation en biologie, physique. . . parallélisme

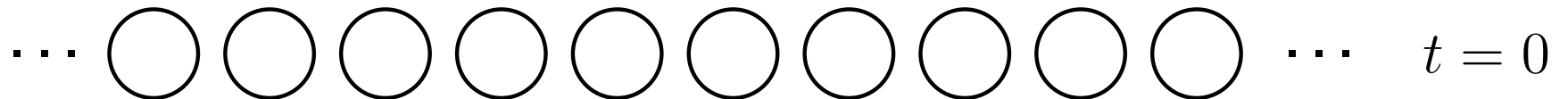
Système dynamique

Automates cellulaires

Outil de modélisation en biologie, physique... parallélisme

Système dynamique

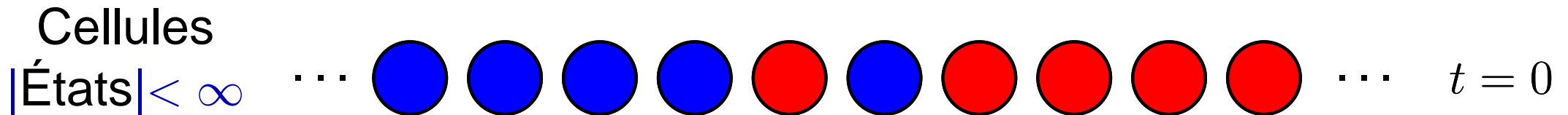
Cellules



Automates cellulaires

Outil de modélisation en biologie, physique... parallélisme

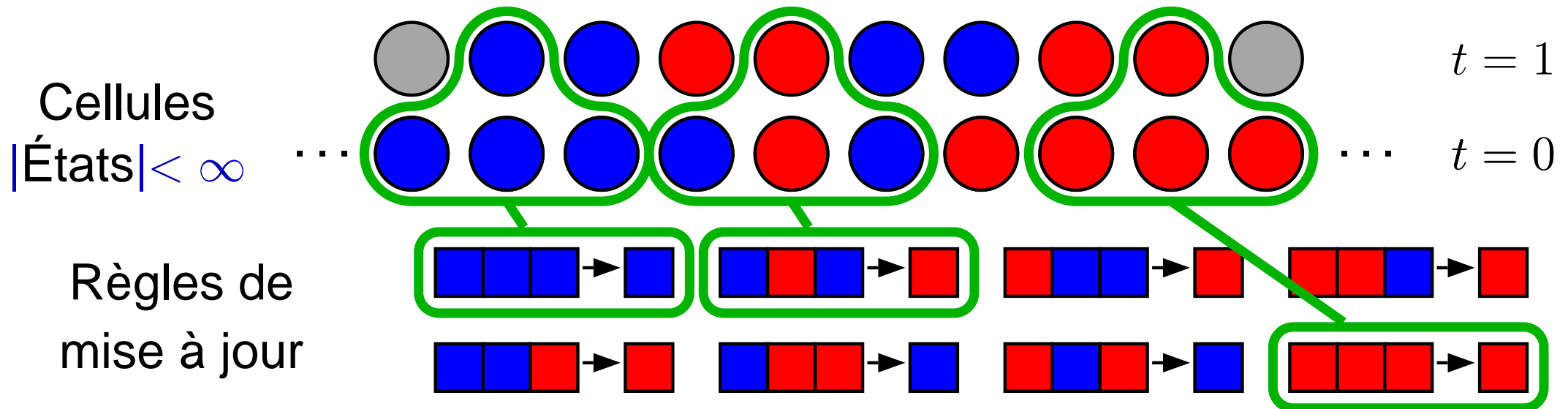
Système dynamique



Automates cellulaires

Outil de modélisation en biologie, physique... parallélisme

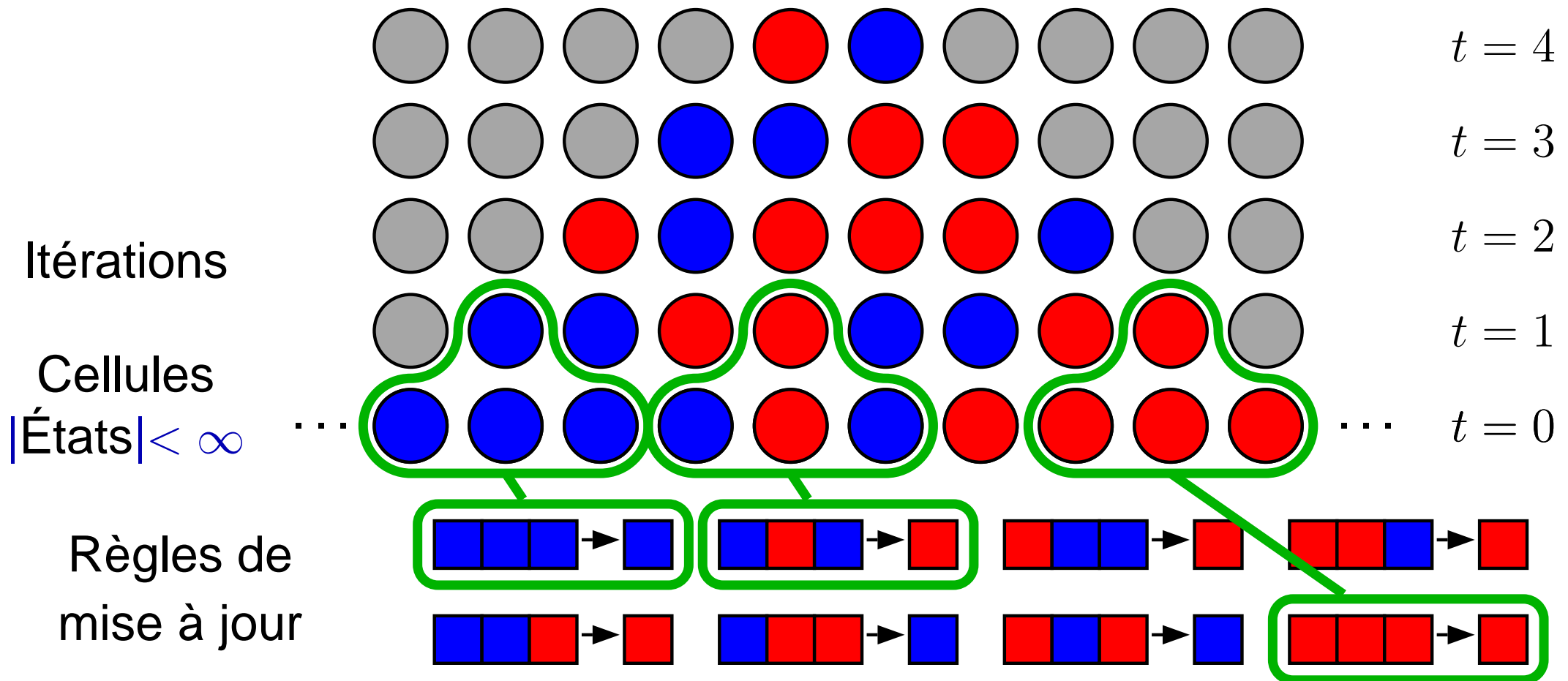
Système dynamique



Automates cellulaires

Outil de modélisation en biologie, physique... parallélisme

Système dynamique



Automates cellulaires

local

uniforme

synchrone

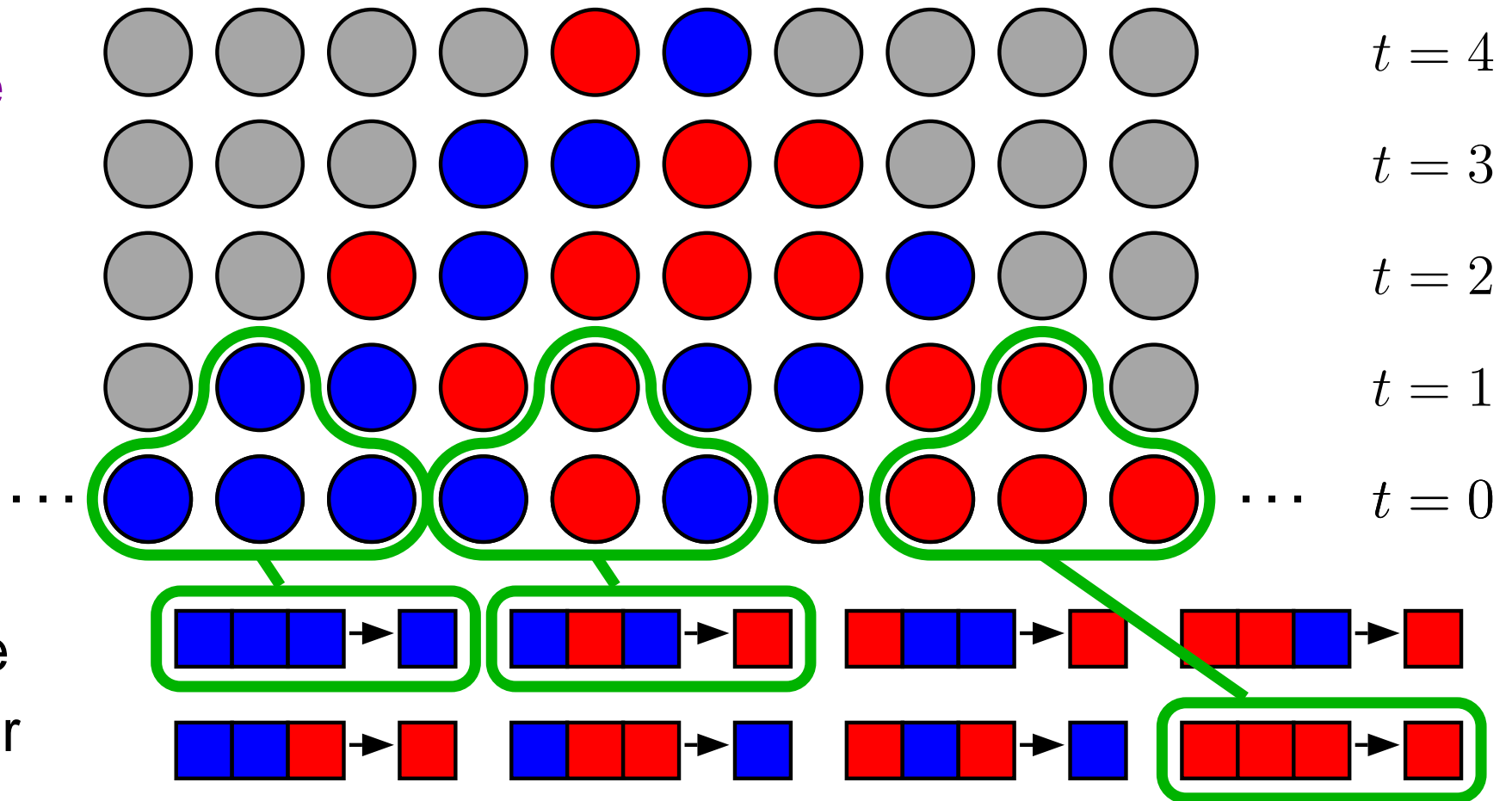
Itérations

Cellules

$$|\text{États}| < \infty$$

Règles de mise à jour

Diagramme espace-temps



Particules, solitons...

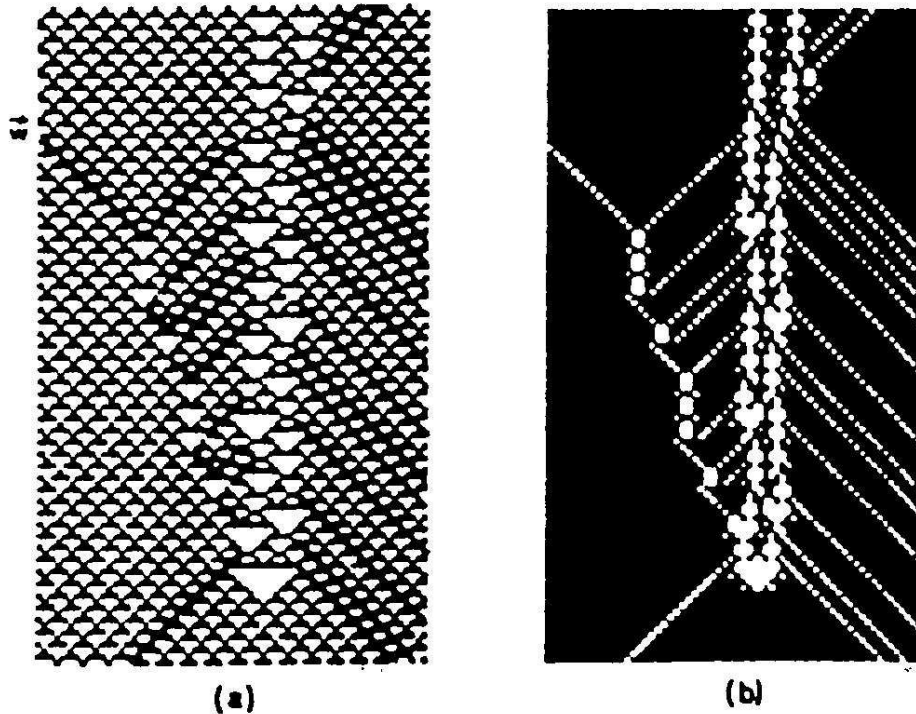


FIG. 7. Rule 54. (a) Annihilation of the radiating particle. (b) The same as (a) with the mapping defined in Fig. 6.

[Boccara et al., 1991, Fig. 7]

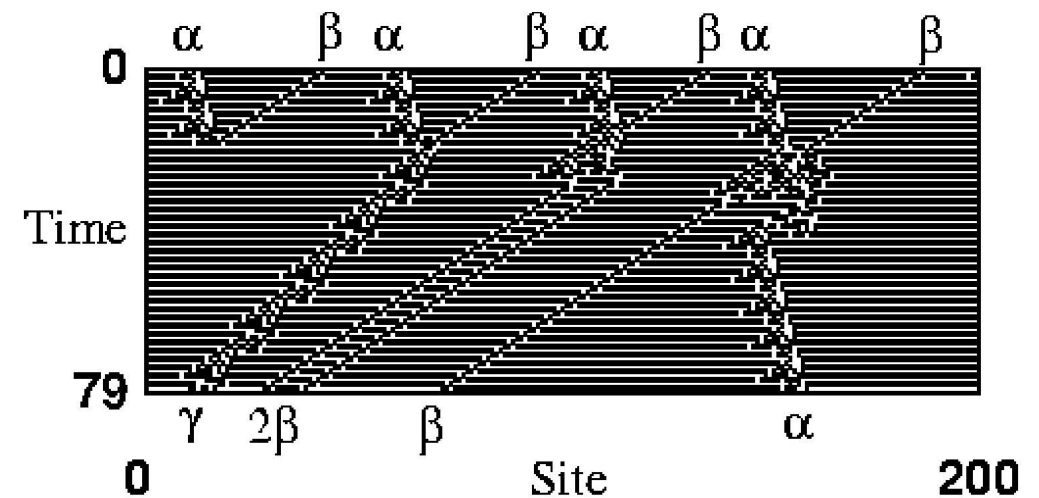


FIG. 7. The four different (out of 14 possible) interaction products for the $\alpha + \beta$ interaction.

[Hordijk et al., 2001, Fig. 7]

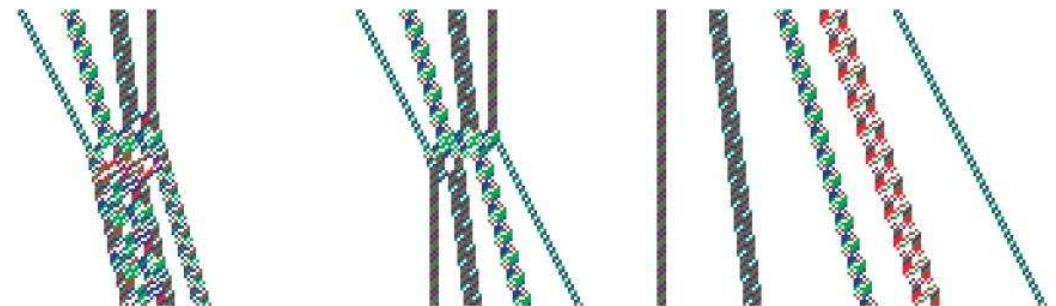


Figure 5. Two collisions of filtrons, and five free filtrons supported by the FPS model; ST diagram applies $q = 1$.

