

Calculer géométriquement sur le plan

– *machines à signaux* –

Jérôme DURAND-LOSE

LIFO, Université d'Orléans

MAPMO, U. d'Orléans – 12 avril 2005

Automates cellulaires

Réversibilité

Lignes
discrètes / continus

Machines à
signaux

Systemes complexes

Modèles de calcul

« continus »

Plan

- Origine
 - Automates cellulaires
- Machines à signaux
 - Universalité au sens du calcul
 - Modifications géométriques
- Accumulation
 - Non-prédictibilité de l'apparition
 - Exemples, Restriction et Utilisation
- Conclusion et perspectives

Origine

— Automates cellulaires —

Automates cellulaires

Outil de modélisation en biologie, physique. . . parallélisme

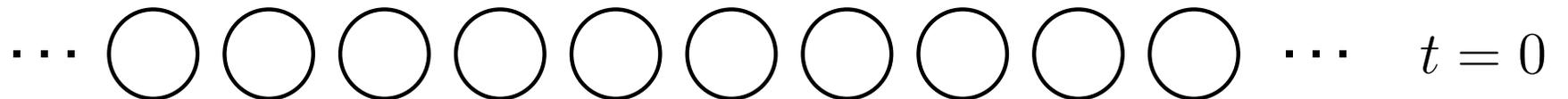
Systeme dynamique

Automates cellulaires

Outil de modélisation en biologie, physique. . . parallélisme

Systeme dynamique

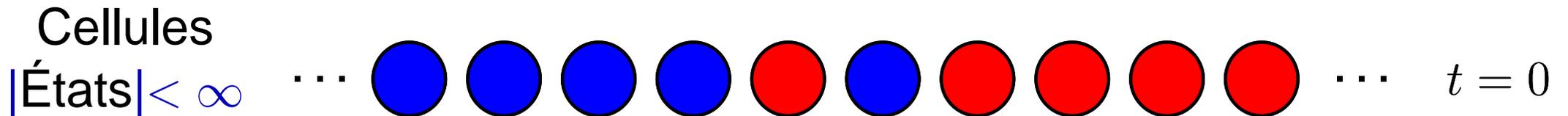
Cellules



Automates cellulaires

Outil de modélisation en biologie, physique. . . parallélisme

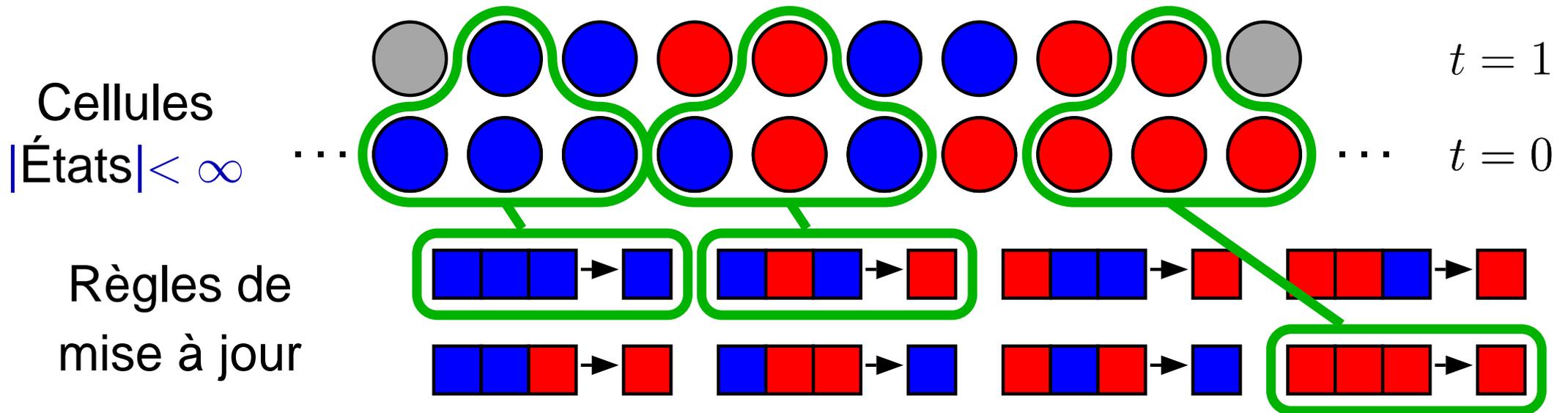
Systeme dynamique



Automates cellulaires

Outil de modélisation en biologie, physique... parallélisme

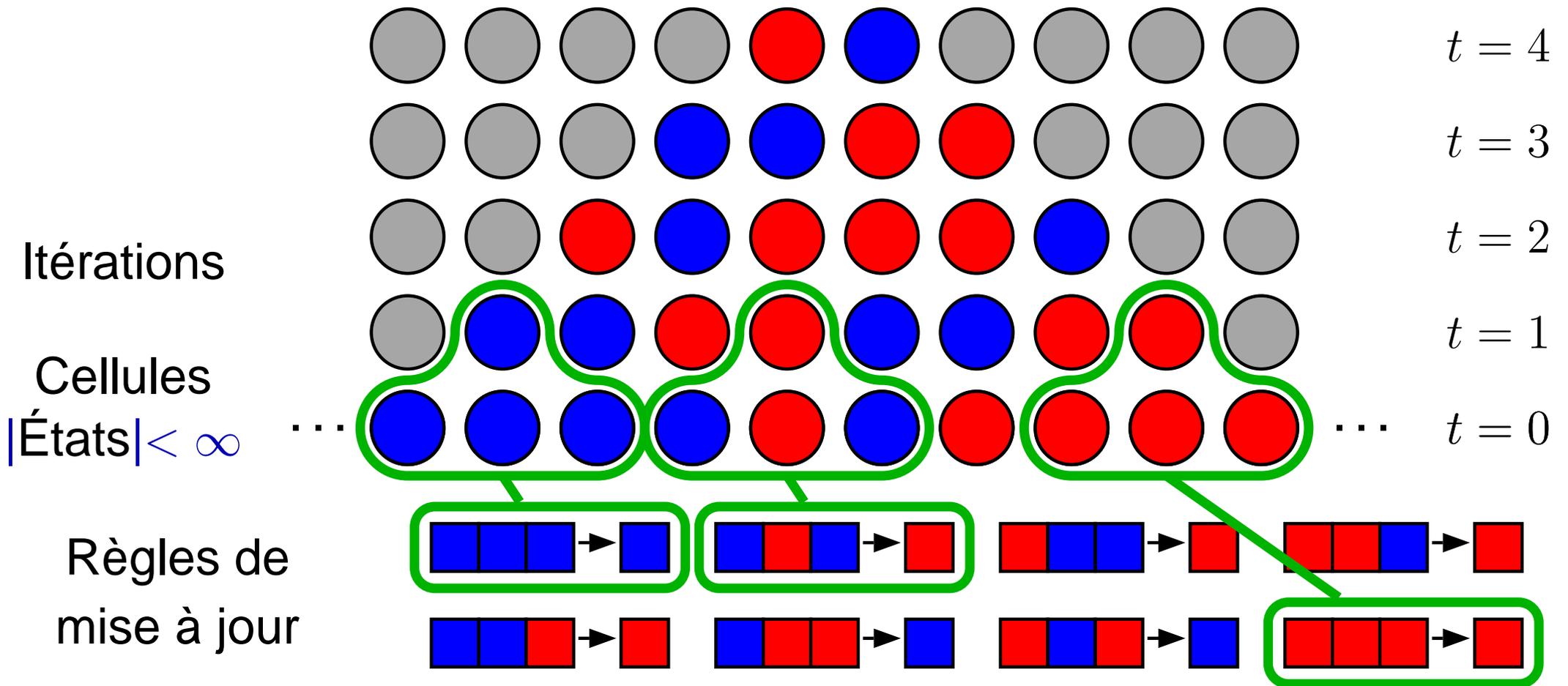
Systeme dynamique



Automates cellulaires

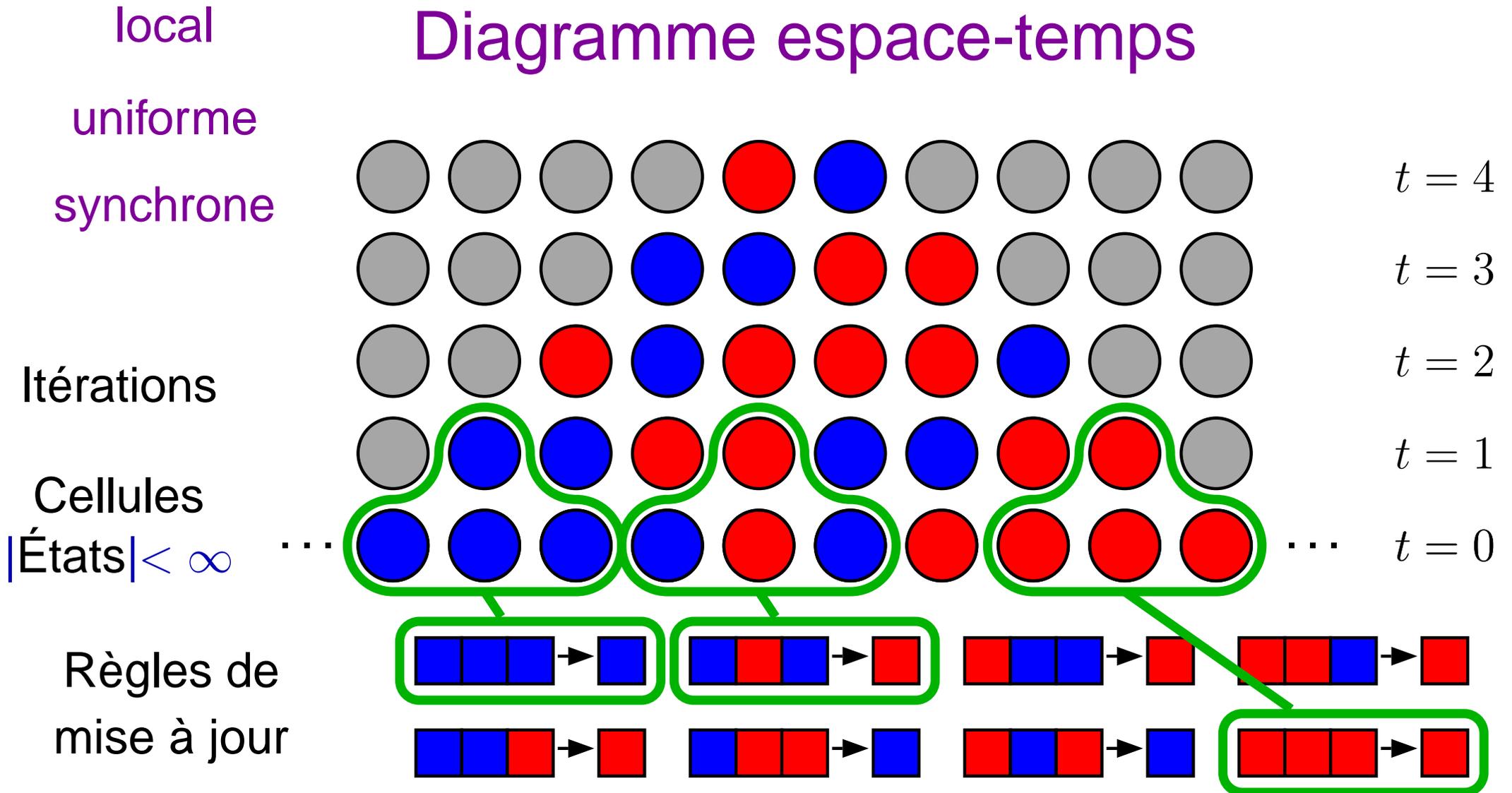
Outil de modélisation en biologie, physique... parallélisme

Systeme dynamique



Automates cellulaires

Diagramme espace-temps



Particules, solitons...