[Siwak, 2001, Fig. 5]

Pour construire un AC Turing-universel

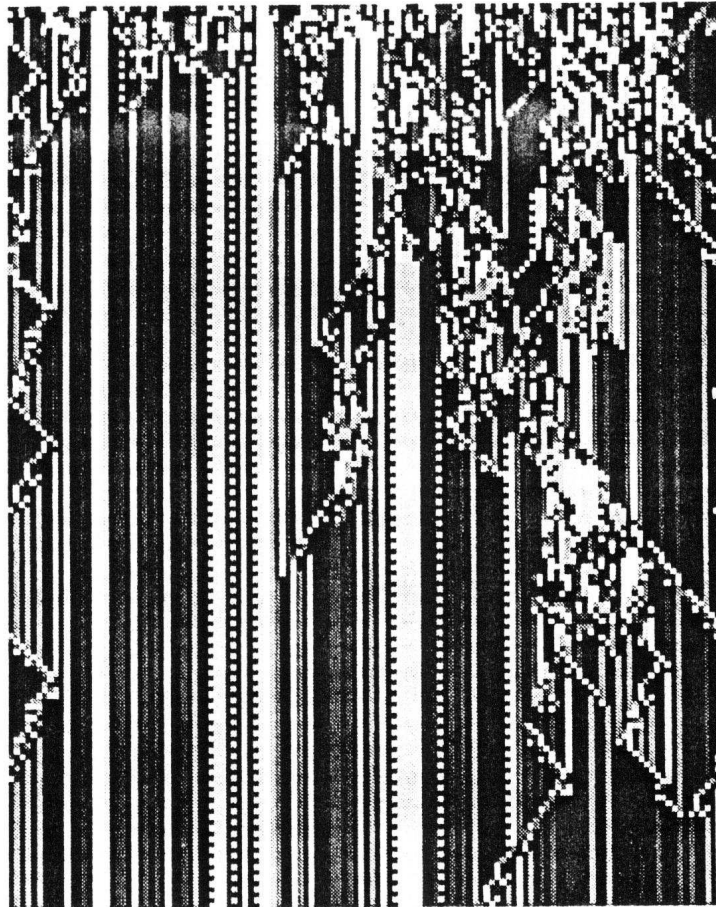


Figure 3: A simulation of the $k = 7$, $r = 1$ universal CA of table 3 for an uncorrelated initial state (with a density of blanks equal to 0.76). Symbols y , 0, 1, A , B , \sqcup , and T are represented by



[Lindgren and Nordahl, 1990, Fig. 4]

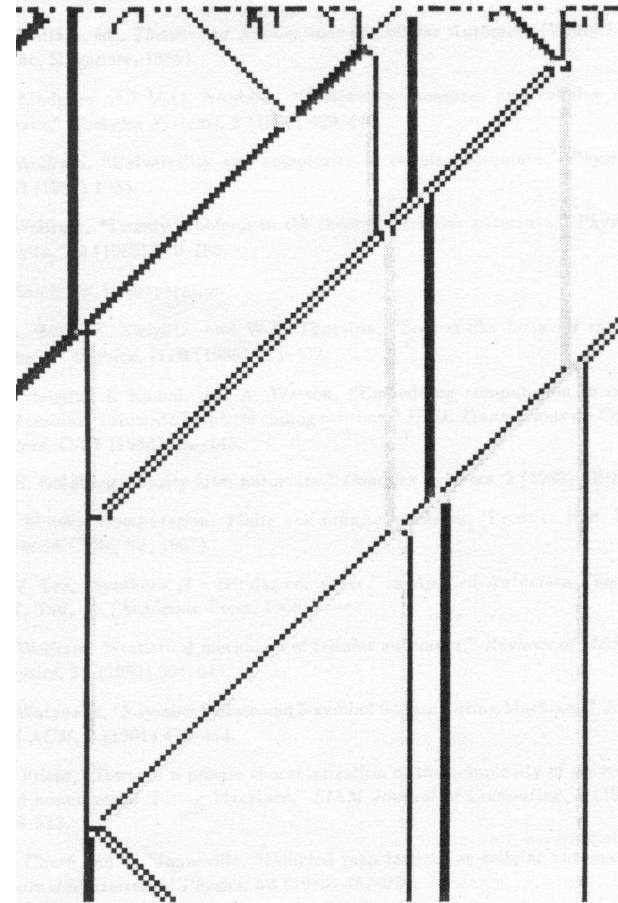


Figure 4: The $k = 4$, $r = 2$ universal cellular automaton of table 4 simulated starting from a random initial state. The symbols 0, 1, \sqcup , and $+$ are represented by



[Lindgren and Nordahl, 1990, Fig. 3]

Algorithmique géométrique

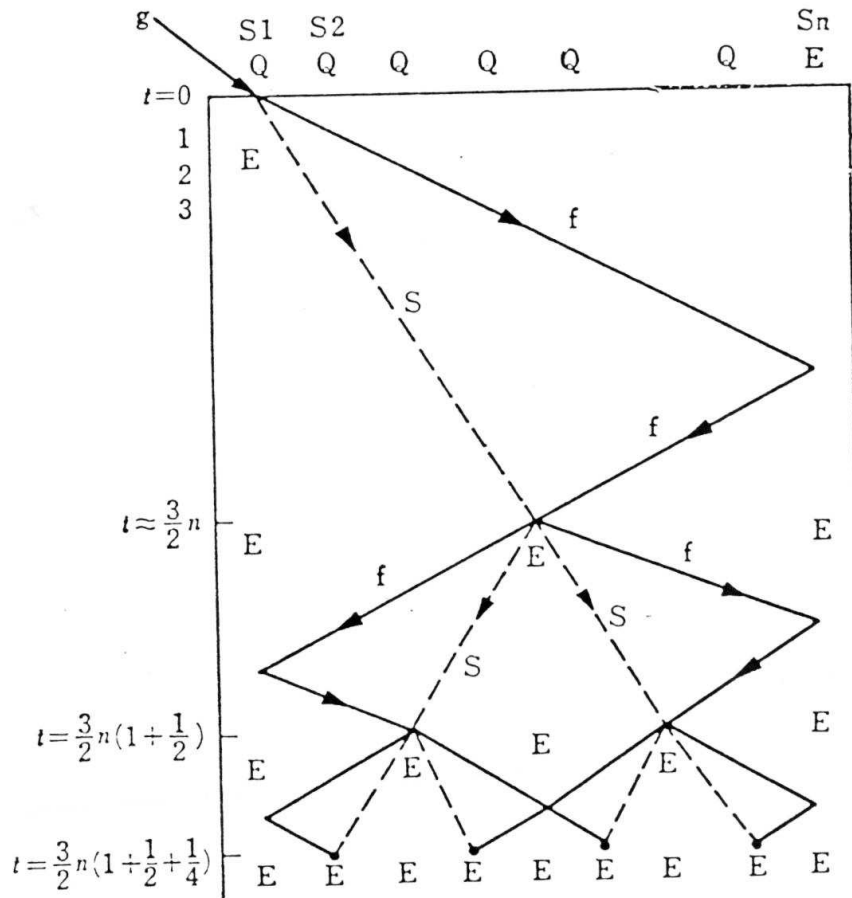


図 3.5 一斉射撃の問題（連続近似）

[Goto, 1966, Fig. 3]

| G | s ₁ | s ₂ | s ₃ | s ₄ | s ₅ | s ₆ |
|-----|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| g | Q | Q | Q | Q | Q | E |
| t=0 | f's'Es | Q | Q | Q | Q | E |
| 1 | E | Q2f | Q | Q | Q | E |
| 2 | E | Q1 | Qf | Q | Q | E |
| 3 | E | Q& | Q | Qf | Q | E |
| 4 | E | Q | Q2 | Q | Qf | E |
| 5 | E | Q | Q1 | Q | Q | f'Ef |
| 6 | E | Q | QS | Q | f'Q | E |
| 7 | E | Q | Q | a'Q* | Q | E |
| 8 | E | Q | f'S'ESf | f's'Esf | Q | E |
| 9 | E | f'2Q | E | E | Q2f | E |
| 10 | f'Ef | 1Q | E | E | Q1 | f'Ef |
| 11 | E | f'S'ESf | E | E | f's'Esf | E |
| 12 | a'Ea | E | a'Ea | a'Ea | E | a'Ea |
| 13 | F | F | F | F | F | F |

圖 3.6 一斉射撃解 ($n=6$)

[Goto, 1966, Fig. 6]

Algorithmique des signaux

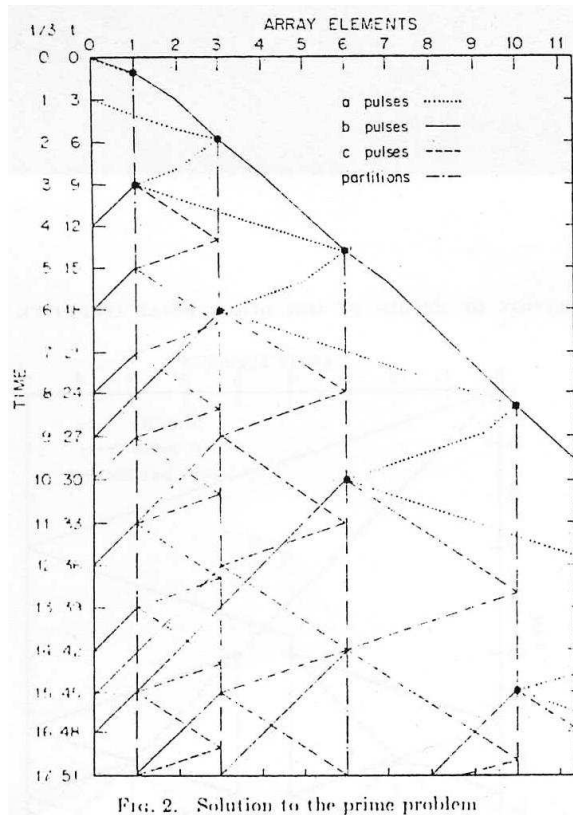


FIG. 2. Solution to the prime problem

[Fischer, 1965, Fig. 2]

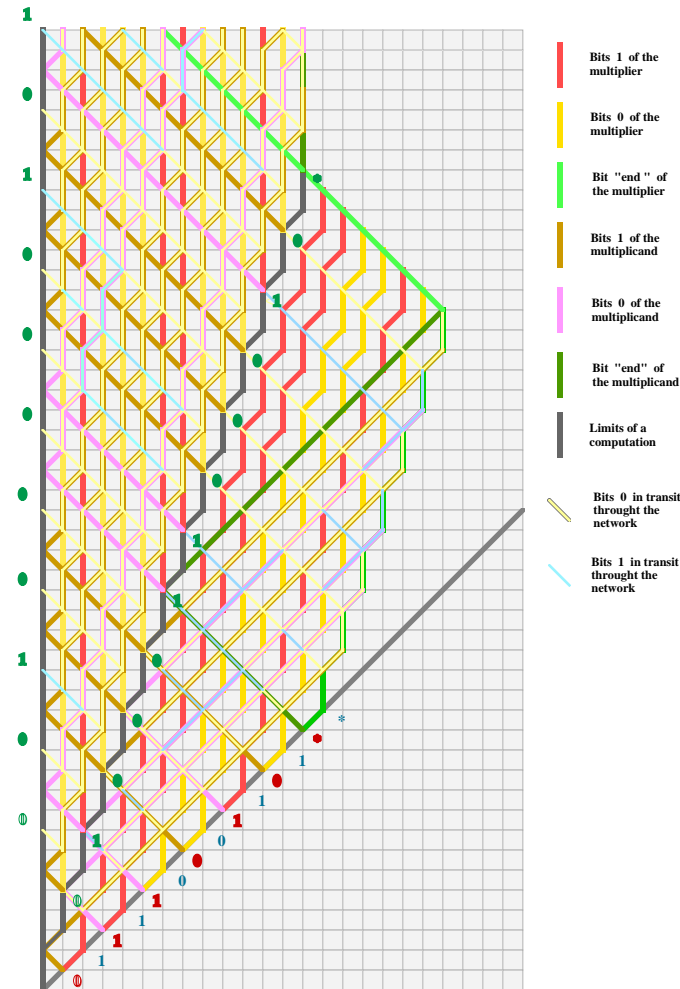


Figure 8: Computing $(ab)^2$.

[Mazoyer, 1996, Fig. 8]

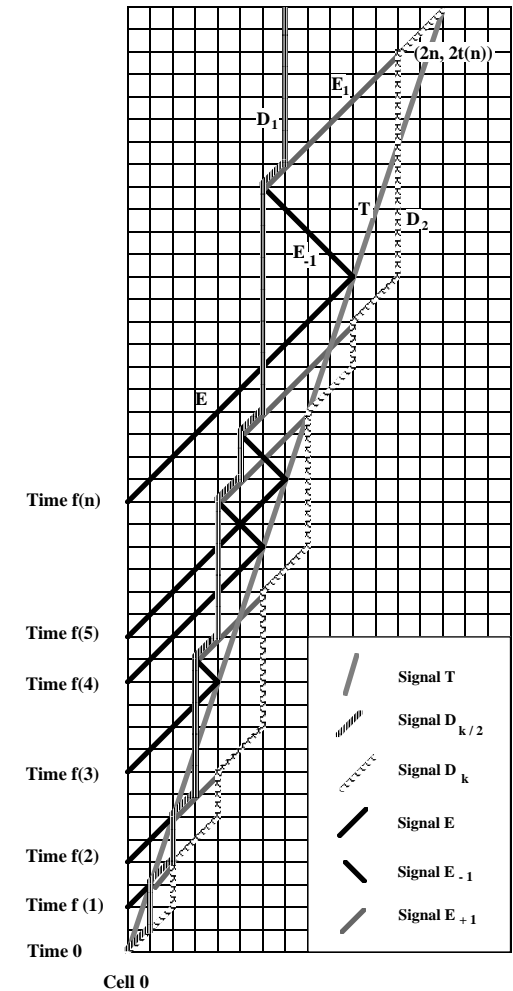


Figure 18: Characterization of the sites $(n, f(n))$.

[Mazoyer and Terrier, 1999, Fig. 18]

Origine

Diagrammes espace-temps (discrets)

Observation



Implantation

Lignes discrètes

Interprétation



Discrétisation

Lignes sur le plan



Dynamique

Conception

Origine

Diagrammes espace-temps (discrets)

Observation

Implantation

Lignes discrètes

Interprétation

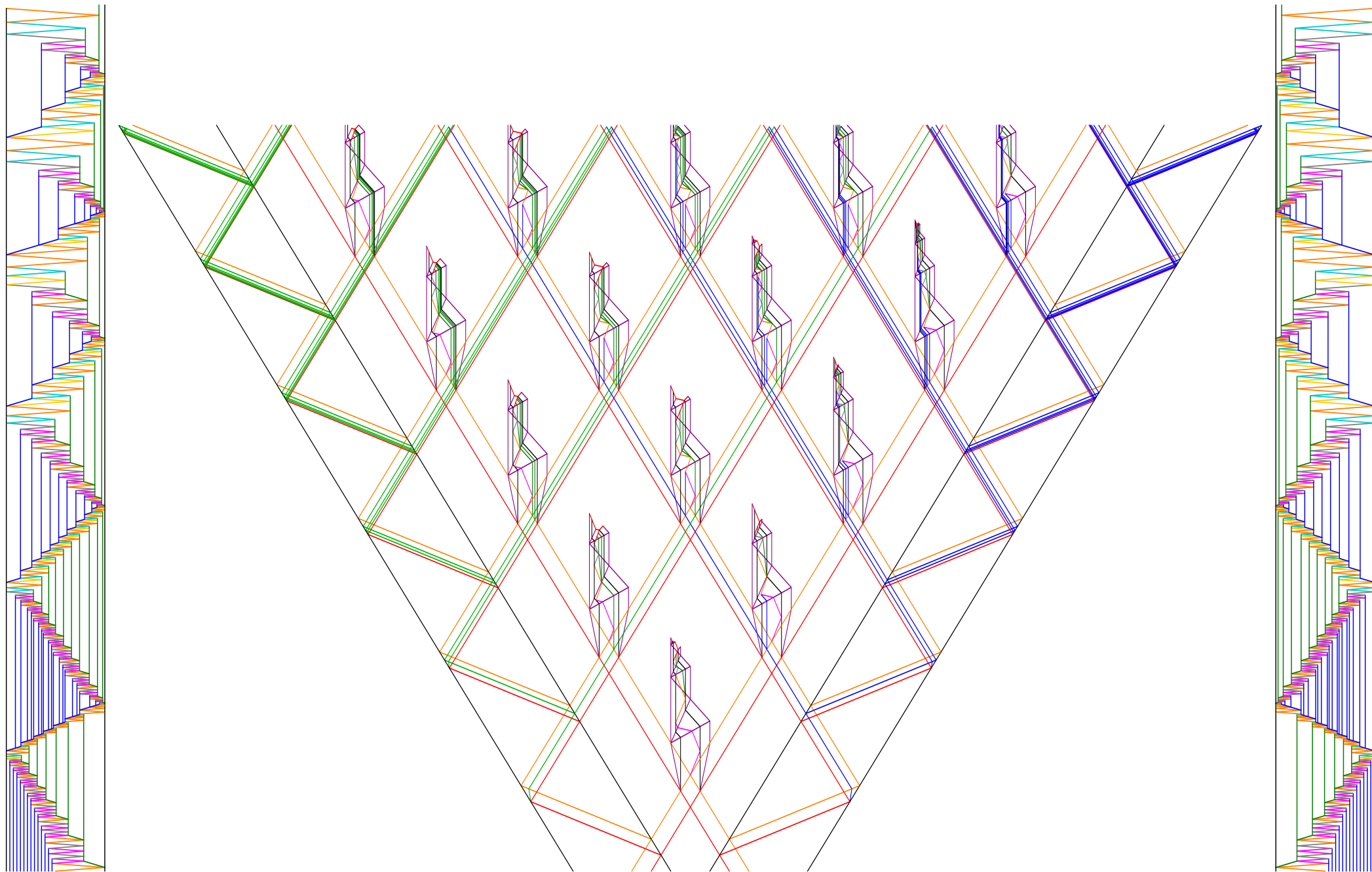
Discrétisation

Lignes sur le plan

Dynamique

Conception

Modèle en lui-même

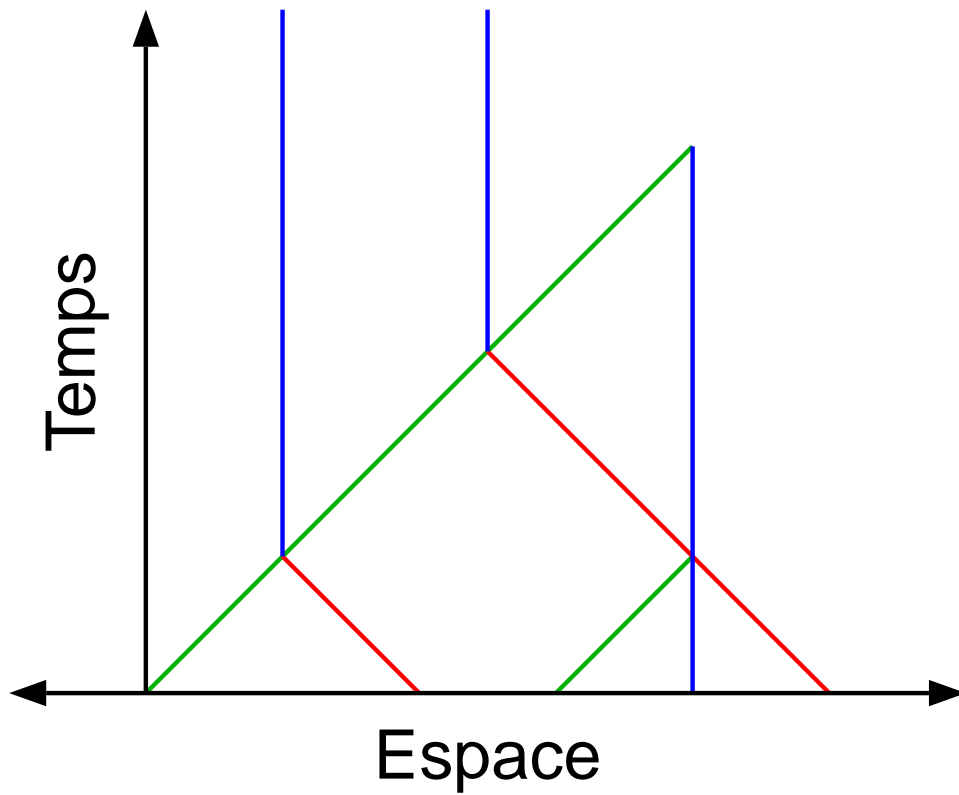


Machines à signaux

Analyse du modèle

~~$\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$~~

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$



Analyse du modèle

~~$\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$~~

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$

Signal

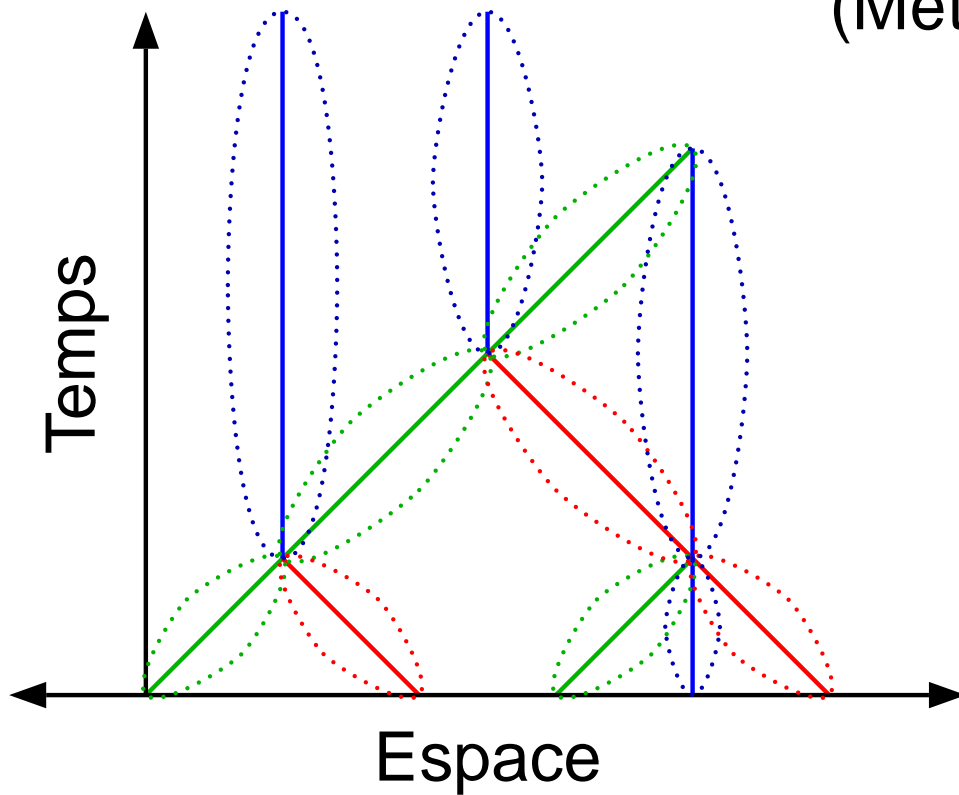
(Méta-signal, position)

Position

(x, t)

Méta-signal

$\mu = (\iota, \nu)$



Analyse du modèle

~~$\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$~~

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$

Signal

(Méta-signal, position)

Position

(x, t)

Méta-signal

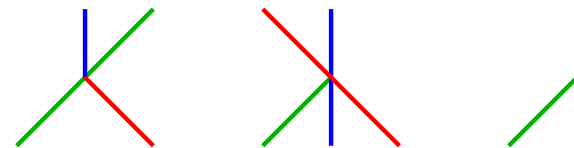
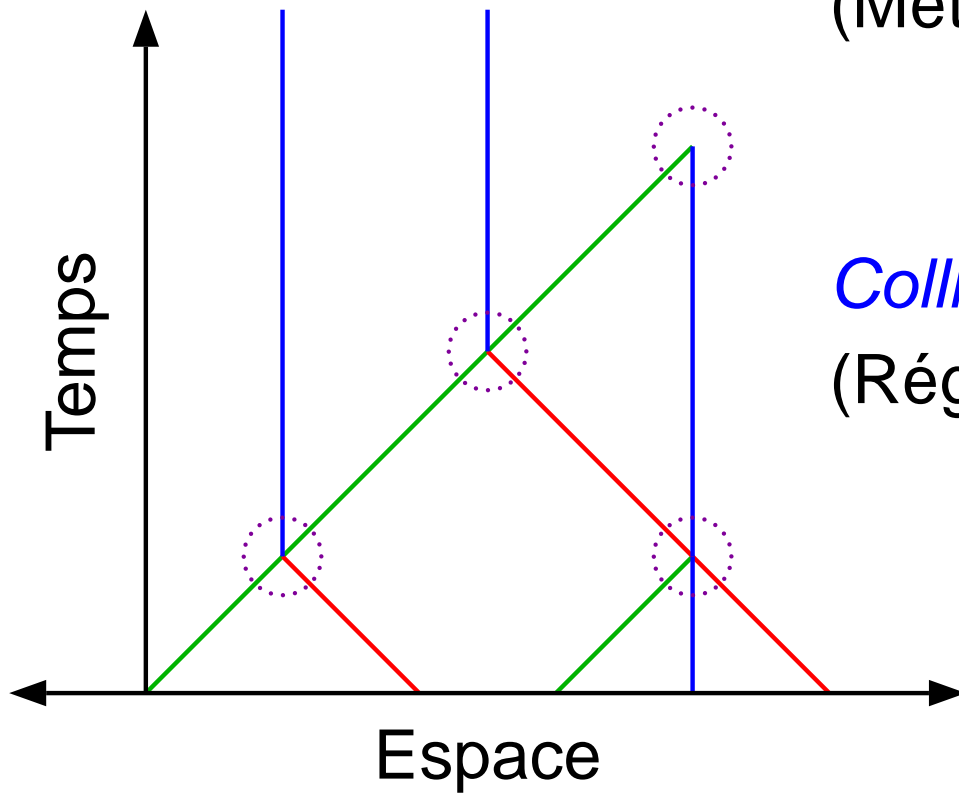
$\mu = (\iota, \nu)$

Collision

(Règle, position)

Règle

$\rho = \{\mu_i^-\}_i \rightarrow \{\mu_j^+\}_j$



Définition du modèle

Machine

$$\mathcal{M} = (\{\mu_i\}_i, \{\rho_j\}_j)$$

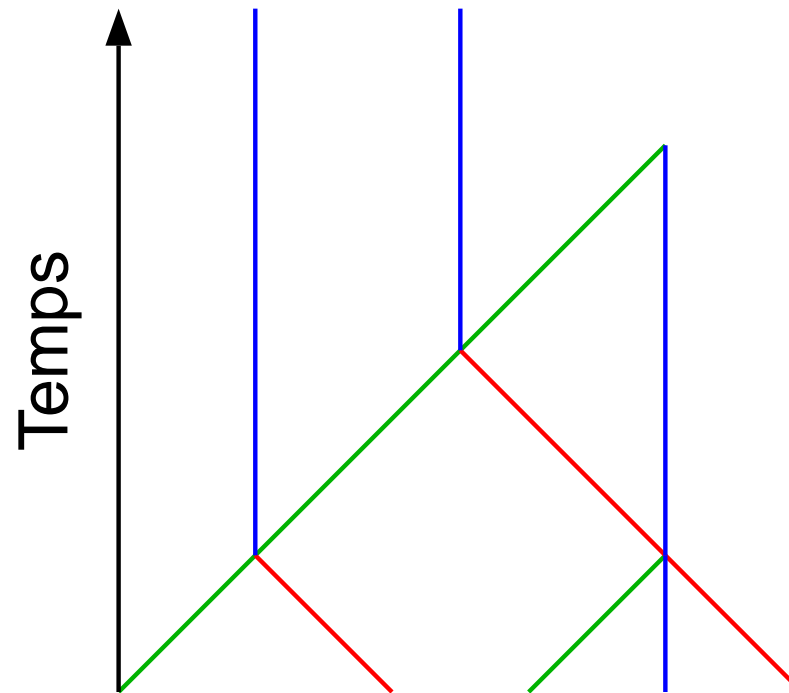
Description finie

Déterministe

Configuration (à t)

Positions des
signaux et collisions

Diagramme espace-temps

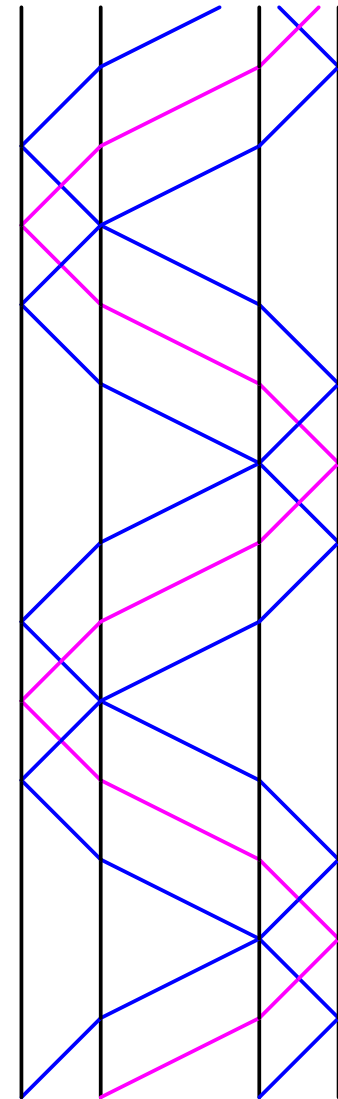
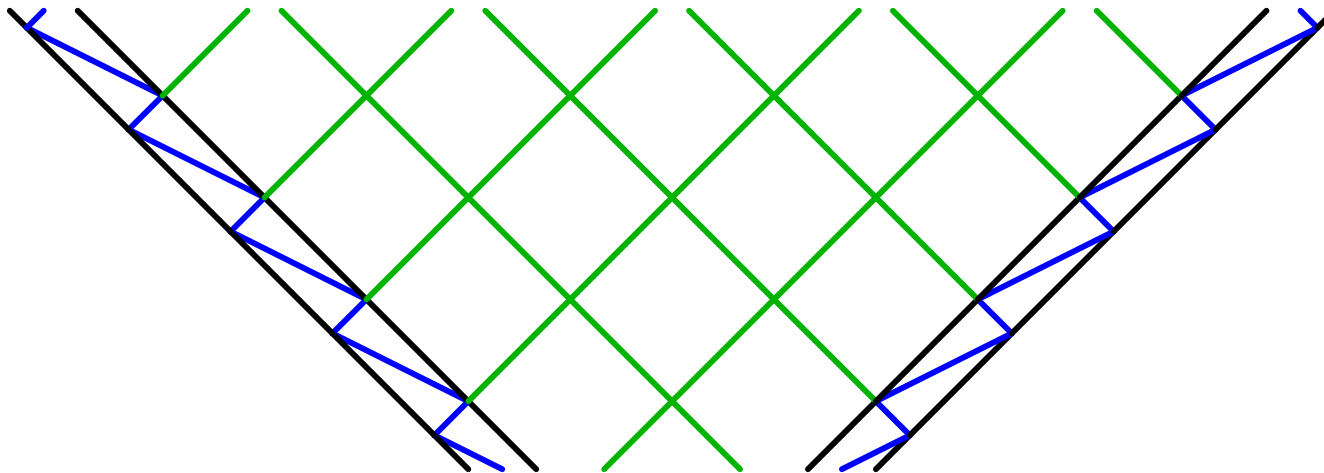


Calcul

collisions +
ordre de dépendance

Propriétés

- Uniforme dans le temps et l'espace
- Local
- Cône de lumière
- Nombre fini de valeurs et de règles
- Espace et temps continus



Calculer

Turing-universalité

Simulation automate à deux compteurs

A et B deux compteurs à valeurs dans \mathbb{N}

Opérations

A++

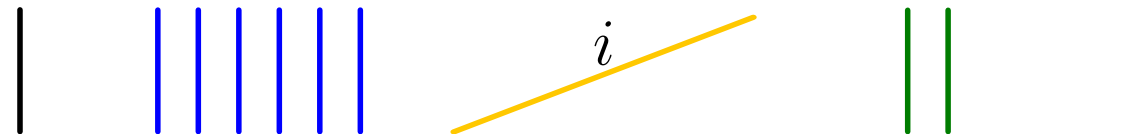
B++

A--

A--

A != 0 <label> B != 0 <label>

Codage



bord $a_0 = 6$ instruction i $b_0 = 2$ bord

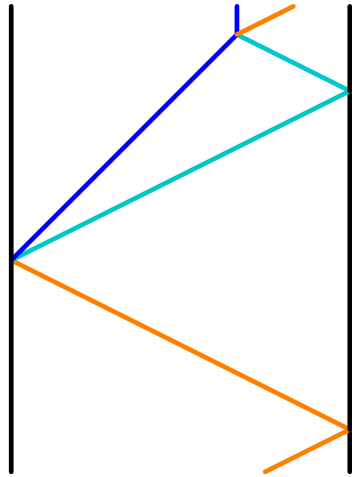
Place illimitée pour les signaux

```

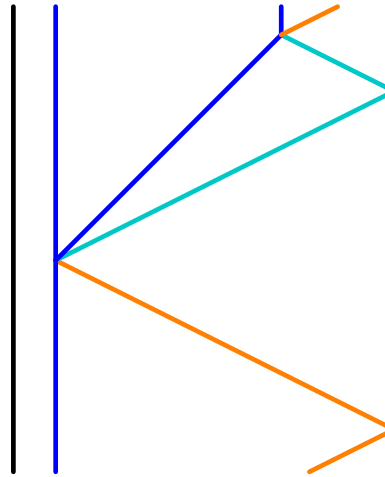
beg: B++
    A--
    A != 0 beg1
    B != 0 imp
beg1: A--
    A != 0 beg
pair: B--
    A++
    B != 0 pair
    A != 0 beg
imp: B--
    A++
    A++
    B != 0 imp1
    A != 0 beg
imp1: B--
    A++
    A++
    A++
    B != 0 imp1
    A != 0 beg
    
```