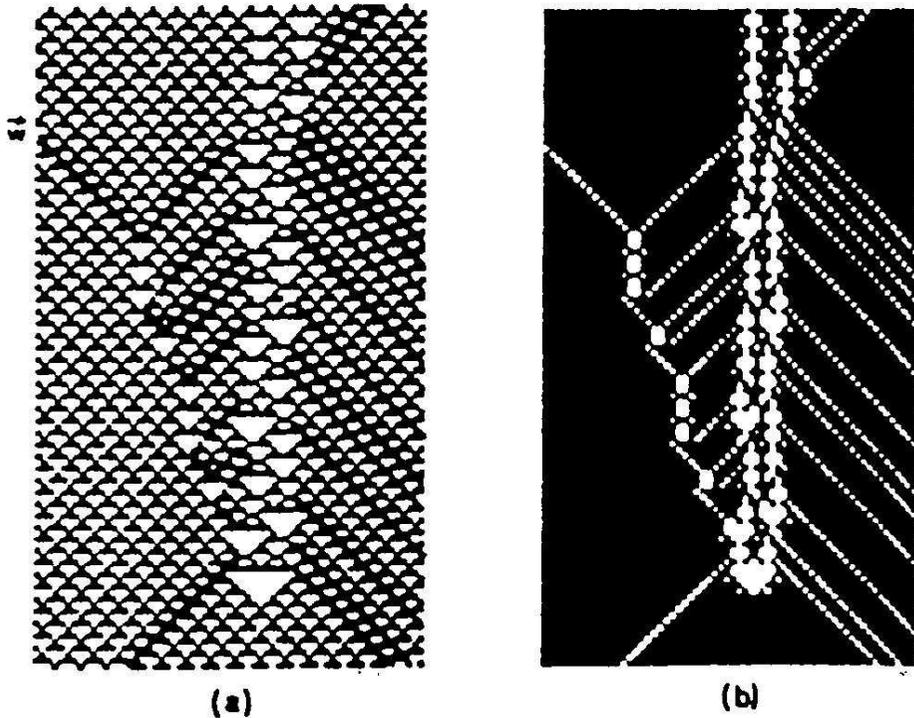


FIG. 7. Rule 54. (a) Annihilation of the radiating particle. (b) The same as (a) with the mapping defined in Fig. 6.

[Boccaro et al., 1991, Fig. 7]

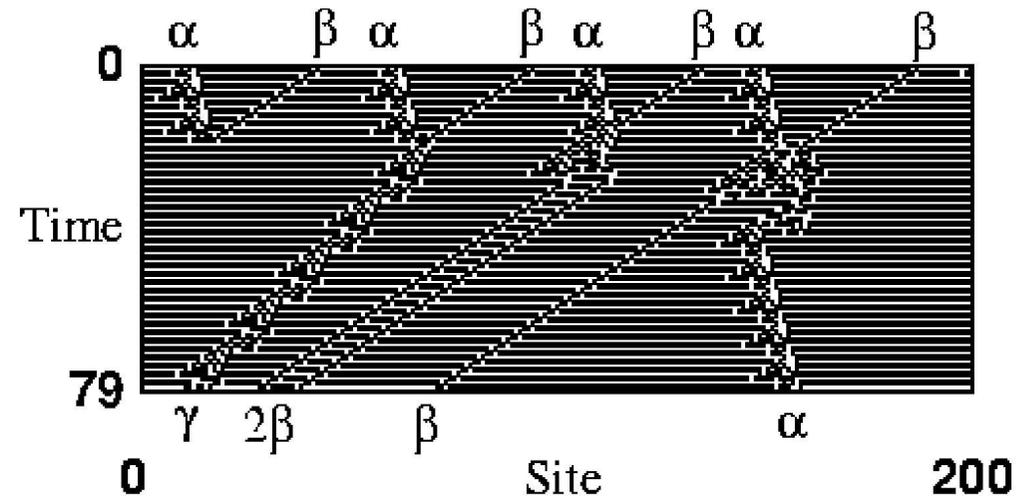


FIG. 7. The four different (out of 14 possible) interaction products for the $\alpha + \beta$ interaction.

[Hordijk et al., 2001, Fig. 7]

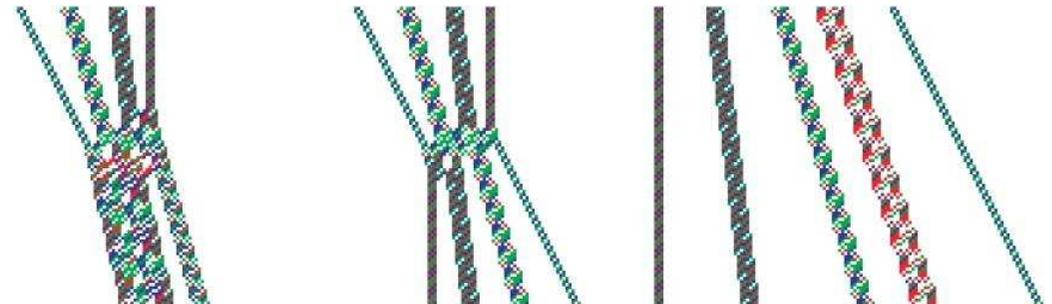


Figure 5. Two collisions of filtrons, and five free filtrons supported by the FPS model; ST diagram applies $q = 1$.

[Siwak, 2001, Fig. 5]

Pour construire un AC Turing-universel

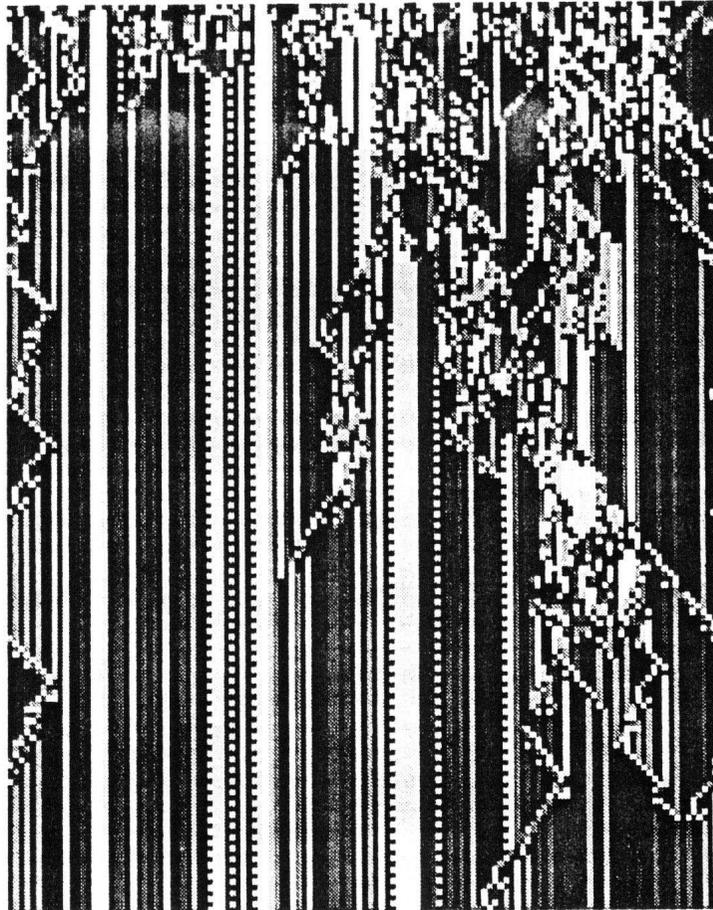


Figure 3: A simulation of the $k = 7$, $r = 1$ universal CA of table 3 for an uncorrelated initial state (with a density of blanks equal to 0.76). Symbols y , 0, 1, A , B , \sqcup , and T are represented by 

[Lindgren and Nordahl, 1990, Fig. 4]

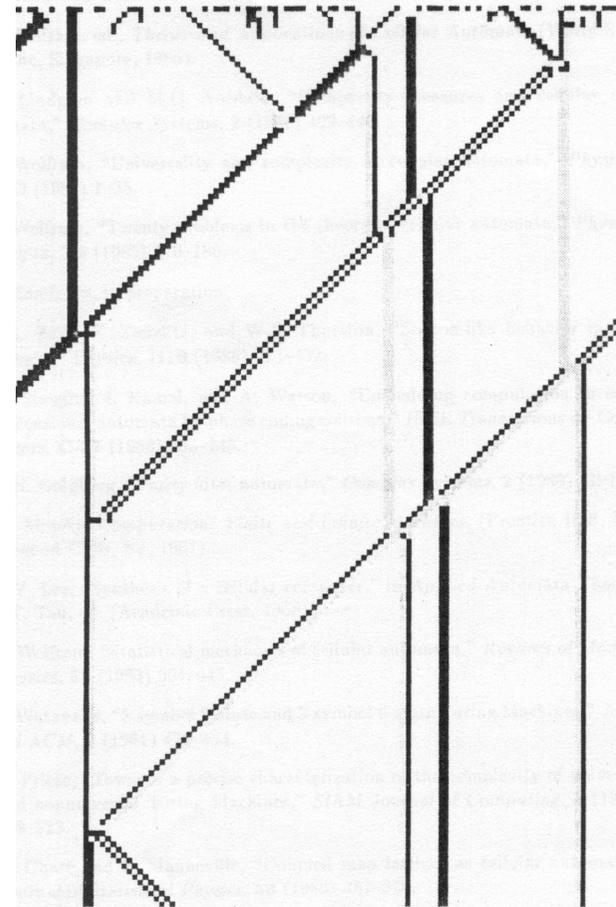


Figure 4: The $k = 4$, $r = 2$ universal cellular automaton of table 4 simulated starting from a random initial state. The symbols 0, 1, \sqcup , and $+$ are represented by 

[Lindgren and Nordahl, 1990, Fig. 3]

Algorithmique géométrique

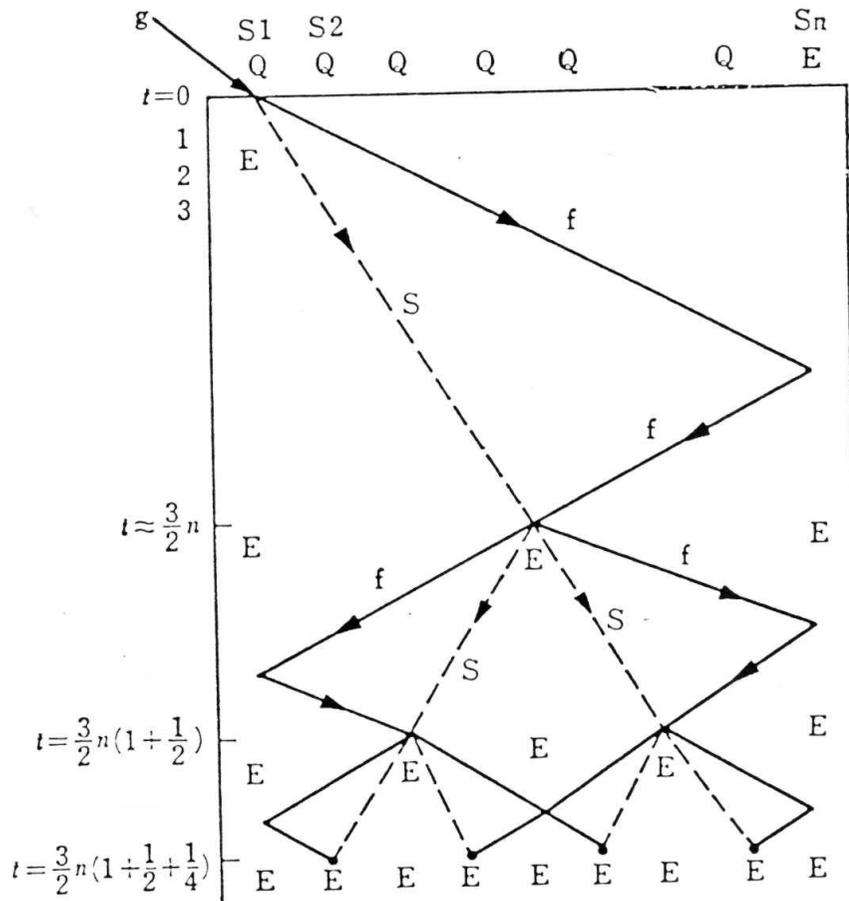


図 3.5 一斉射撃の問題 (連続近似)

[Goto, 1966, Fig. 3]

G	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
g	Q	Q	Q	Q	Q	E
$t=0$	$f's'Es$	Q	Q	Q	Q	E
1	E	Q2f	Q	Q	Q	E
2	E	Q1	Qf	Q	Q	E
3	E	Q&	Q	Qf	Q	E
4	E	Q	Q2	Q	Qf	E
5	E	Q	Q1	Q	Q	$f'Ef$
6	E	Q	QS	Q	$f'Q$	E
7	E	Q	Q	$a'Q^*$	Q	E
8	E	Q	$f'S'ESf$	$f's'Esf$	Q	E
9	E	$f'2Q$	E	E	$Q2f$	E
10	$f'Ef$	1Q	E	E	Q1	$f'Ef$
11	E	$f'S'ESf$	E	E	$f's'Esf$	E
12	$a'Ea$	E	$a'Ea$	$a'Ea$	E	$a'Ea$
13	F	F	F	F	F	F

図 3.6 一斉射撃解 ($n=6$)

[Goto, 1966, Fig. 6]

Algorithmique des signaux

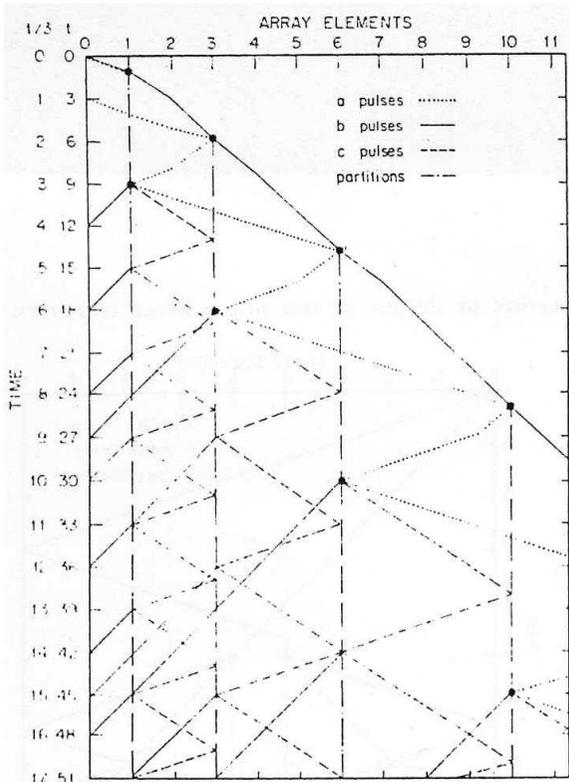


FIG. 2. Solution to the prime problem

[Fischer, 1965, Fig. 2]

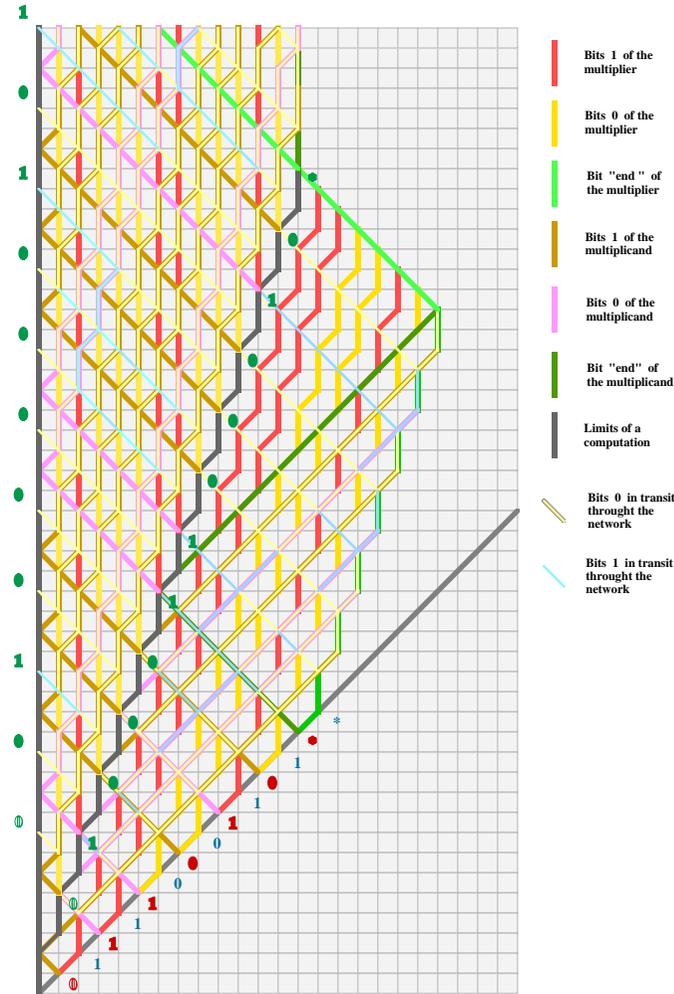


Figure 8: Computing $(ab)^2$.

[Mazoyer, 1996, Fig. 8]

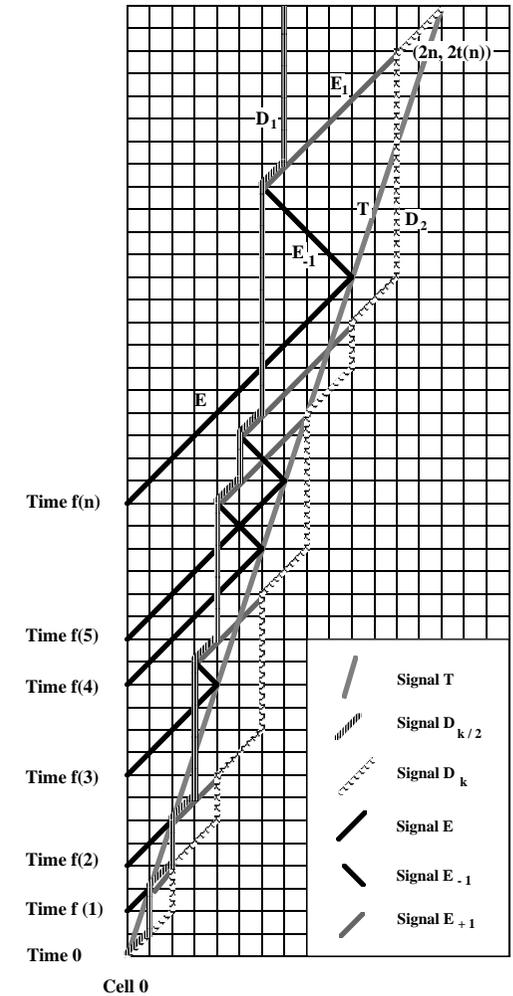


Figure 18: Characterization of the sites $(n, f(n))$.

[Mazoyer and Terrier, 1999, Fig. 18]

Origine

Diagrammes espace-temps (discrets)

Observation



Implantation

Lignes discrètes

Interprétation



Discretisation

Lignes sur le plan

Dynamique



Conception

Origine

Diagrammes espace-temps (discrets)