Transcription des instructions

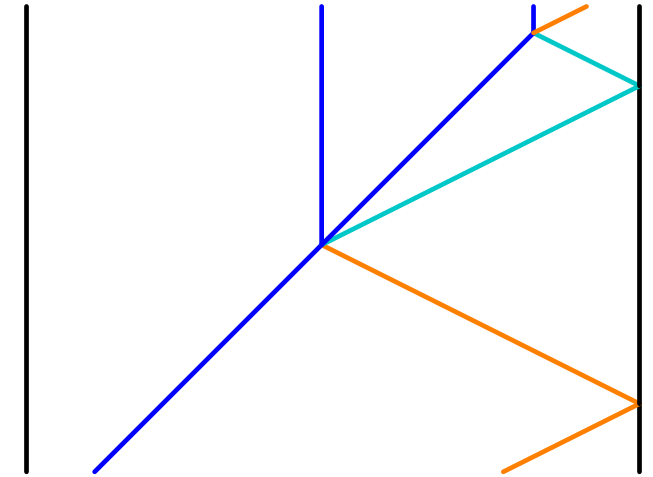
$A++$



$a = 0$

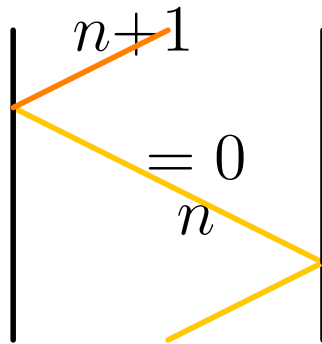


$a \neq 0$

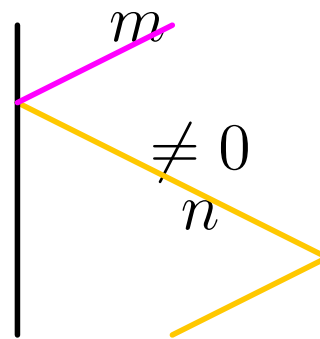


Après $A++$

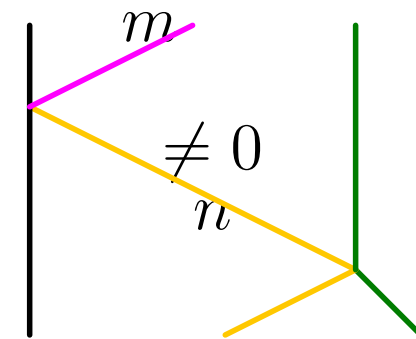
$B \neq 0 \quad m$



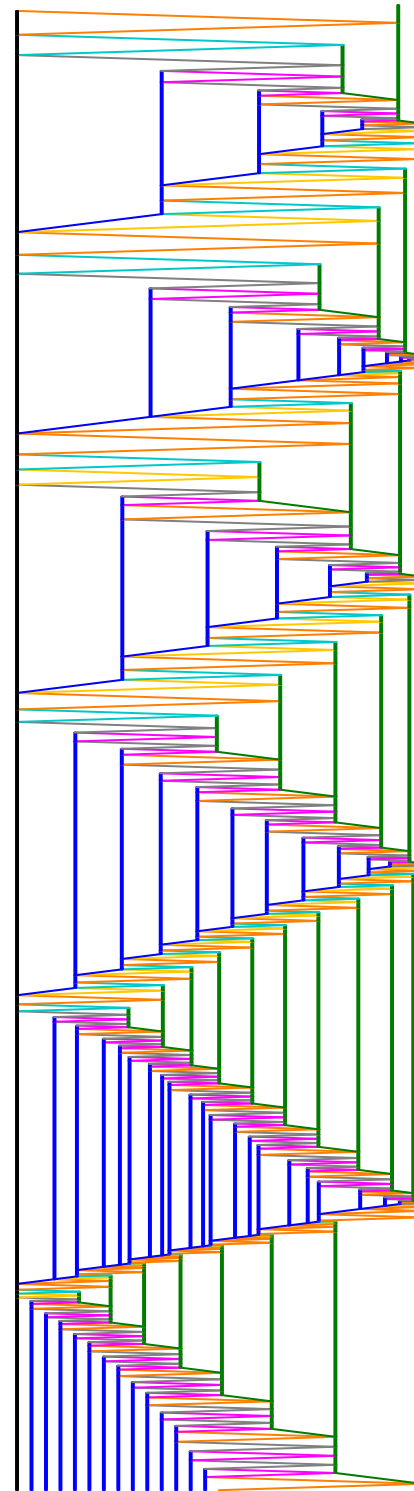
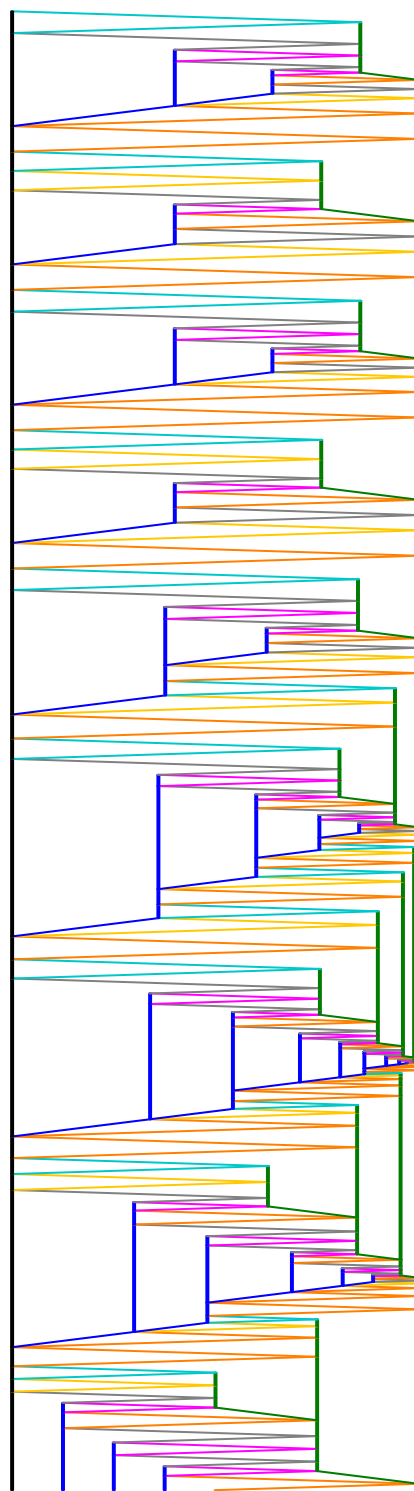
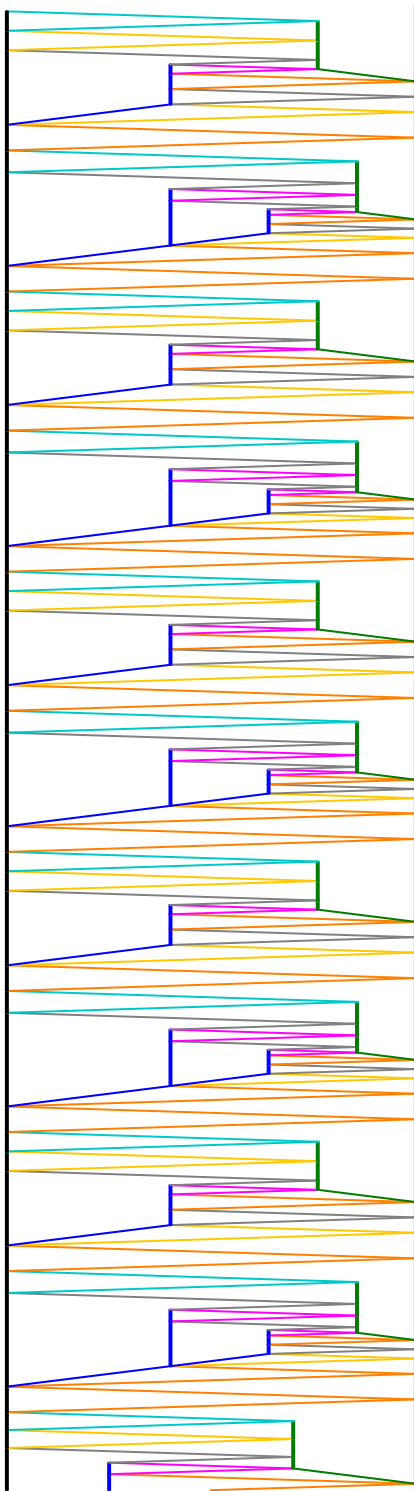
$= 0$



$\neq 0$



$\neq 0$



Turing-universel

Tout calcul récursif peut être réalisé

\rightsquigarrow *Imprédictible*

e.g. sont indécidables

- nombre fini de collisions
- apparition d'un méta-signal

Modifications géométriques

Constructions géométriques

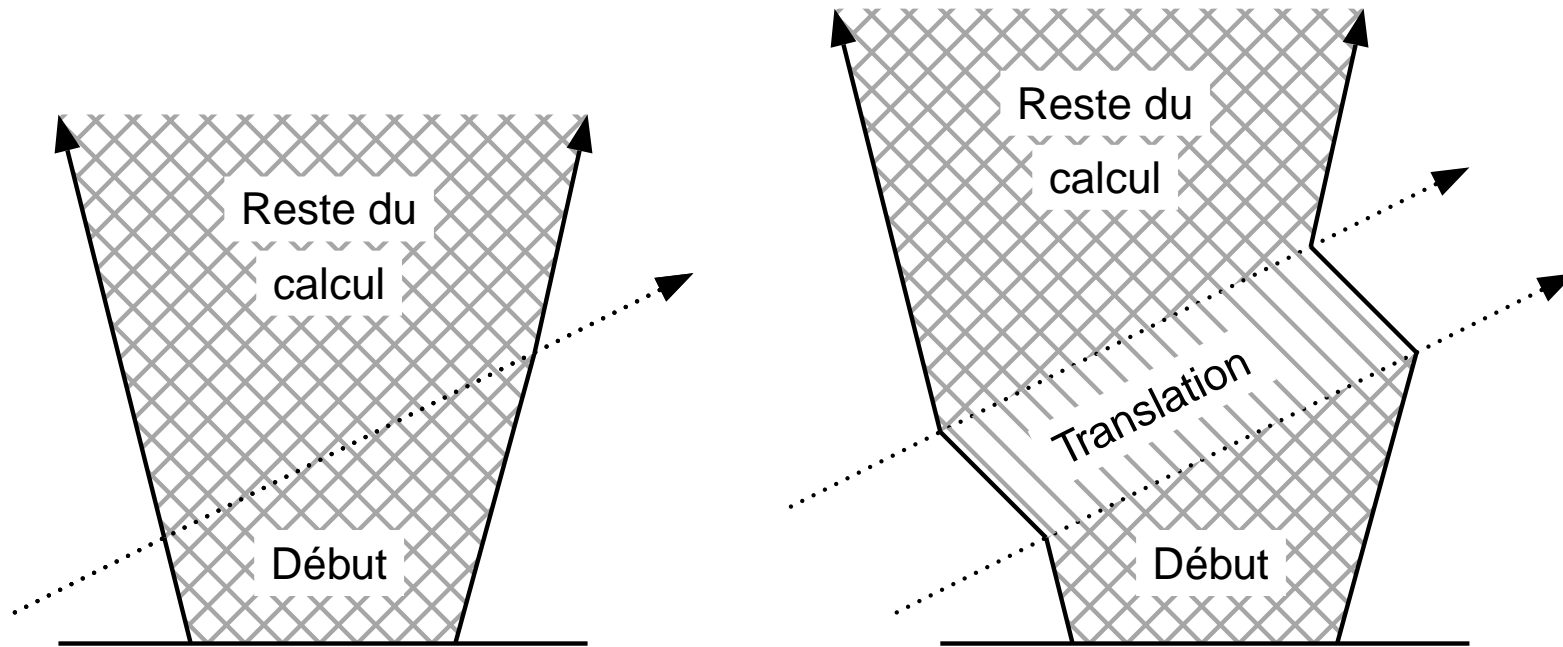
Modifications du diagramme espace-temps

mais préserve le calcul (*i.e.* ordre des collisions)

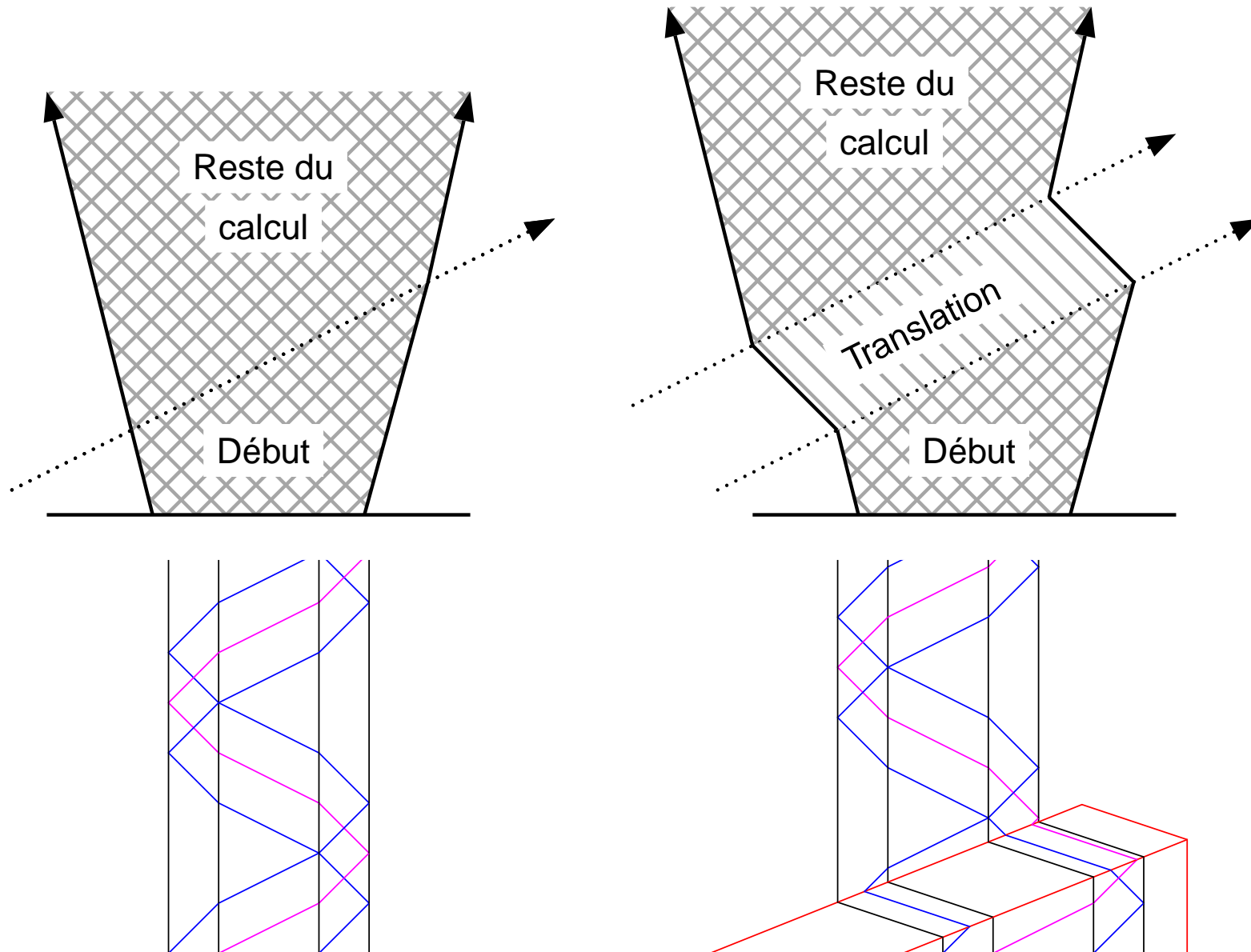
- Dynamique
 - Gel et translation
 - Homothéties
- Construction de plus haut niveau
 - Contractions
 - Itérations