Observation



Implantation

Lignes discrètes

Interprétation



Discretisation

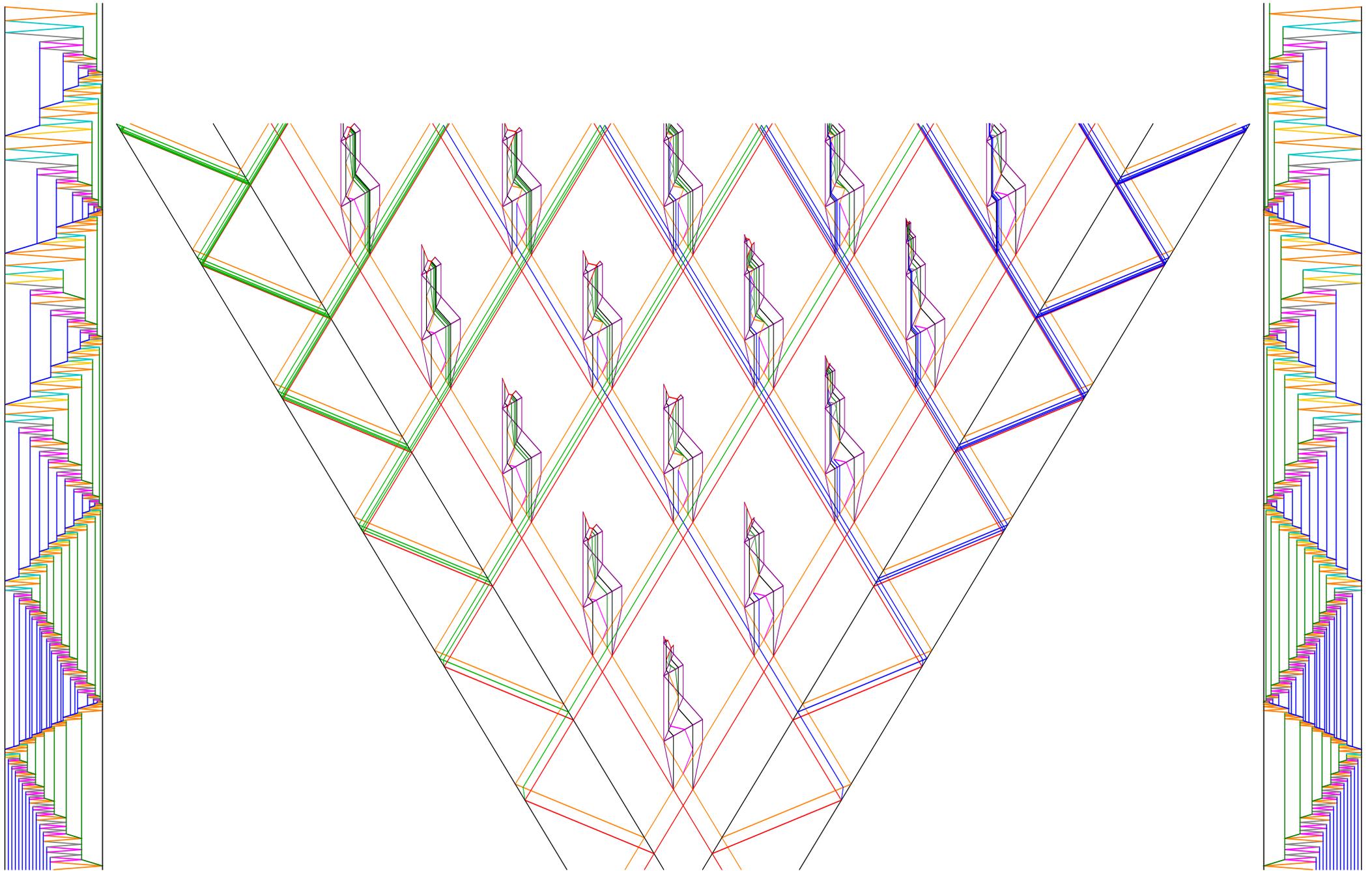
Lignes sur le plan

Dynamique



Conception

Modèle en lui-même

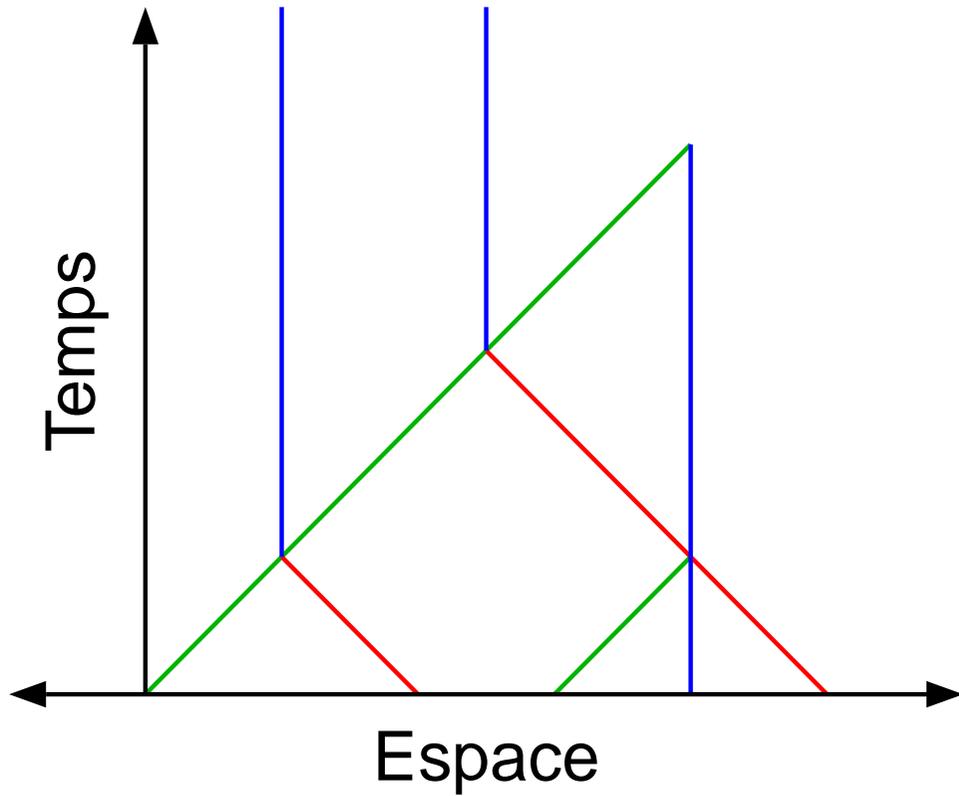


Machines à signaux

Analyse du modèle

~~$\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$~~

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$



Analyse du modèle

~~$\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$~~

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$

Signal

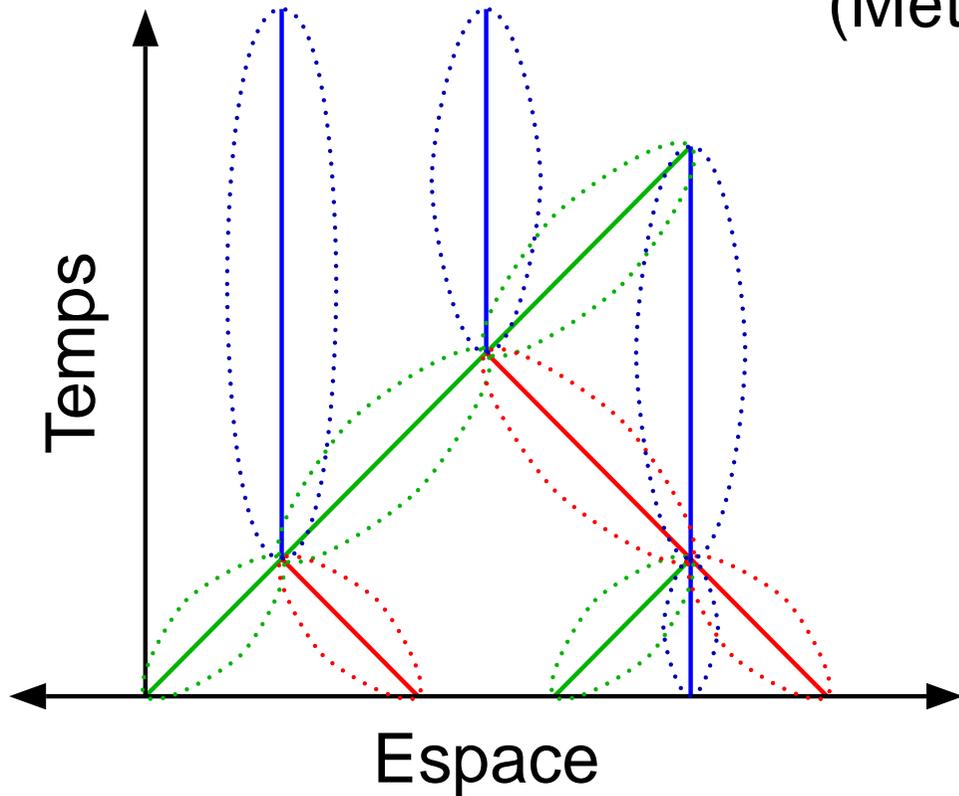
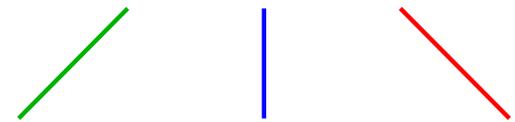
(Méta-signal, position)

Position

(x, t)

Méta-signal

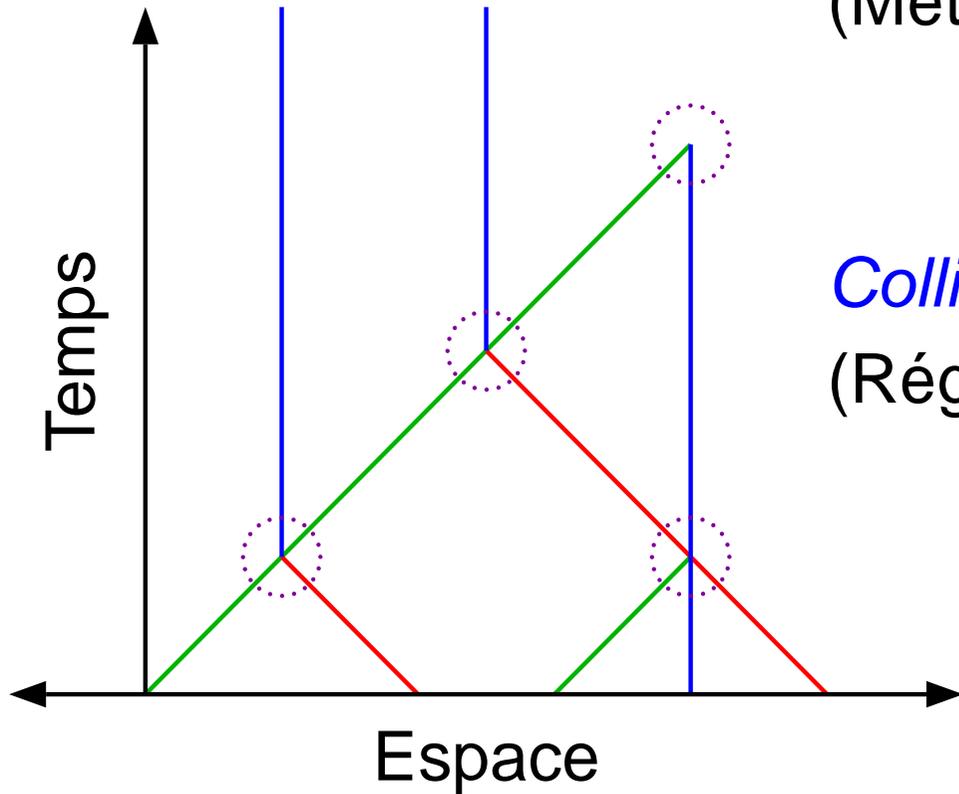
$\mu = (\iota, \nu)$



Analyse du modèle

~~$\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$~~

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$



Signal

(Méta-signal, position)

Position

(x, t)

Collision

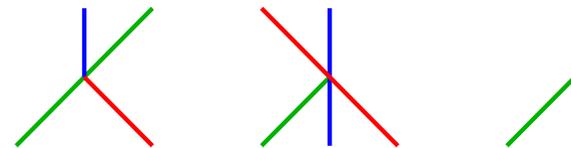
(Règle, position)

Méta-signal

$\mu = (\iota, \nu)$

Règle

$\rho = \{\mu_i^-\}_i \rightarrow \{\mu_j^+\}_j$



Définition du modèle

Machine

$$\mathcal{M} = (\{\mu_i\}_i, \{\rho_j\}_j)$$

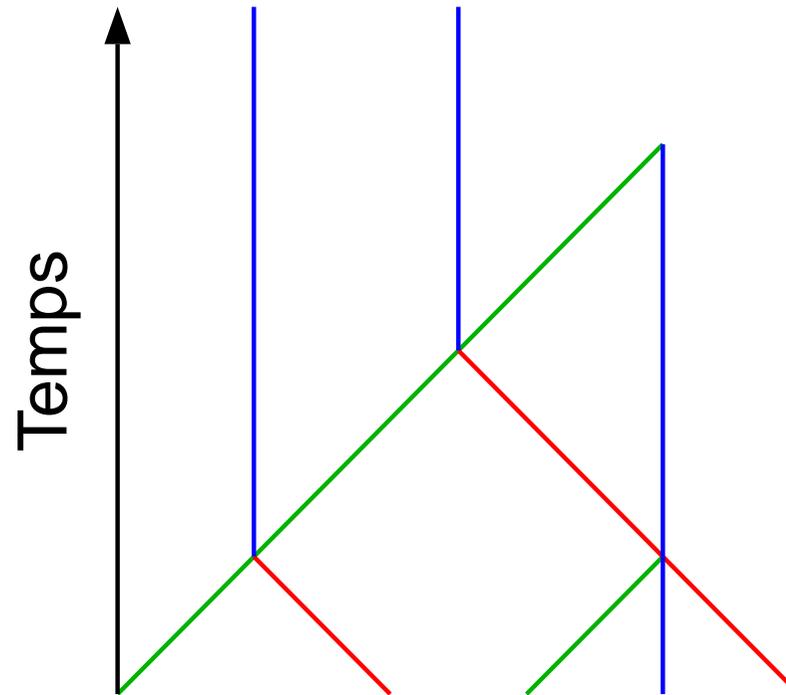
Description finie

Déterministe

Configuration (à t)

Positions des signaux et collisions

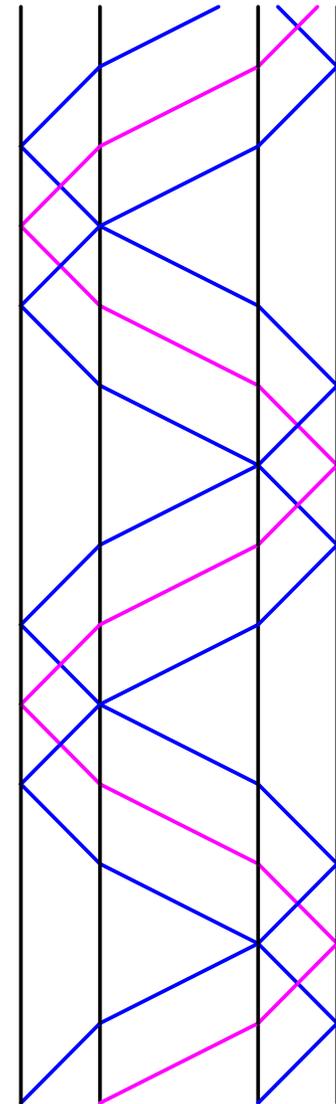
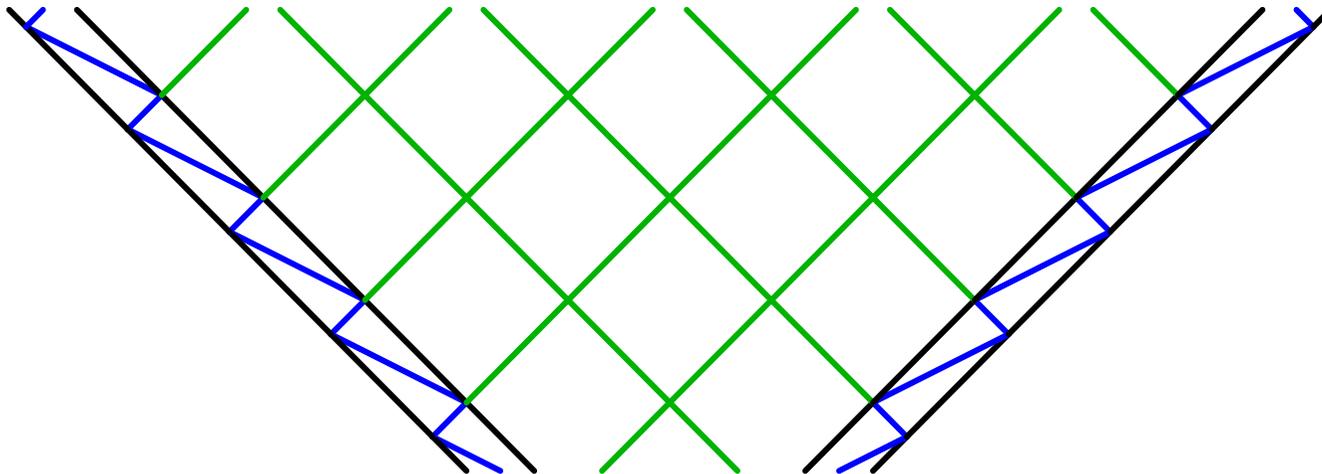
Diagramme espace-temps



Calcul
collisions +
ordre de dépendance

Propriétés

- Uniforme dans le temps et l'espace
- Local
- Cône de lumière
- Nombre fini de valeurs et de règles
- Espace et temps continus



Calculer

Turing-universalité

Simulation automate à deux compteurs

```

beg: B++
    A--
    A != 0 beg1
    B != 0 imp
beg1: A--
    A != 0 beg
pair: B--
    A++
    B != 0 pair
    A != 0 beg
imp: B--
    A++
    A++
    B != 0 imp1
    A != 0 beg
imp1: B--
    A++
    A++
    A++
    B != 0 imp1
    A != 0 beg
    
```

A et B deux compteurs à valeurs dans \mathbb{N}

Opérations

A++

B++

A--

B--

A != 0 <label> B != 0 <label>

Codage

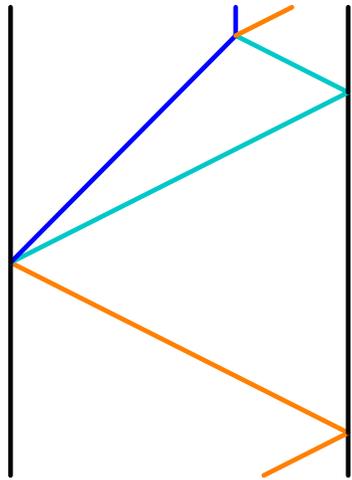


bord $a_0 = 6$ instruction i $b_0 = 2$ bord

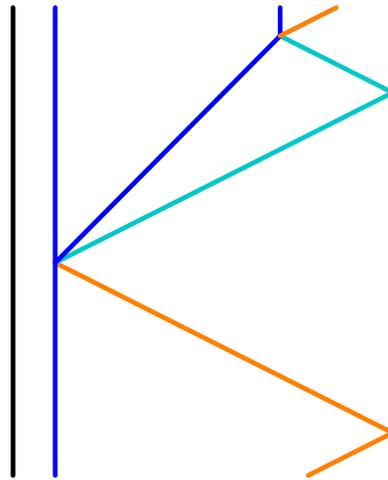
Place illimitée pour les signaux

Transcription des instructions

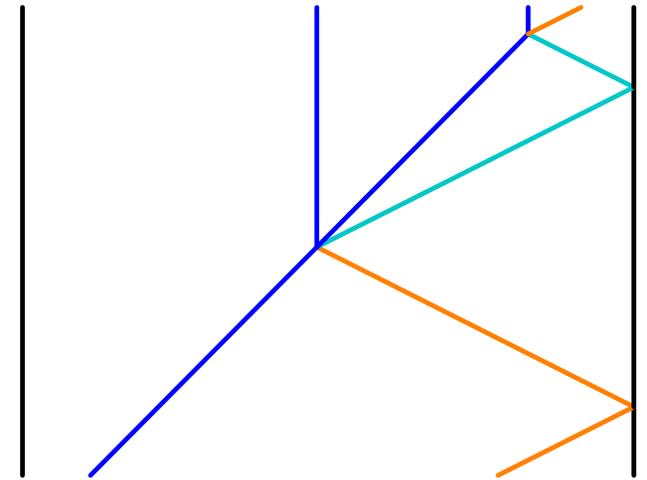
$A++$



$a = 0$

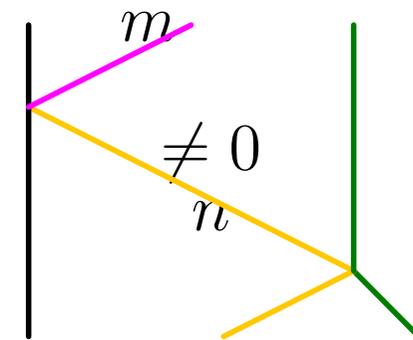
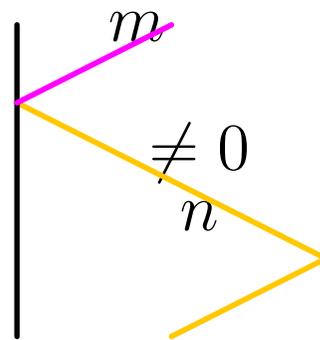
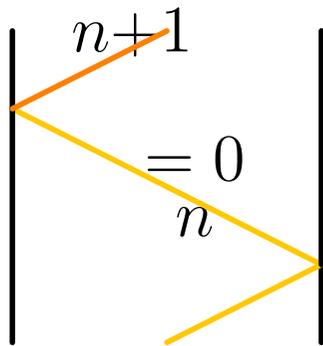


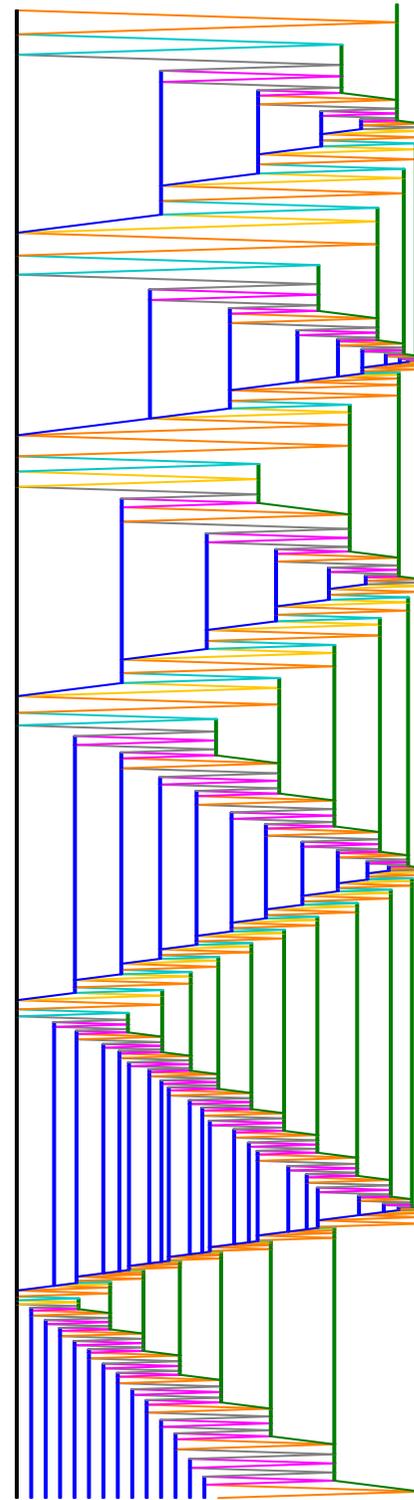
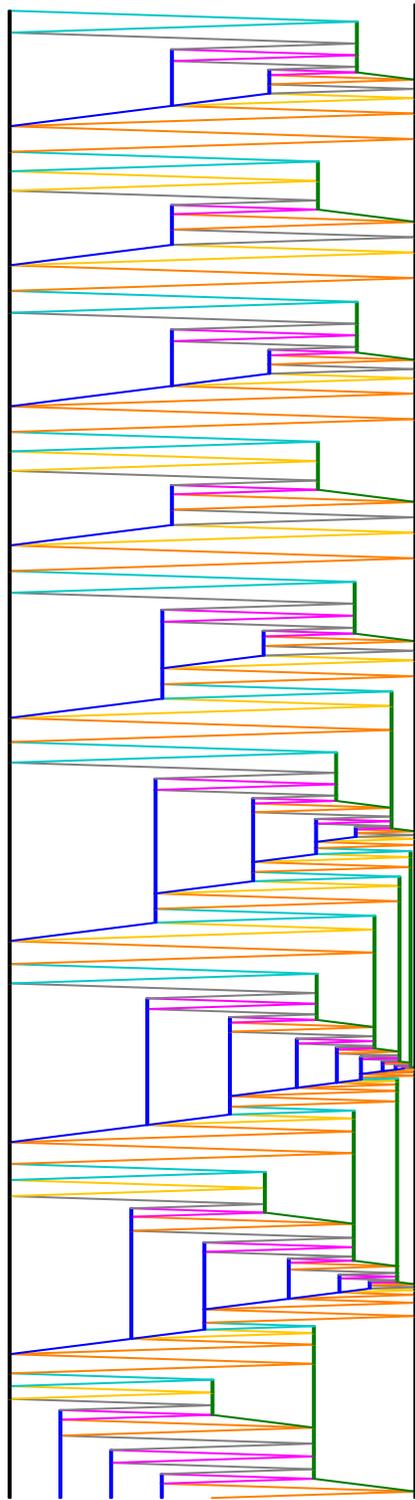
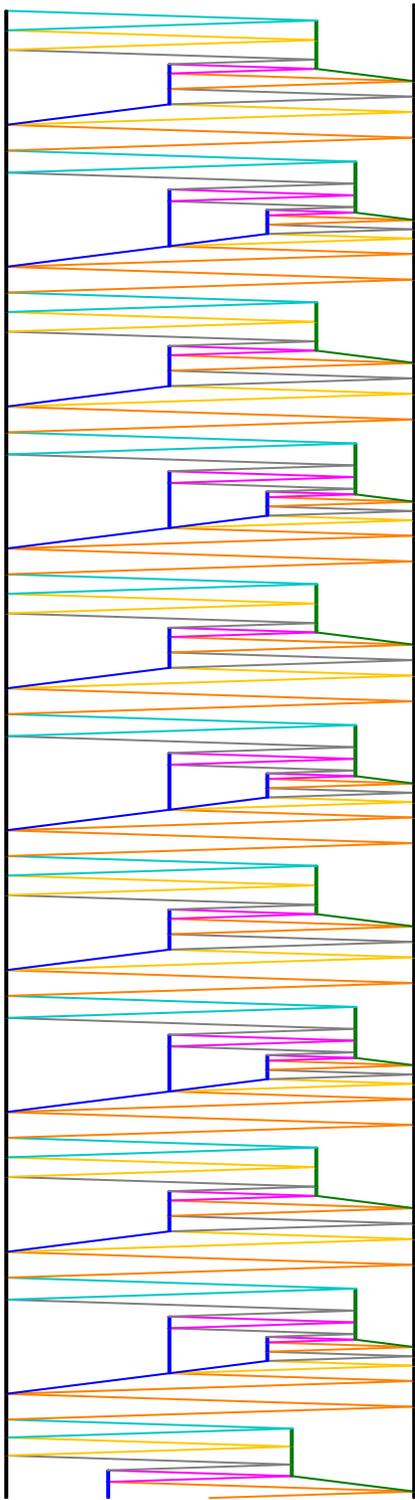
$a \neq 0$