Seuls modifications : ajouts de méta-signaux et de règles

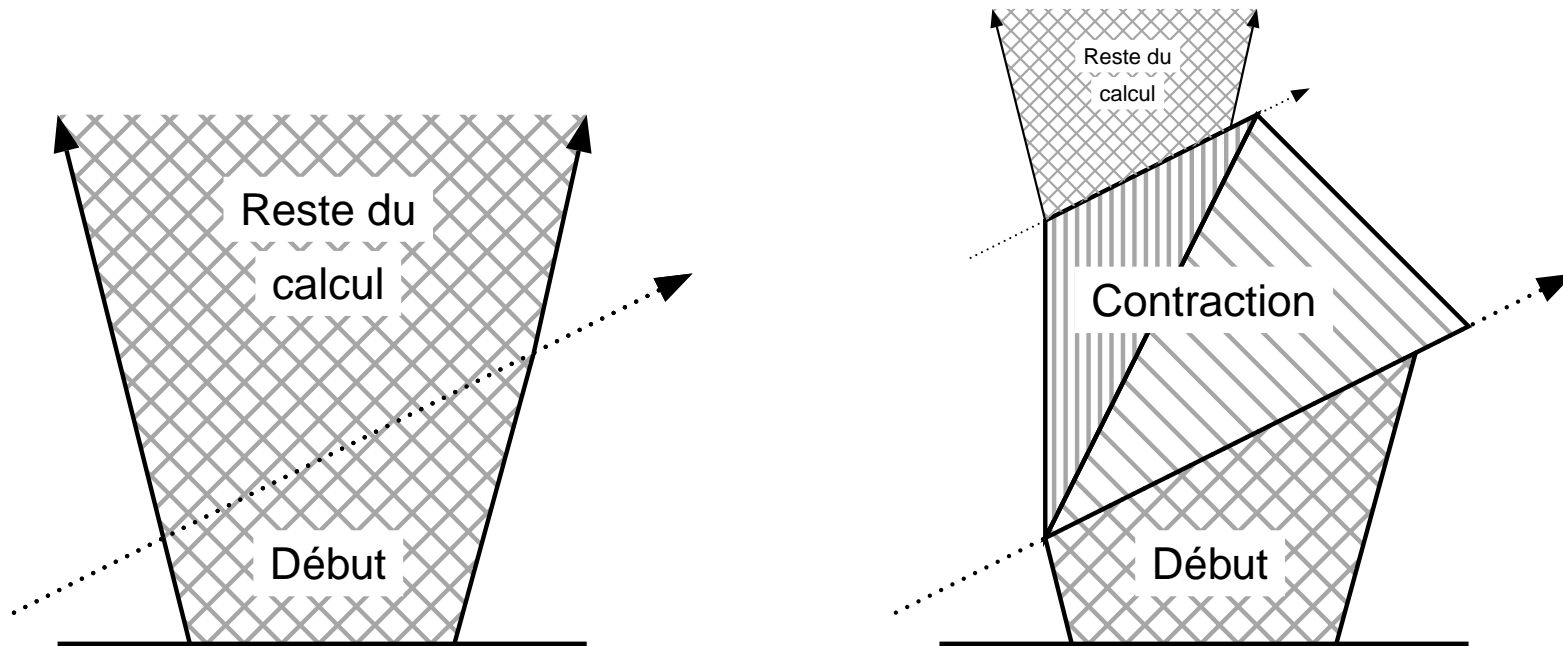
Gel puis dégel du calcul



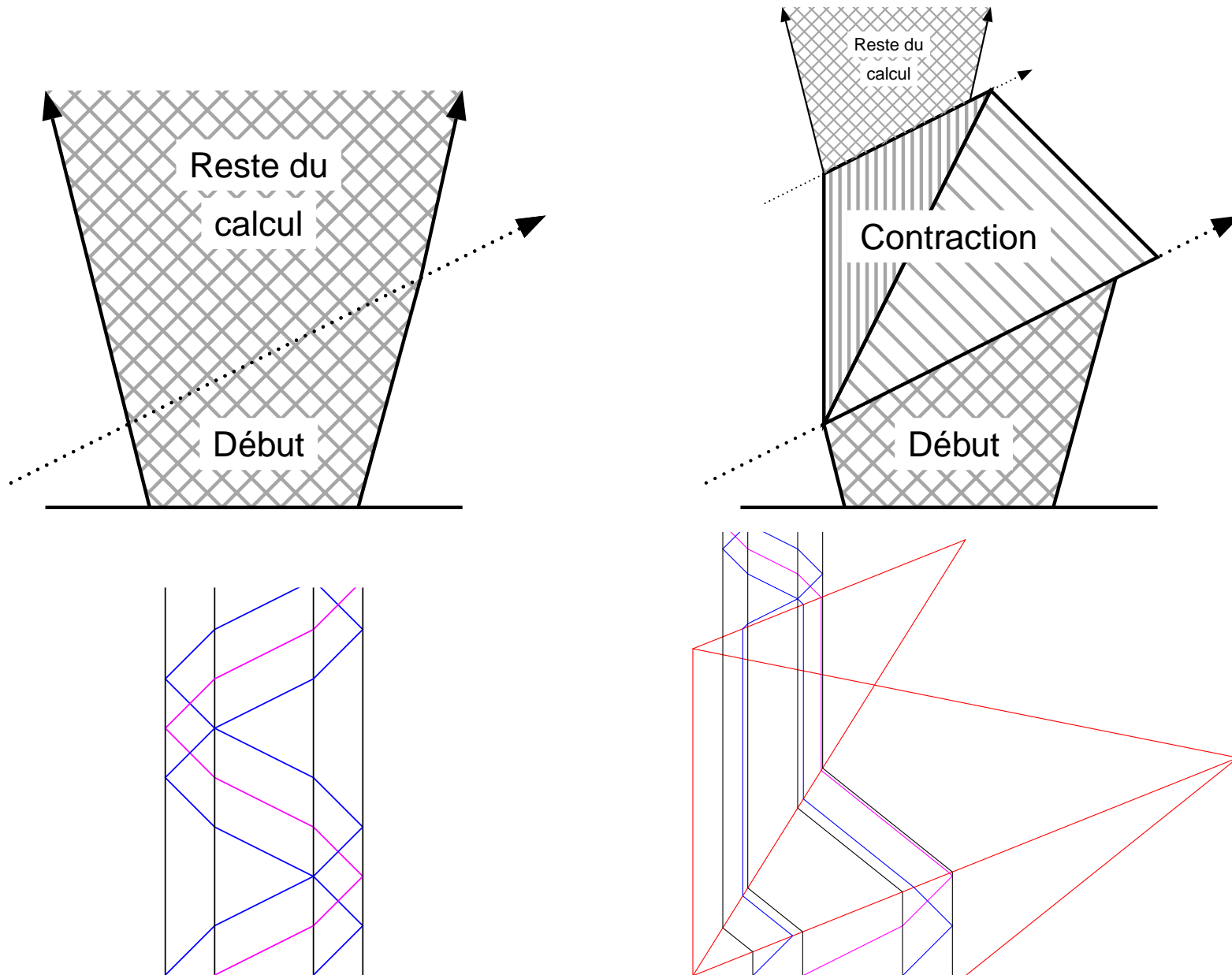
Gel puis dégel du calcul



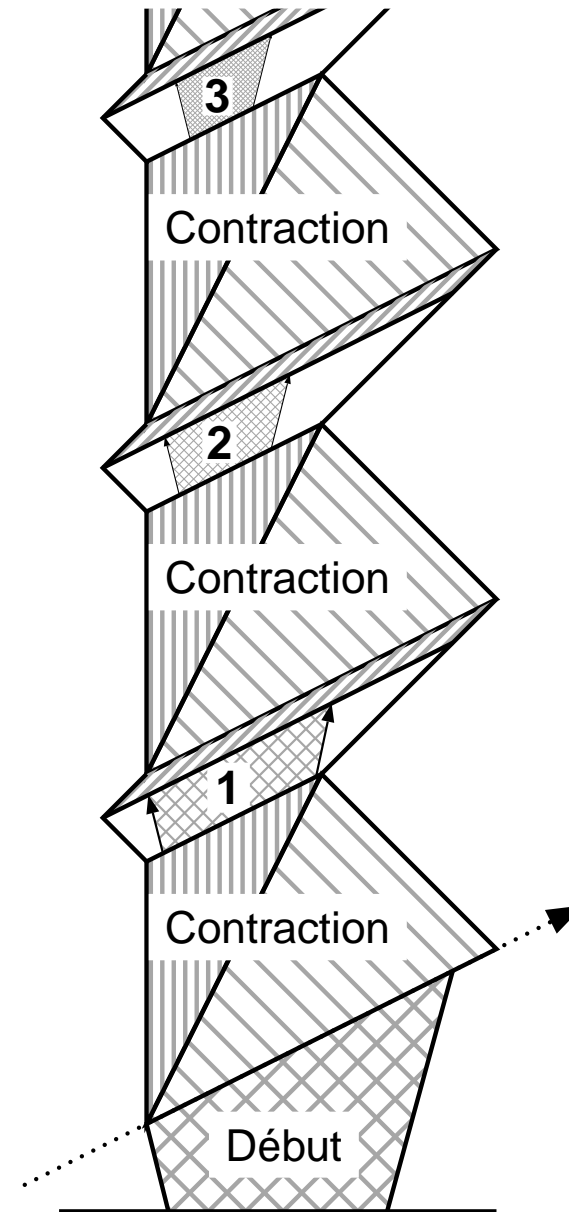
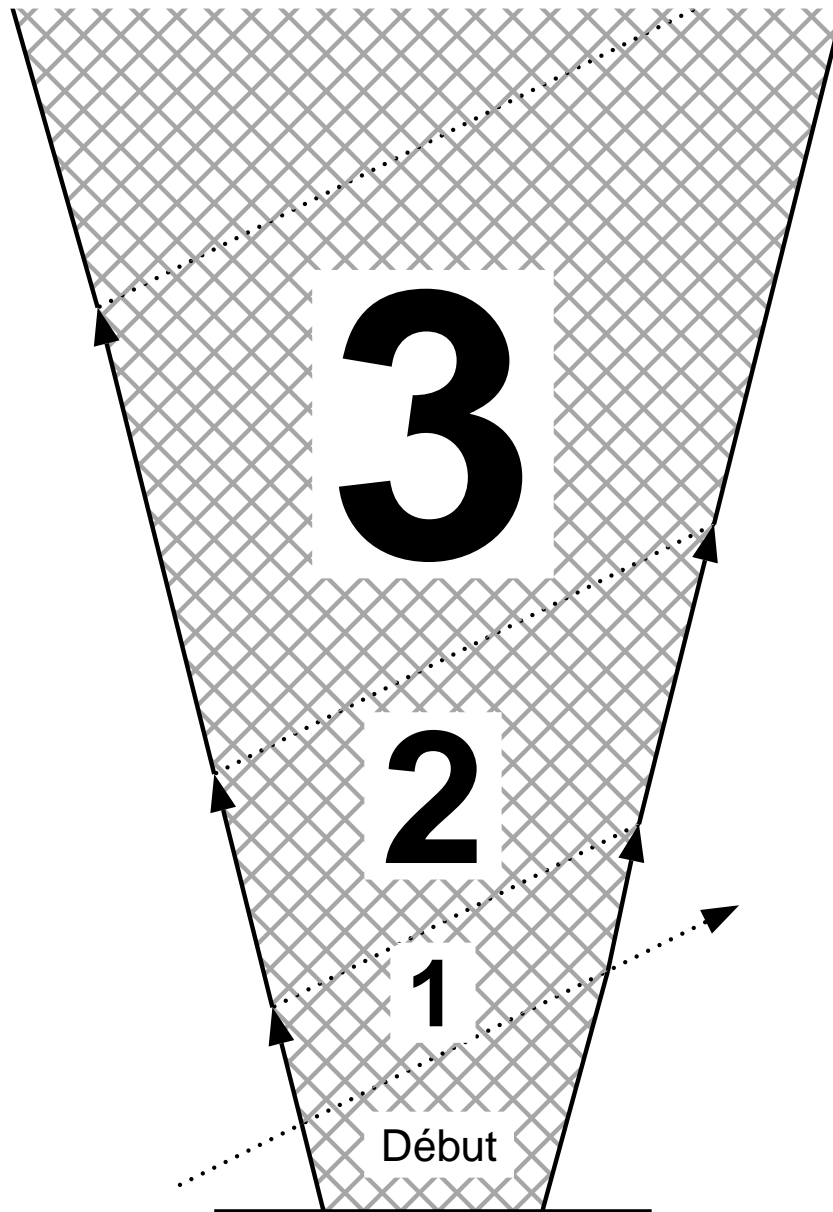
Contraction