Après $A++$

$B \neq 0 \quad m$





Turing-universel

Tout calcul récursif peut être réalisé

↪ *Imprédictible*

e.g. sont indécidables

- nombre fini de collisions
- apparition d'un méta-signal

Modifications géométriques

Constructions géométriques

Modifications du diagramme espace-temps

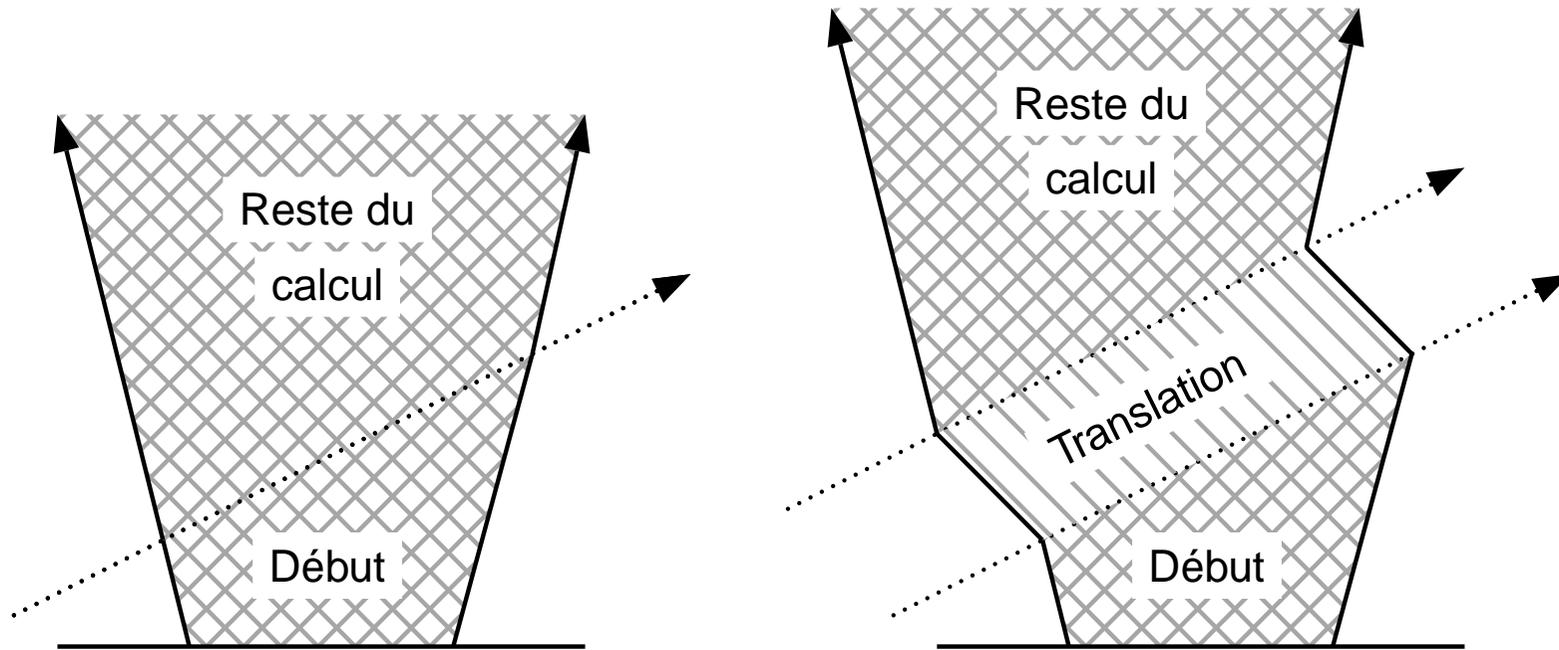
mais préserve le calcul (*i.e.* ordre des collisions)

- Dynamique
 - Gel et translation
 - Dilatation

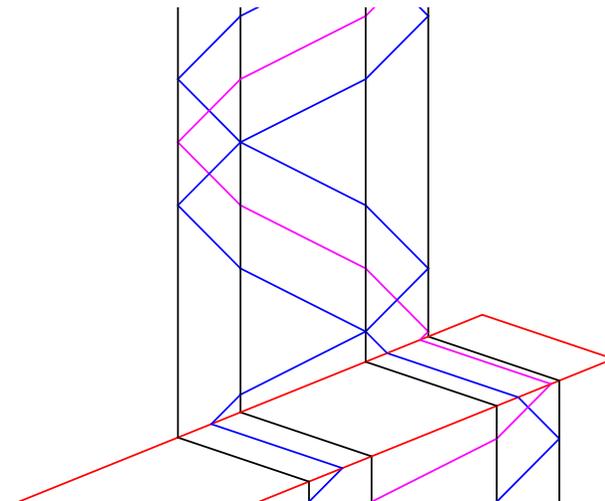
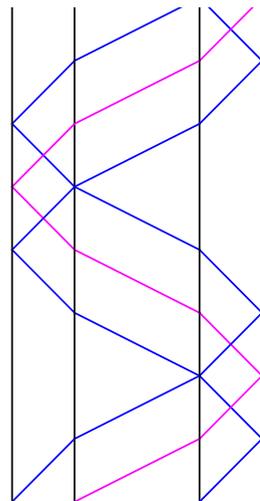
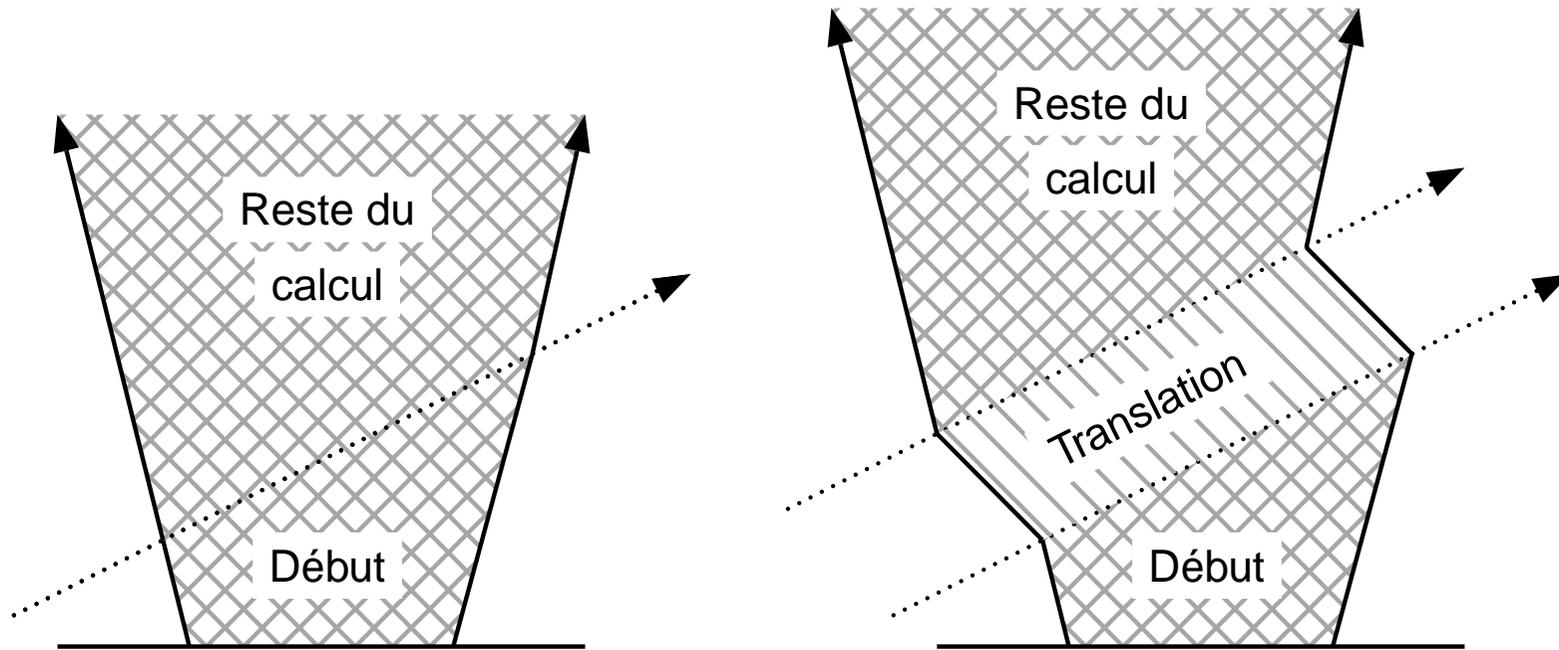
- Construction de plus haut niveau
 - Contractions
 - Itérations