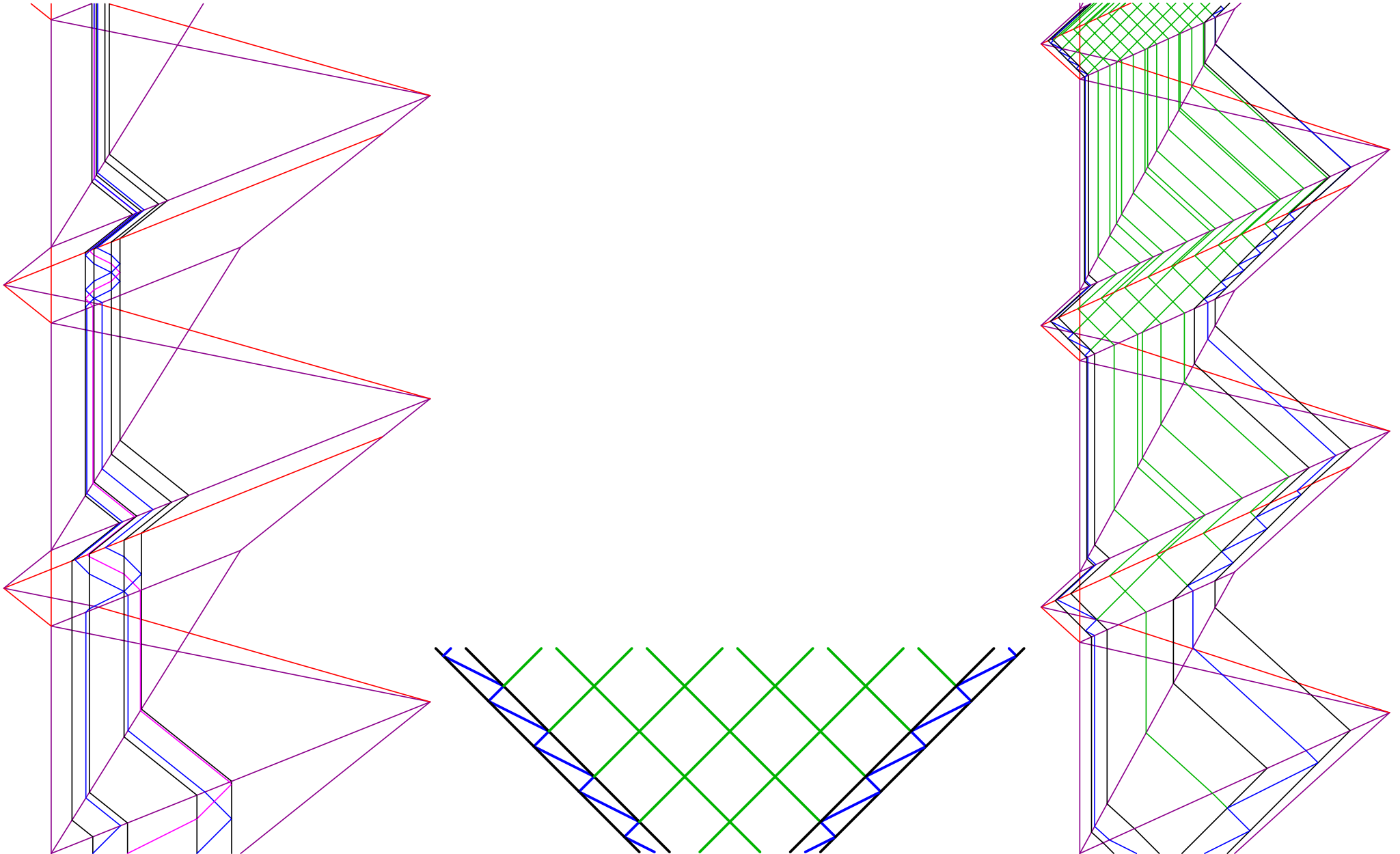
Contraction



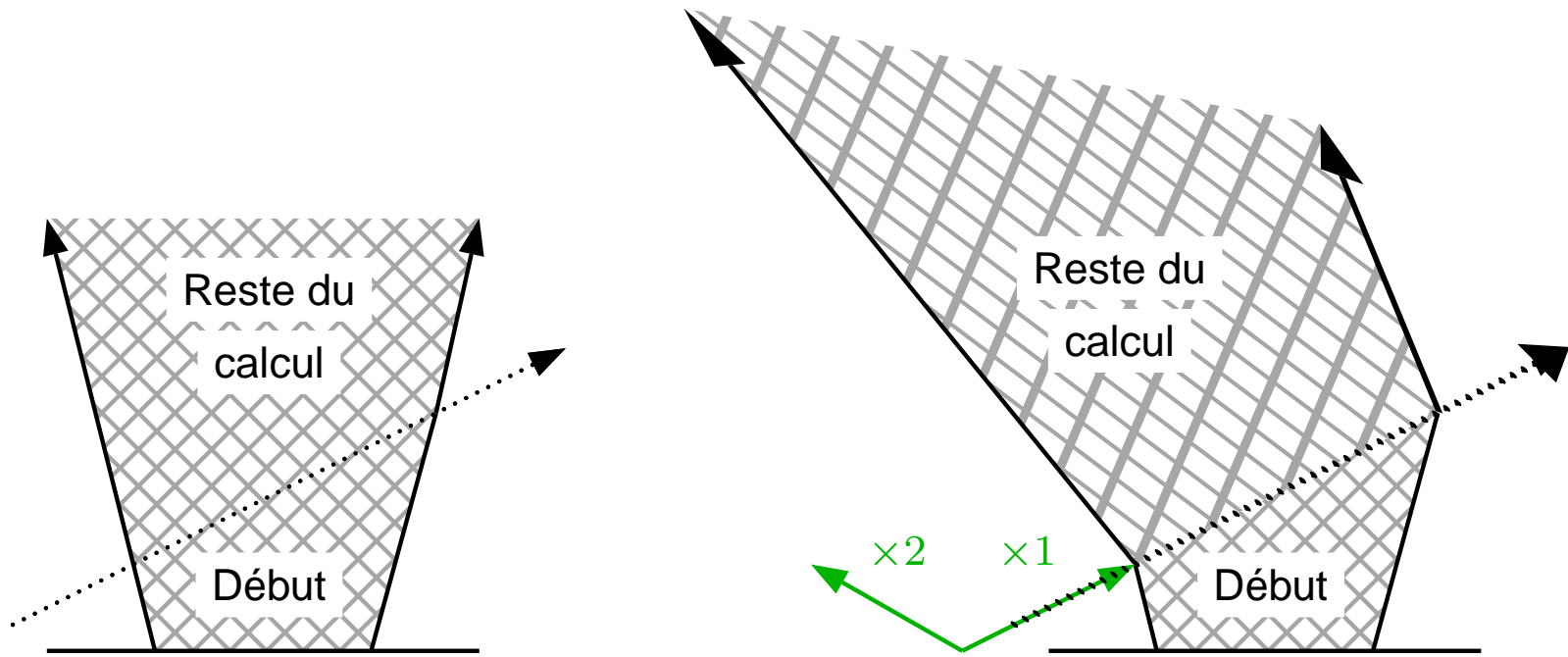
Contraction à une bande



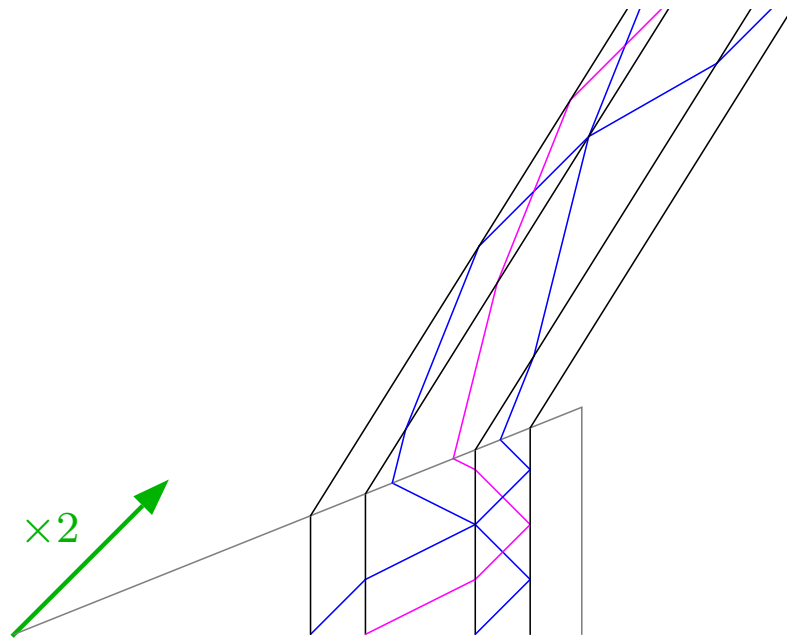
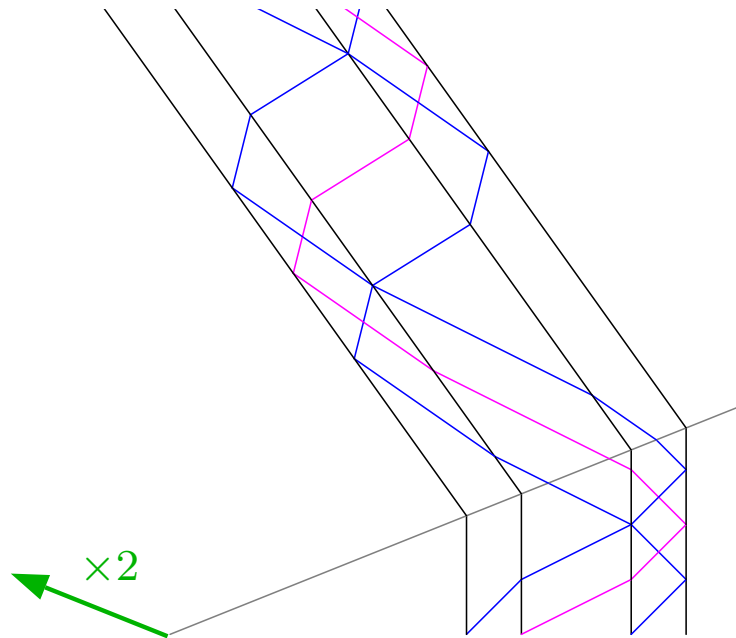
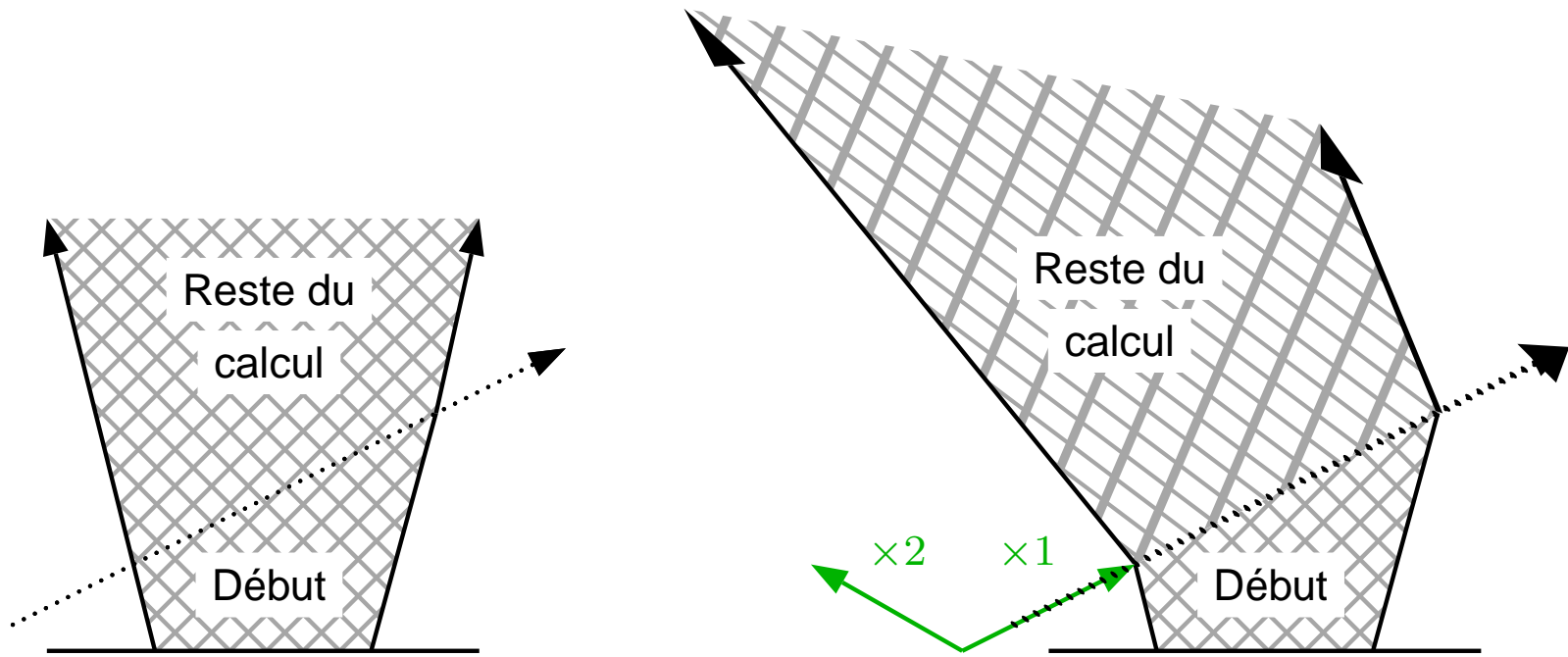
Contraction à une bande



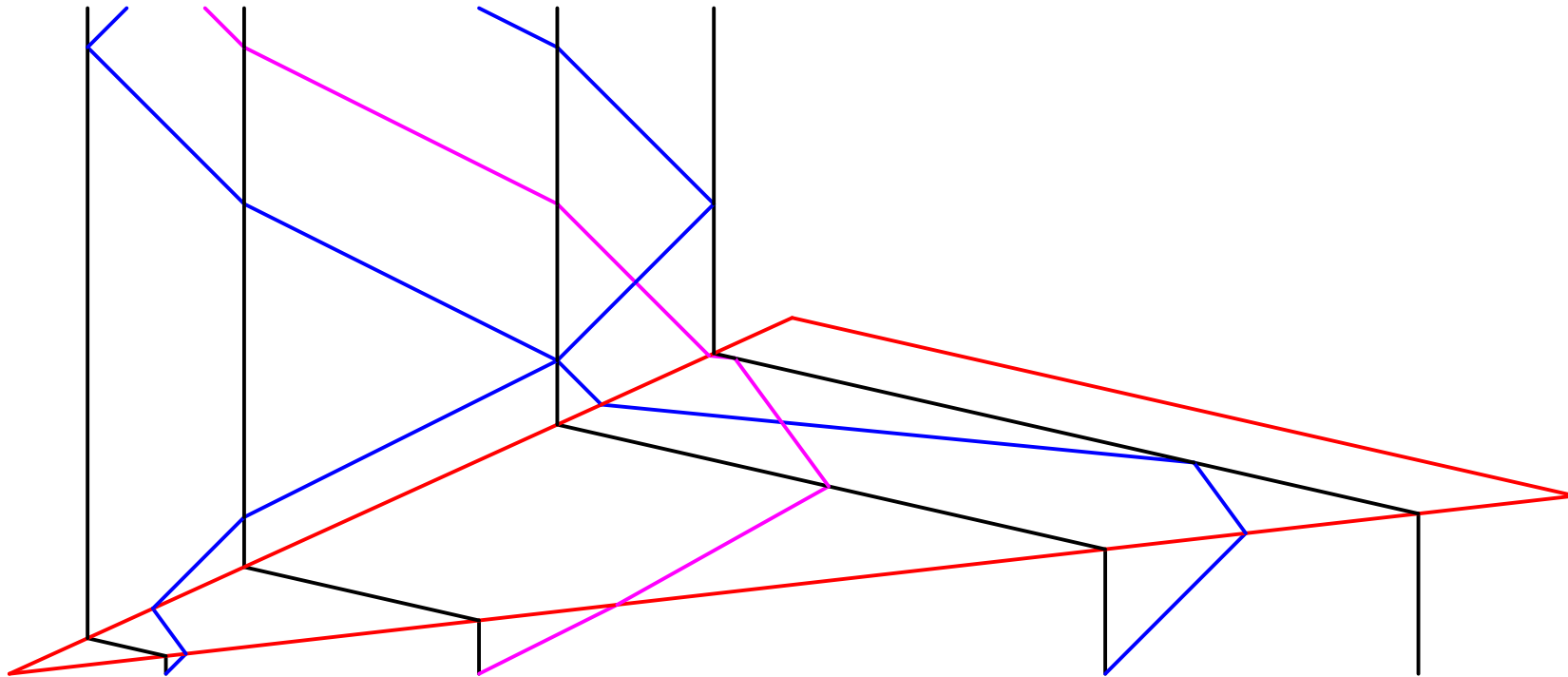
Homothétie



Homothétie



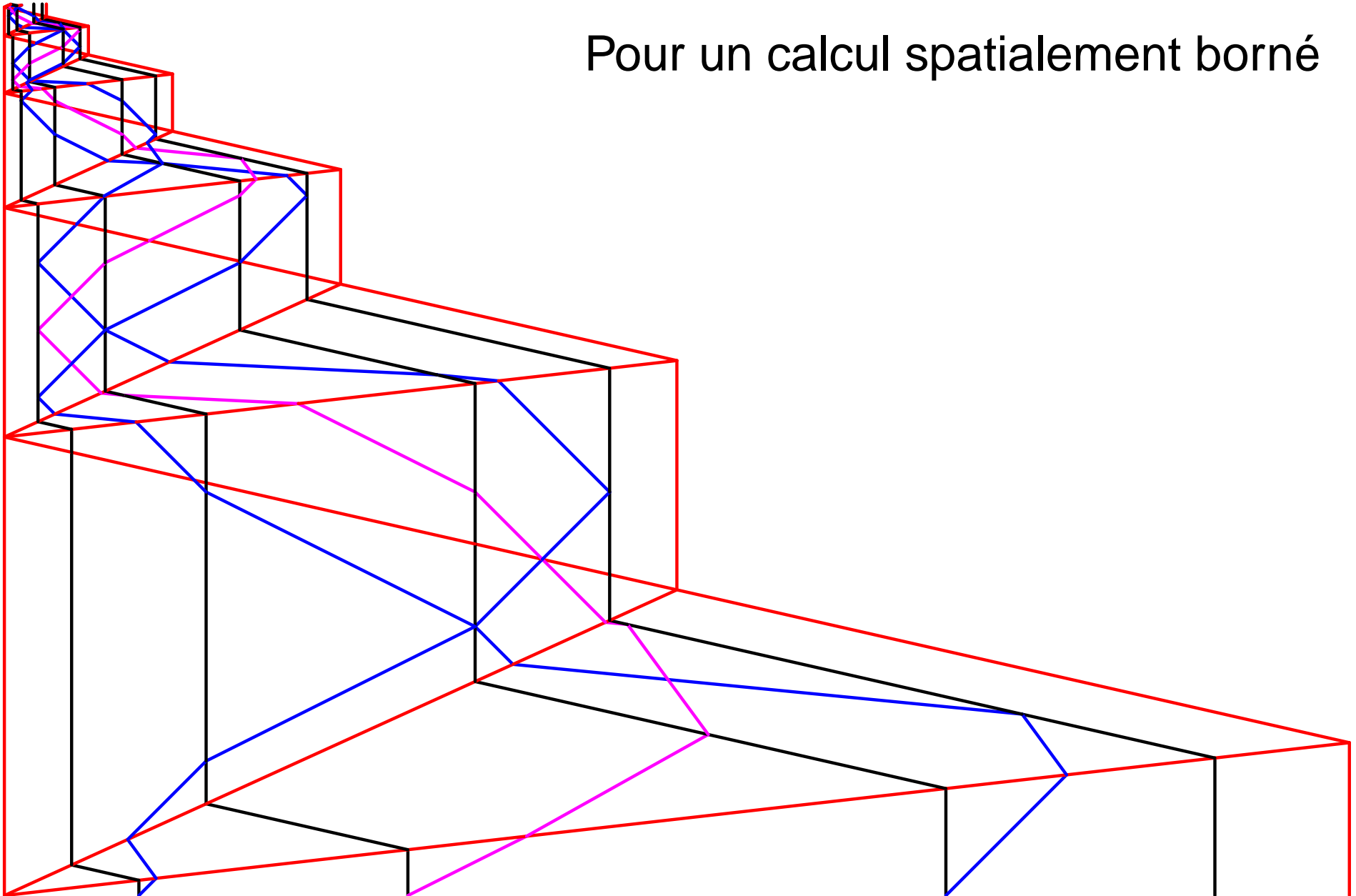
Contraction continue

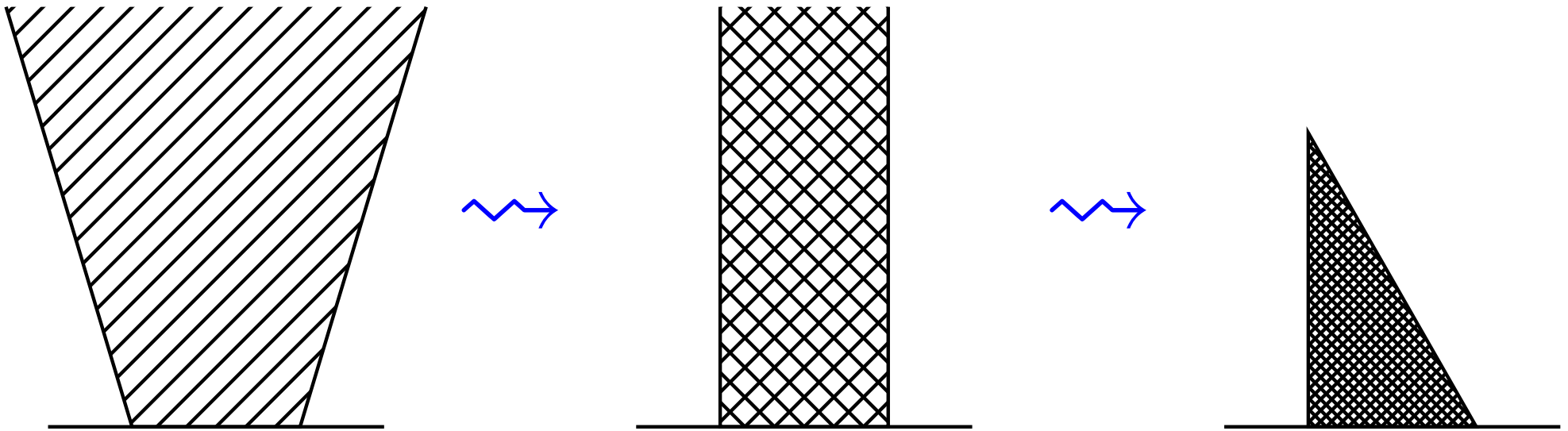


Si le calcul reste borné on peut itérer...

Contraction à un triangle

Pour un calcul spatialement borné

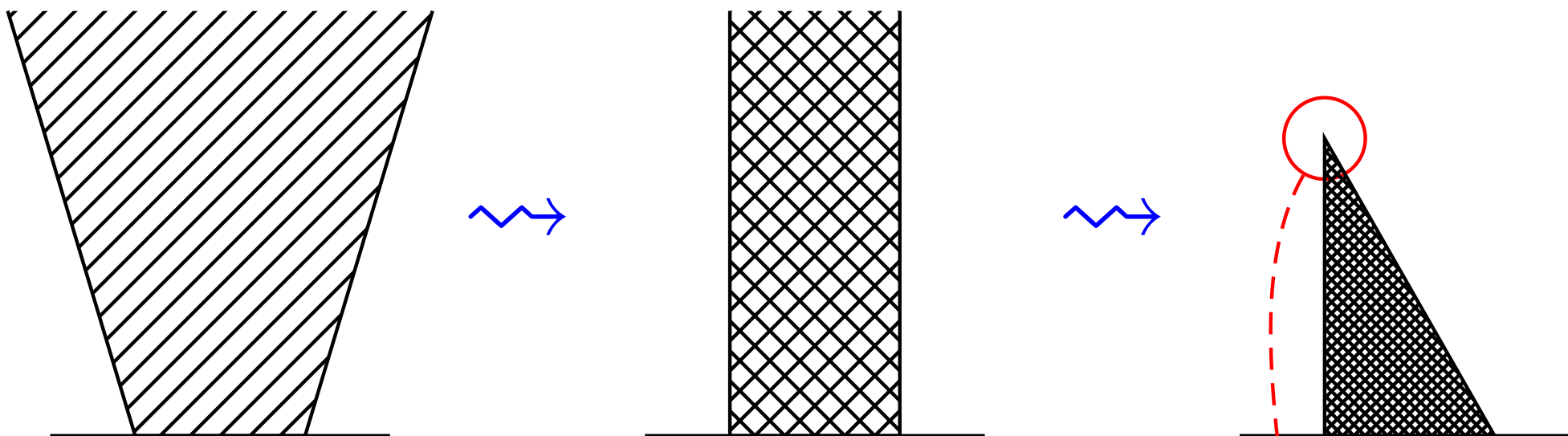




Tout calcul peut être contenu dans un triangle

L'espace et le temps sont « malléables »

Problème



Tout calcul peut être contenu dans un triangle

L'espace et le temps sont « malléables »

Problème Apparition d'un point d'accumulation

Accumulations

Apparition d'une accumulation

Instance

\mathcal{M} : machine à signaux,
 c_0 : configuration initiale finie,
(*Toutes les valeurs sont dans \mathbb{Q}*)

Question

Va-t-il y avoir une accumulation ?

$$\exists (x, t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},$$

Il y a au moins n collisions dans le
cône de lumière aboutissant à (x, t)

Apparition d'une accumulation

Instance

\mathcal{M} : machine à signaux,
 c_0 : configuration initiale finie,
(Toutes les valeurs sont dans \mathbb{Q})

Question

Va-t-il y avoir une accumulation ?

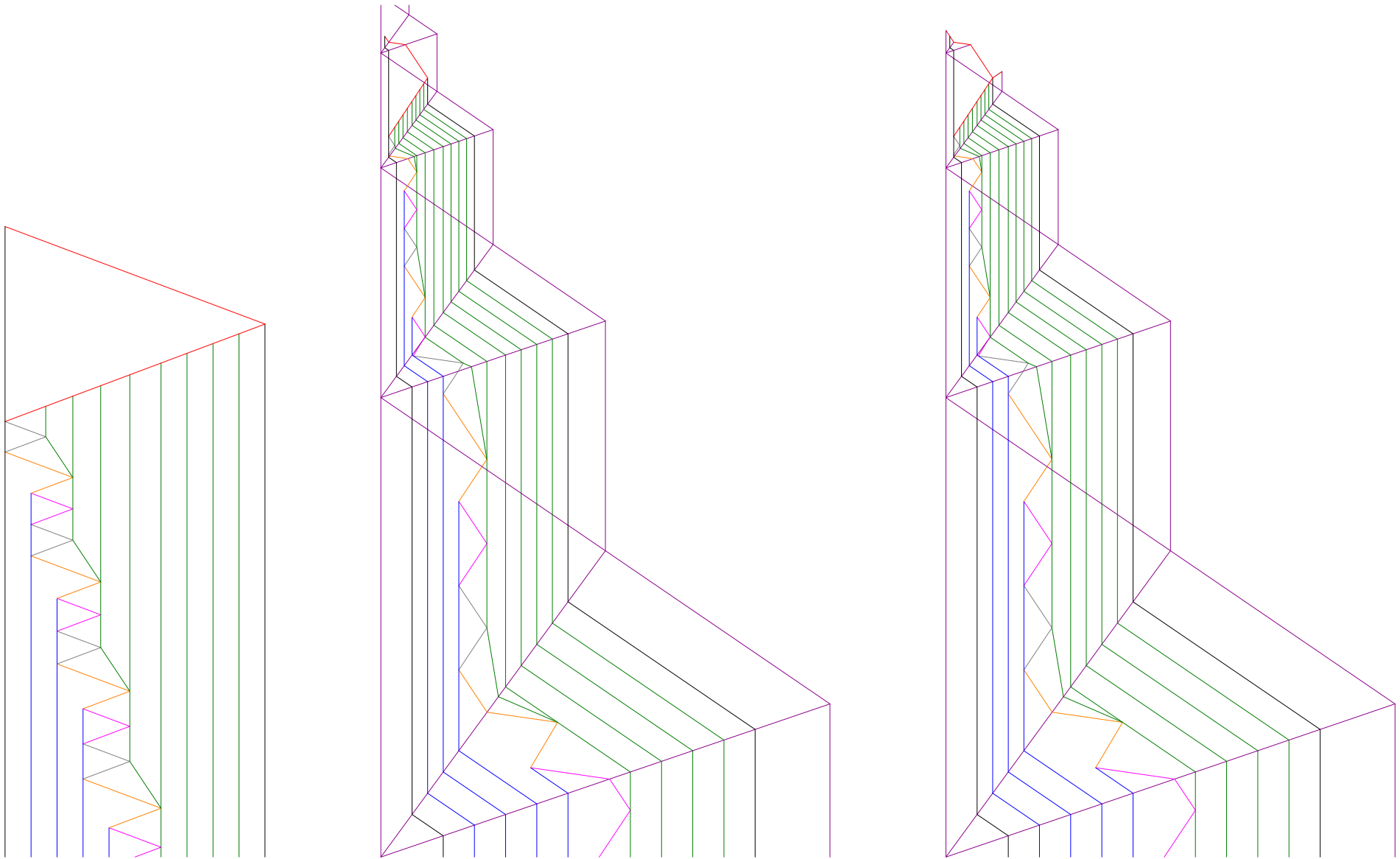
prédicat récursif
total

$\exists (x, t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},$

Il y a au moins n collisions dans le
cône de lumière aboutissant à (x, t)

\rightsquigarrow dans Σ_2^0 (hiérarchie arithmétique)

Réduction pour Π_1^0 -difficile



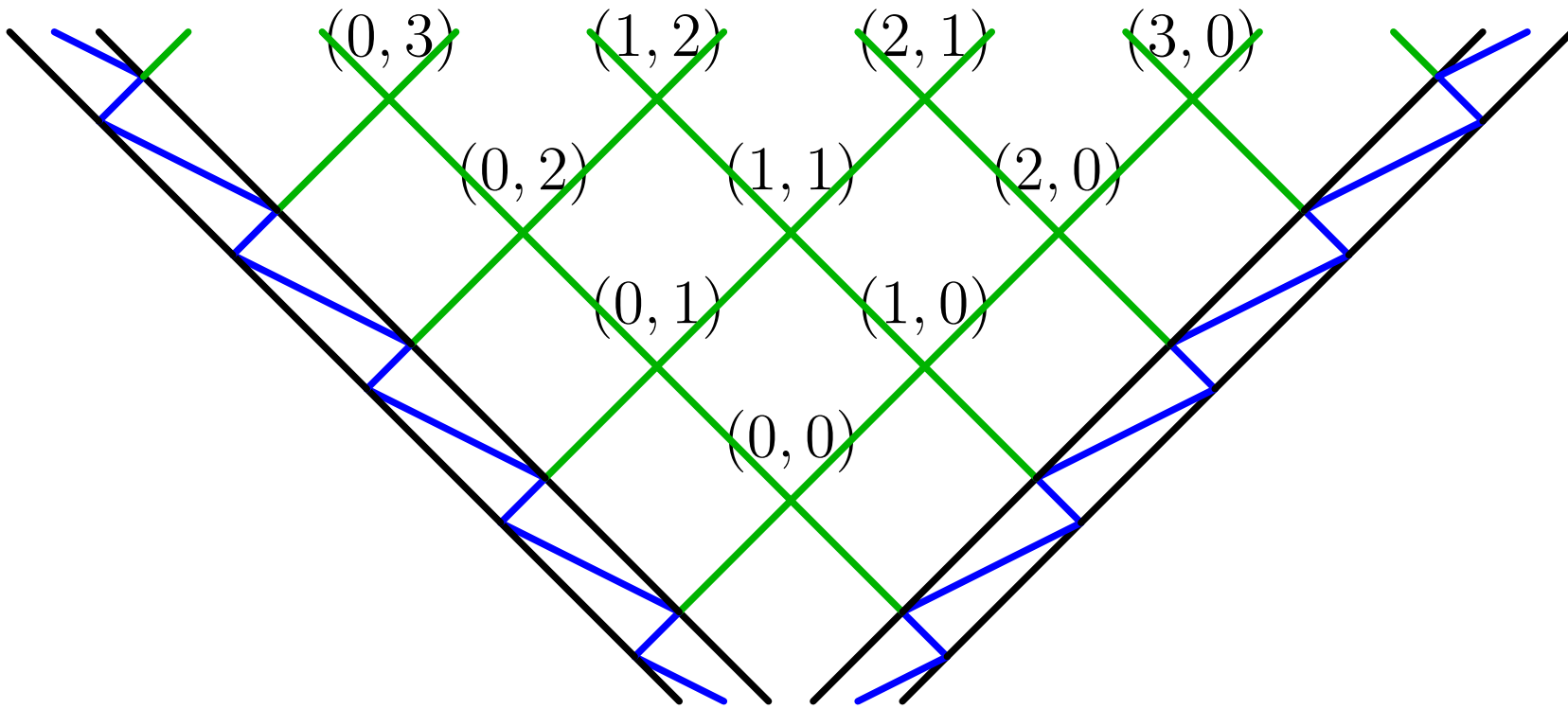
Accumulation \Leftrightarrow L'automate à deux compteurs ne s'arrête pas

Tester toutes les calculs possibles

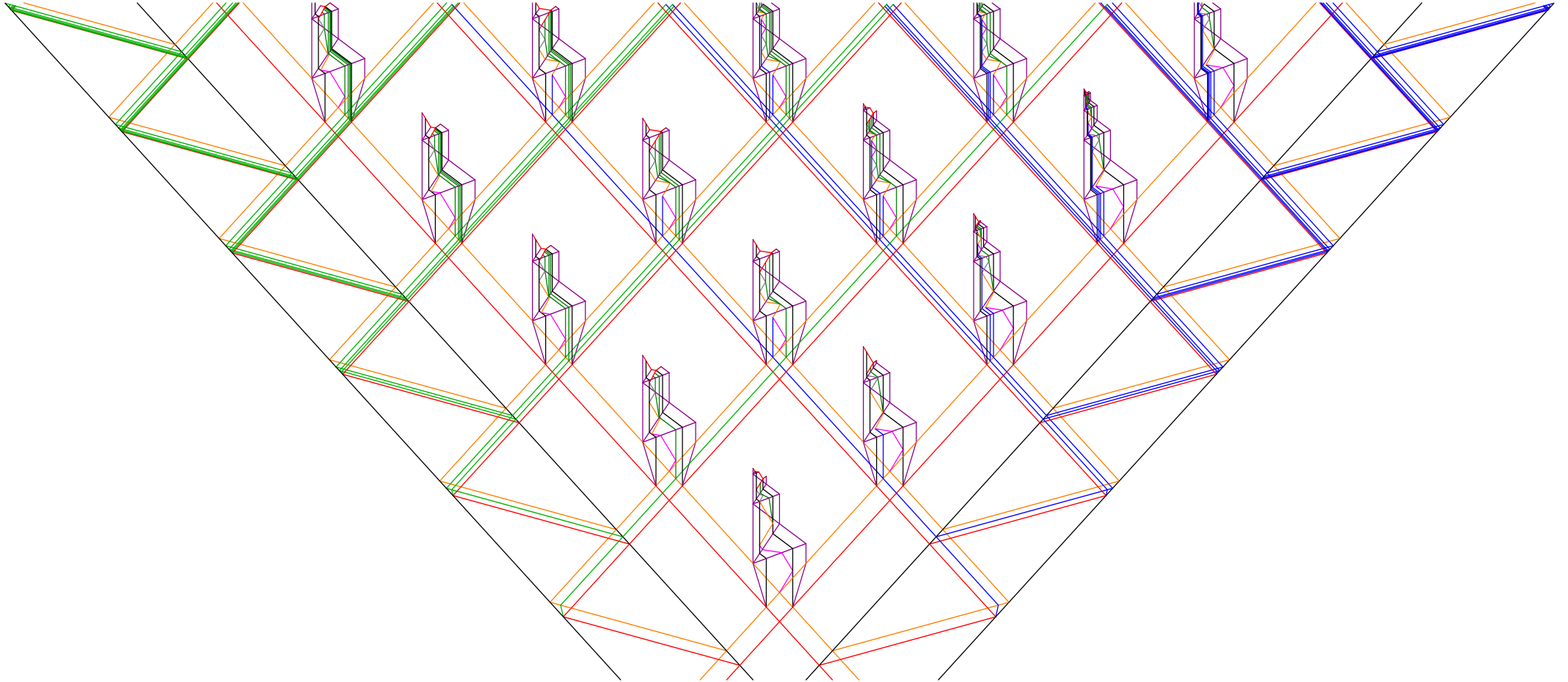
Σ_2^0 -complet

Instance
 \mathcal{A} : Automate à deux compteurs,

Question
Existe-t-il un calcul sans fin ?