Seuls modifications : ajouts de méta-signaux et de règles

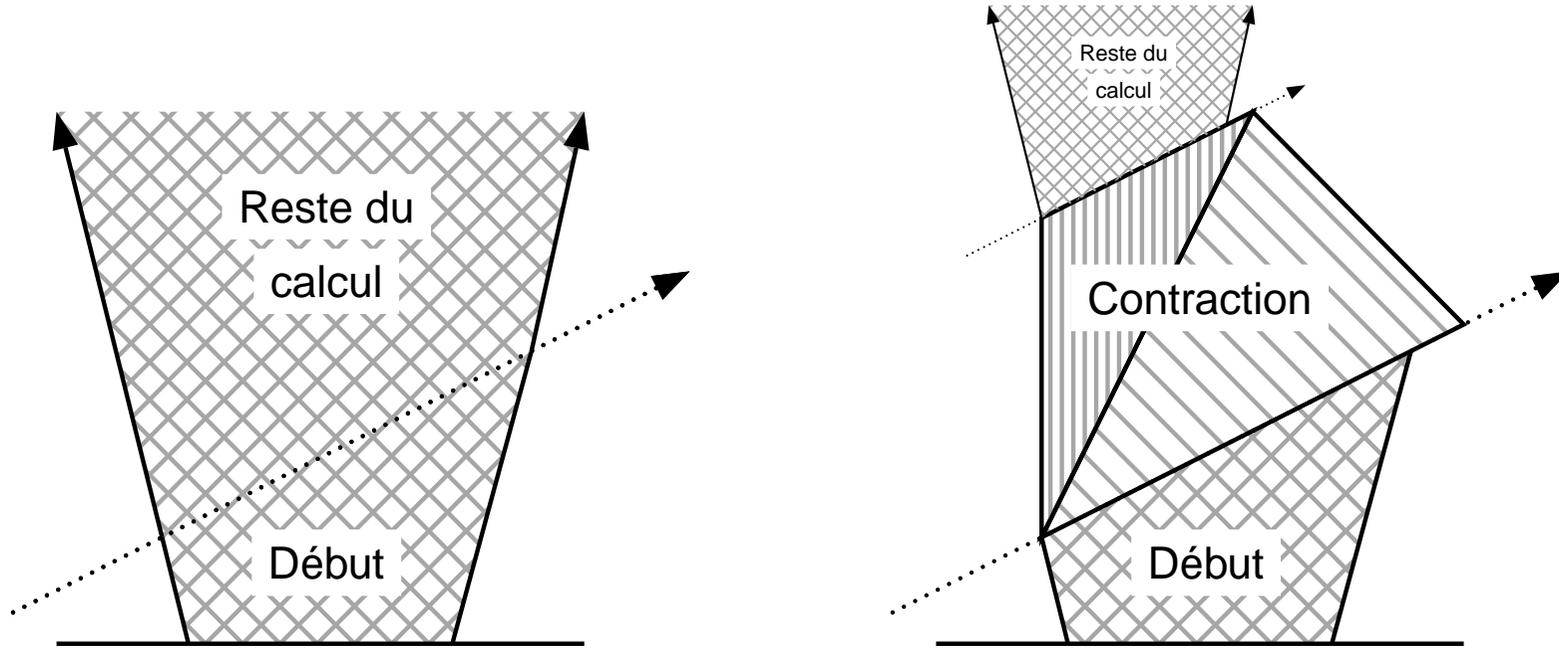
Gel puis dégel du calcul



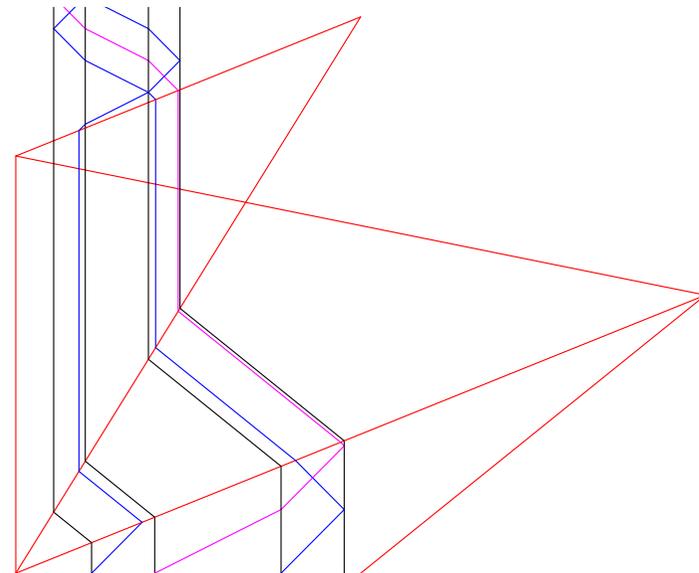
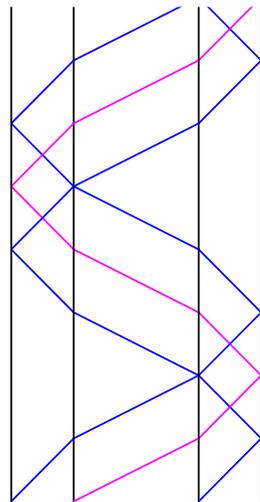
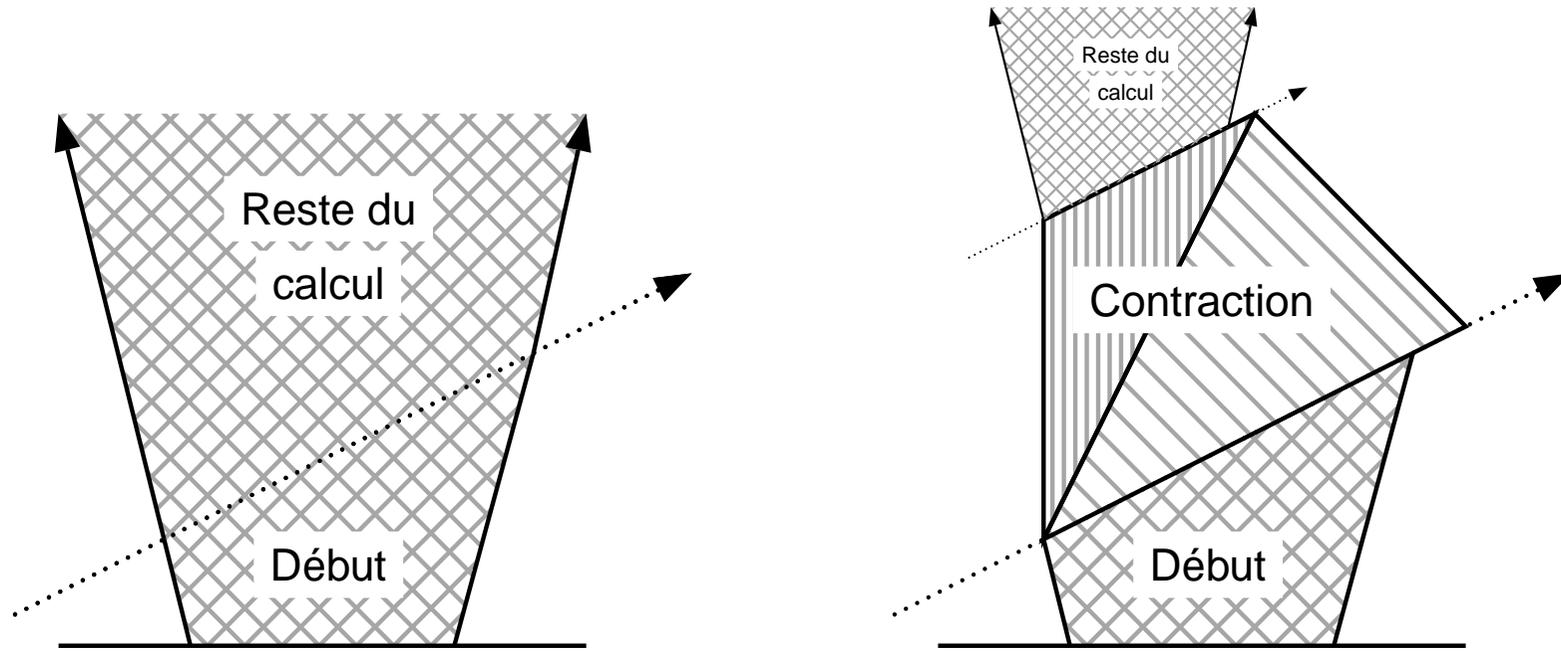
Gel puis dégel du calcul



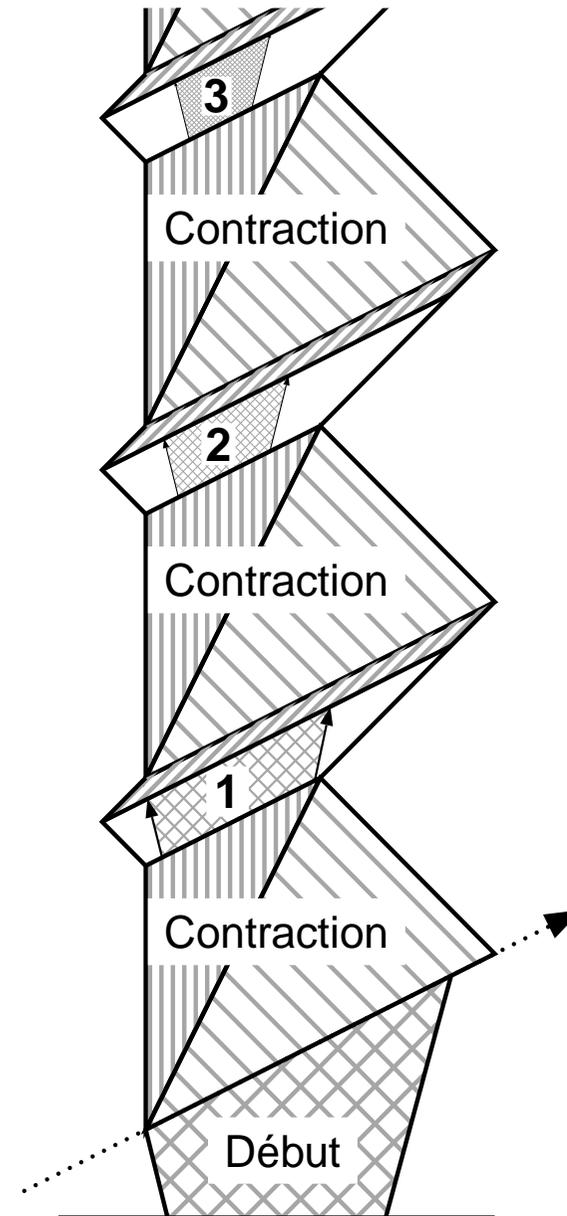
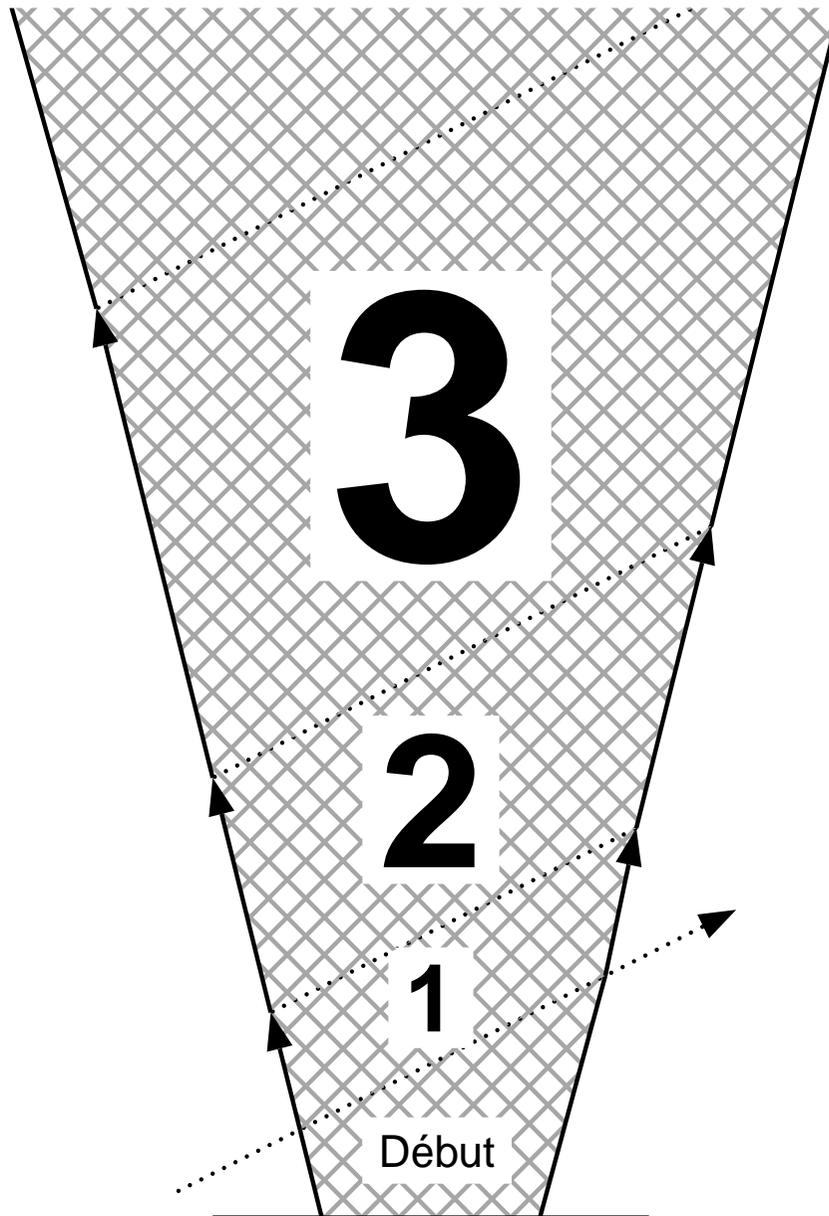
Contraction