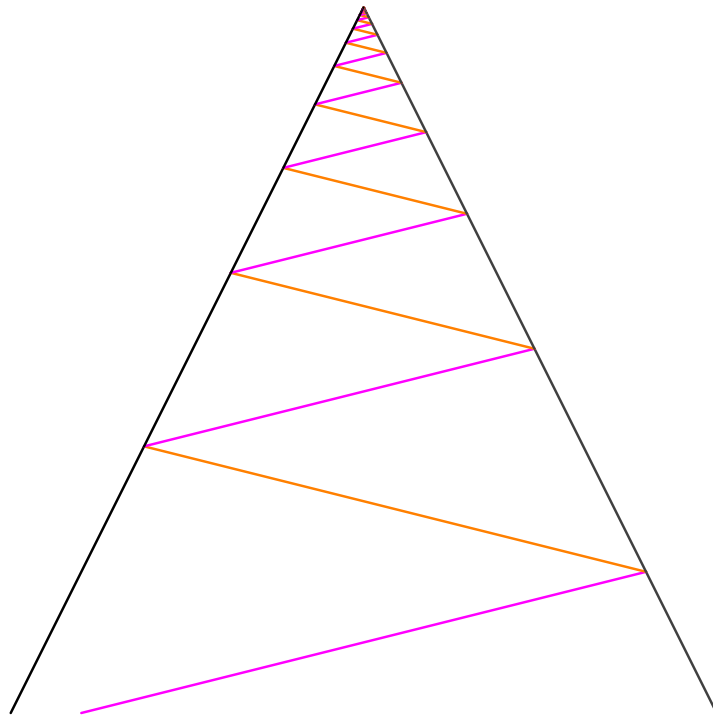
Σ_2^0 -difficile



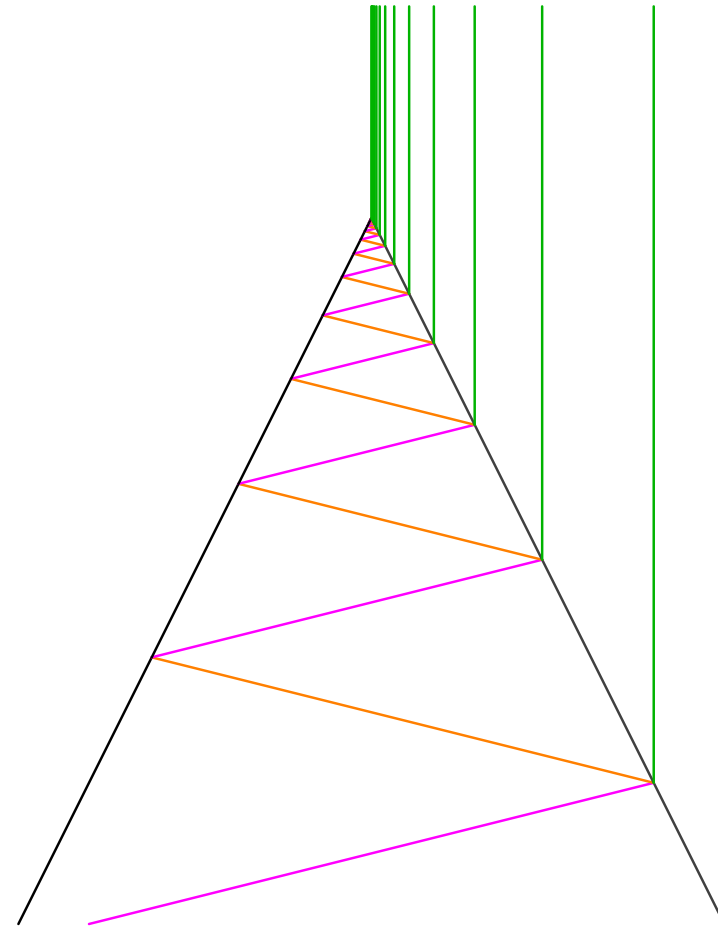
$\rightsquigarrow \Sigma_2^0$ -complet

Accumulations

Accumulations en un point

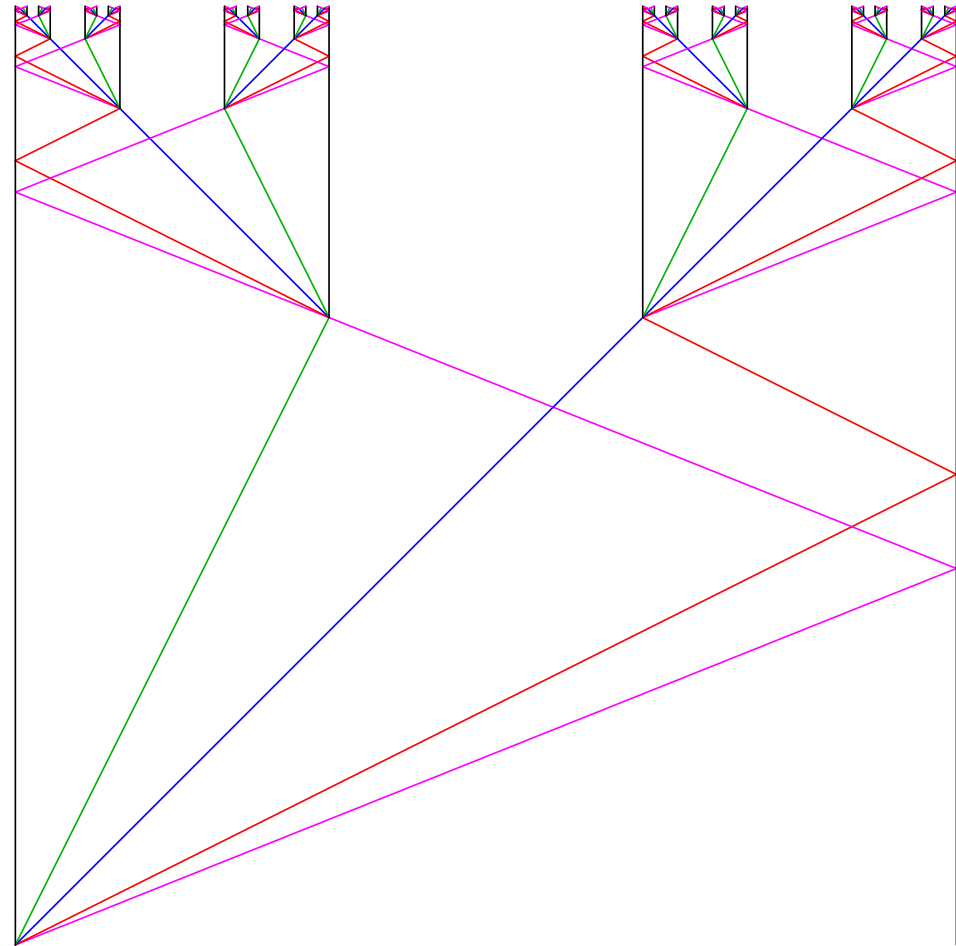
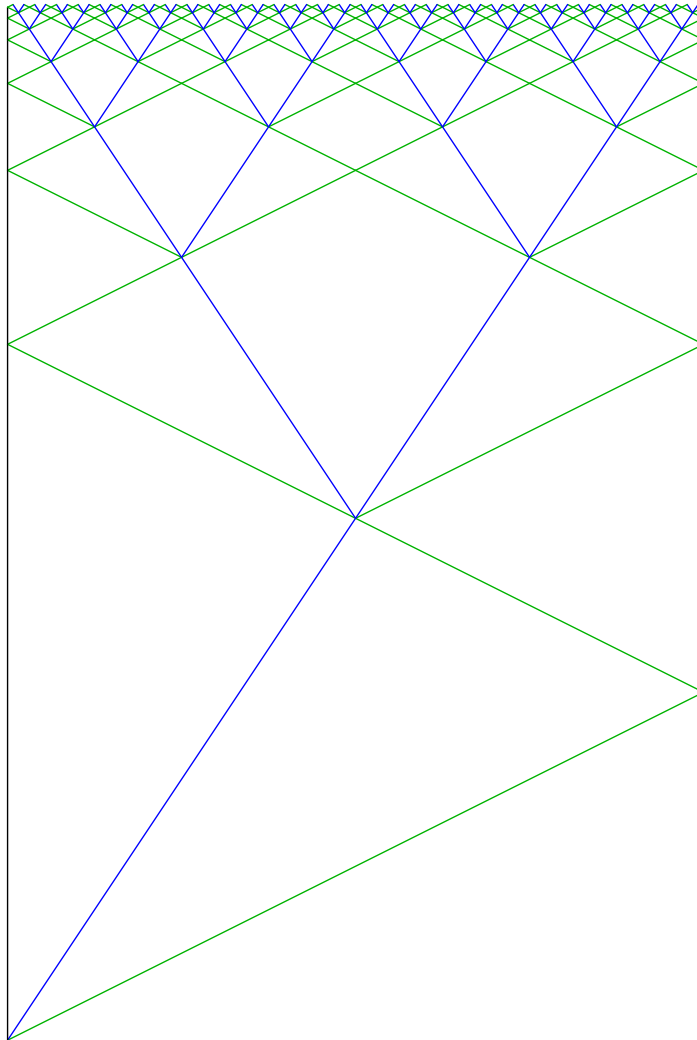


4 méta-signaux 2 règles
Seulement !



Situation gênante

Singularités non isolées

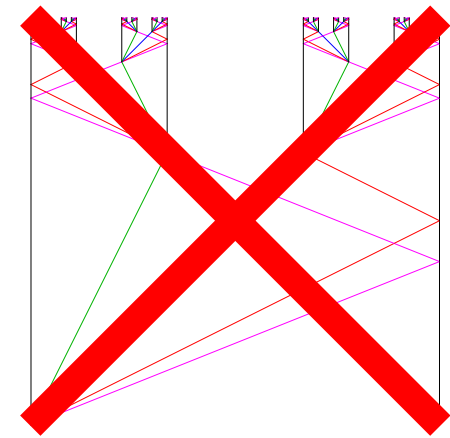
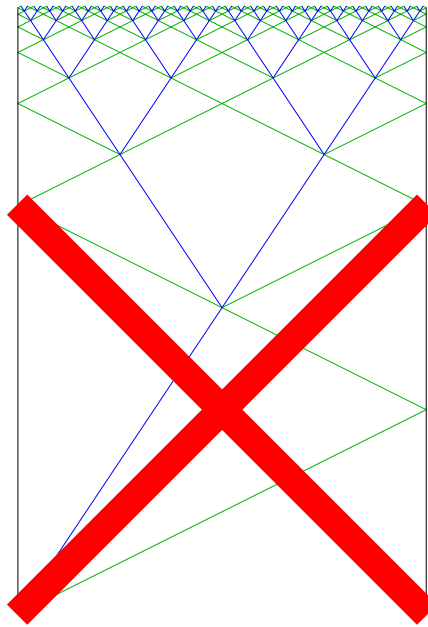
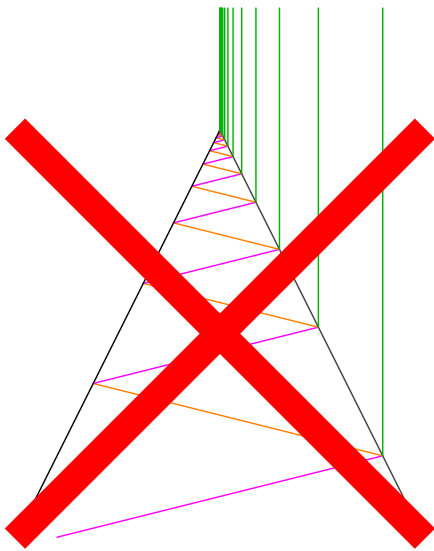


Restriction

- Énergie : $\mu \longrightarrow E(\mu) \in \mathbb{N}^*$
- $\forall \rho = \{\mu_i^-\}_i \rightarrow \{\mu_j^+\}_j, \quad \sum E(\mu_i^-) \geq \sum E(\mu_j^+)$
- $E(\text{ configuration }) = \sum E(\text{ signaux présents })$
- Énergie quantifiée et bornée
- Nombre de signaux borné

Effets

- Nombre de signaux sortant d'une accumulation fini
- Toute accumulation « consomme » de l'énergie
- Nombre de points d'accumulation fini



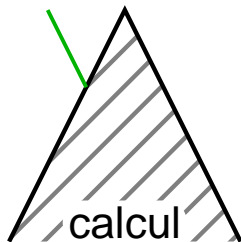
Résolution du récursivement énumérable

Nombre infini d'itérations pendant une durée finie

- On peut encore mener tout calcul au sens de Turing (codage par position)
- On peut encore insérer dans une structure contractante

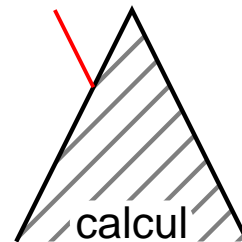
Accepte

Y

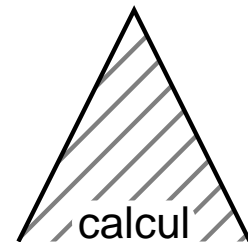


Rejette

N



Ne s'arrête pas

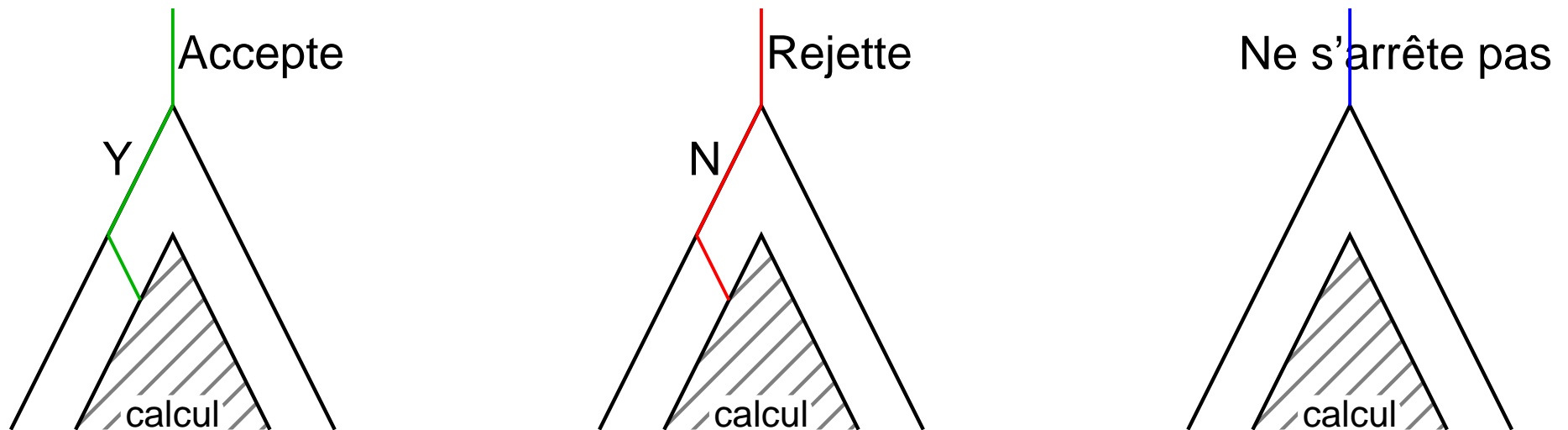


- Ajoute de quoi borner la zone d'accumulation

Résolution du récursivement énumérable

Nombre infini d'itérations pendant une durée finie

- On peut encore mener tout calcul au sens de Turing (codage par position)
- On peut encore insérer dans une structure contractante



- Ajoute de quoi borner la zone d'accumulation
- Lien modèle du trou noir

Conclusion et perspectives

Conclusion

- Modèle de calcul
 - Parallèle
 - Géométrique
 - Espace et temps continus mais valeurs finies (analogique)
 - Turing-universel
- Malléabilité de l'espace-temps
- Accumulations
 - Indécidabilité
 - Traitement partiel
 - Lien modèle du trou noir (ou sur ordinal)

Perspectives

- Positions réelles
 - Oracles quelconques
- Relier à d'autres modèles
 - Compréhension des modèles continus
 - Classes de complexité et de décidabilité continues
- Automates cellulaires
 - Discrétisation automatique
 - Théorèmes de transfert