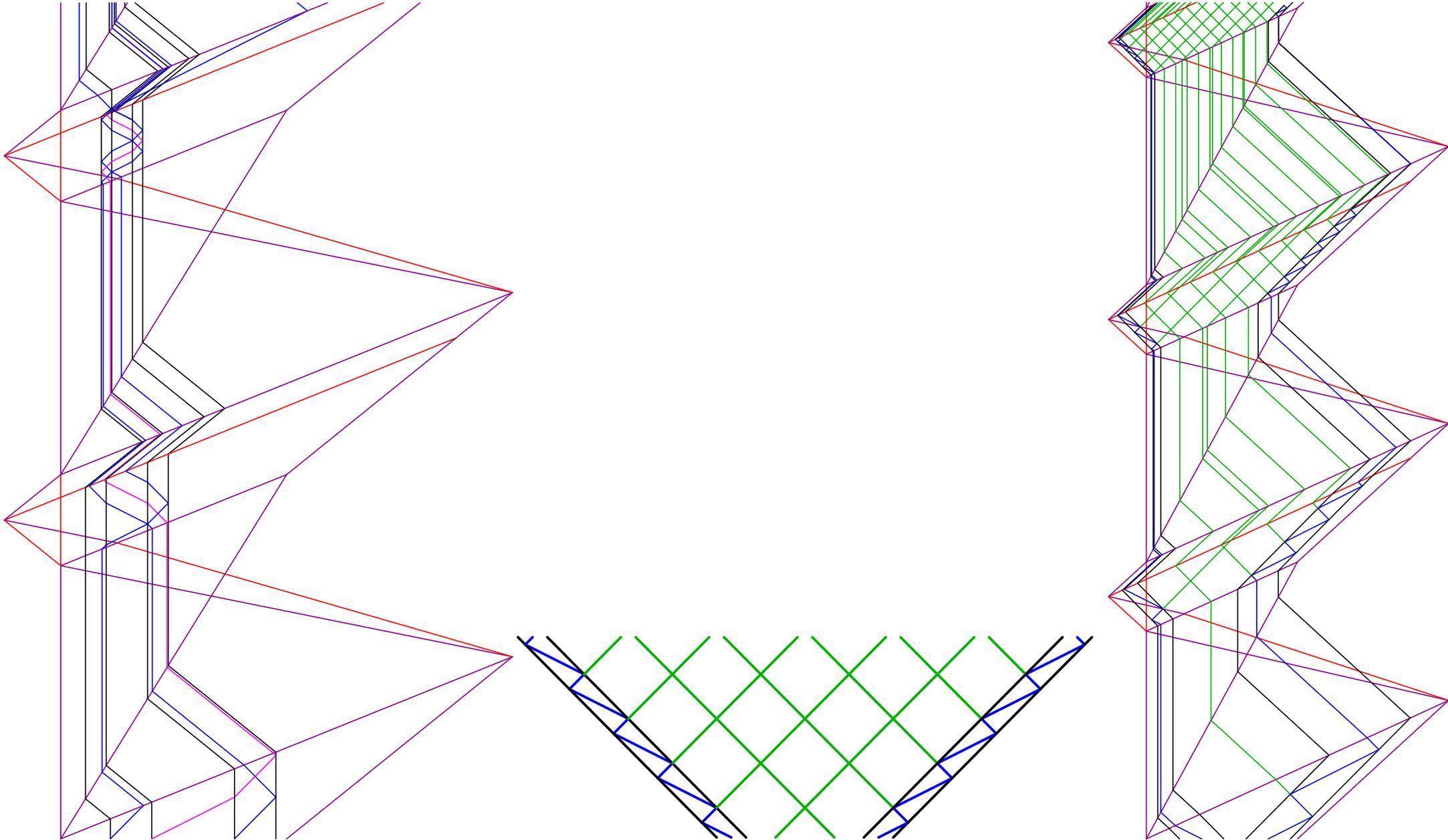
Contraction



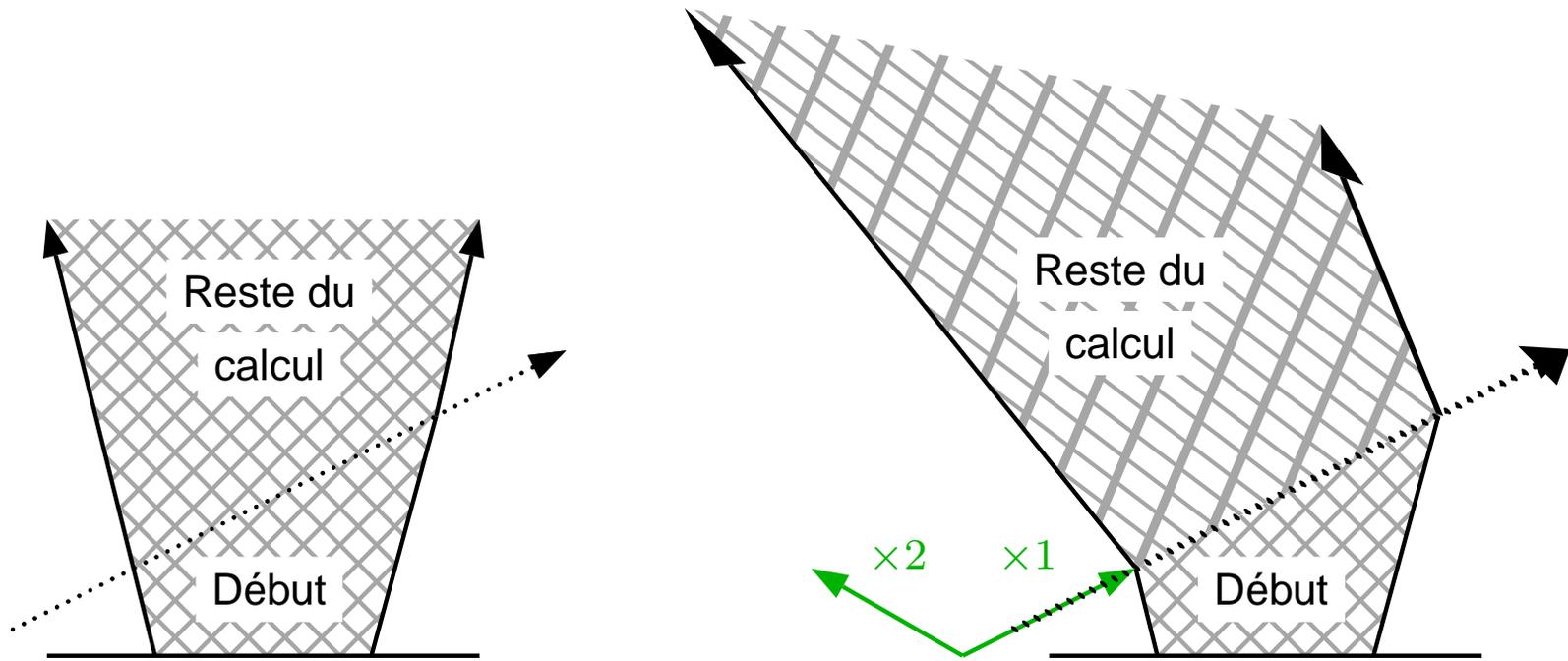
Contraction à une bande



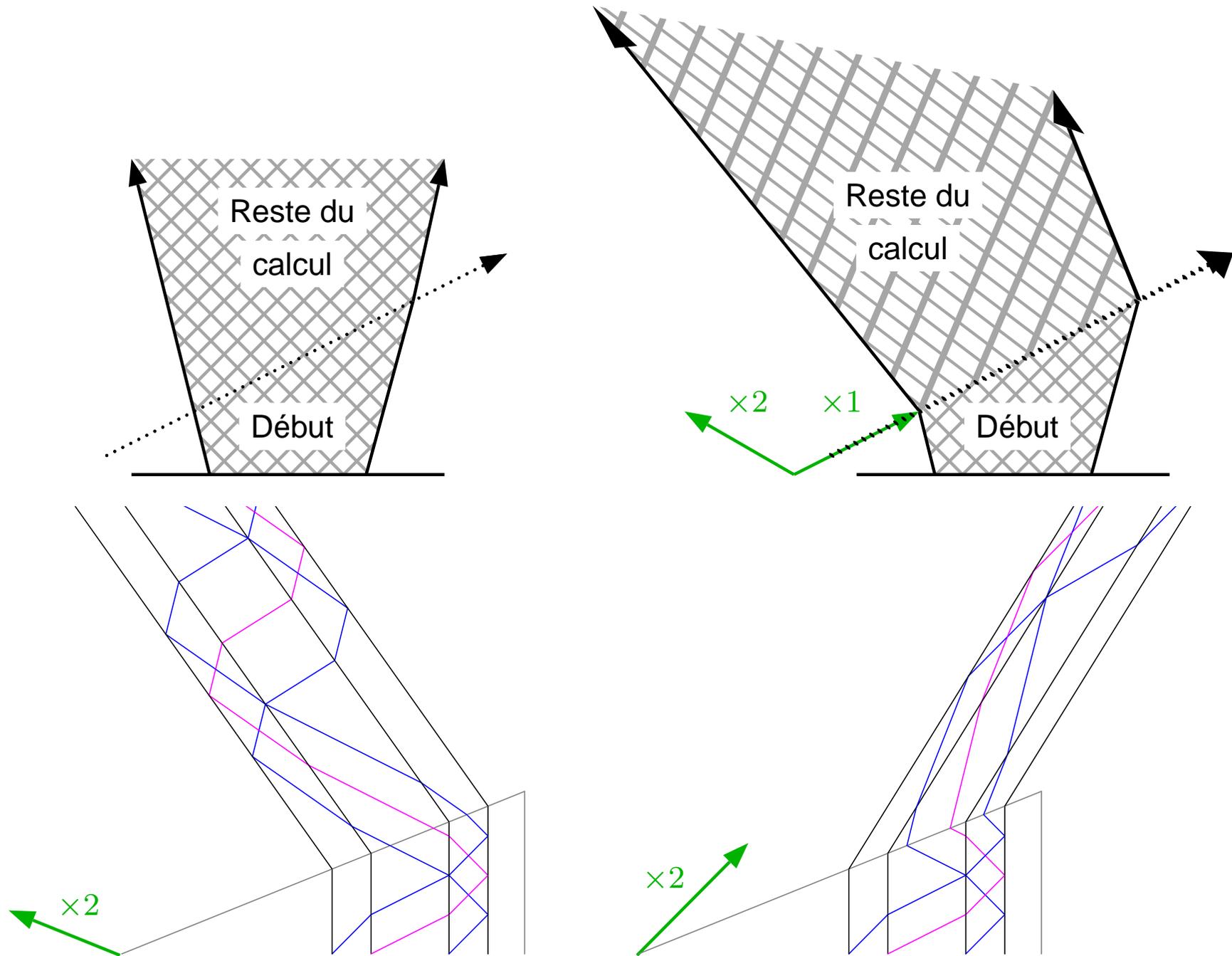
Contraction à une bande



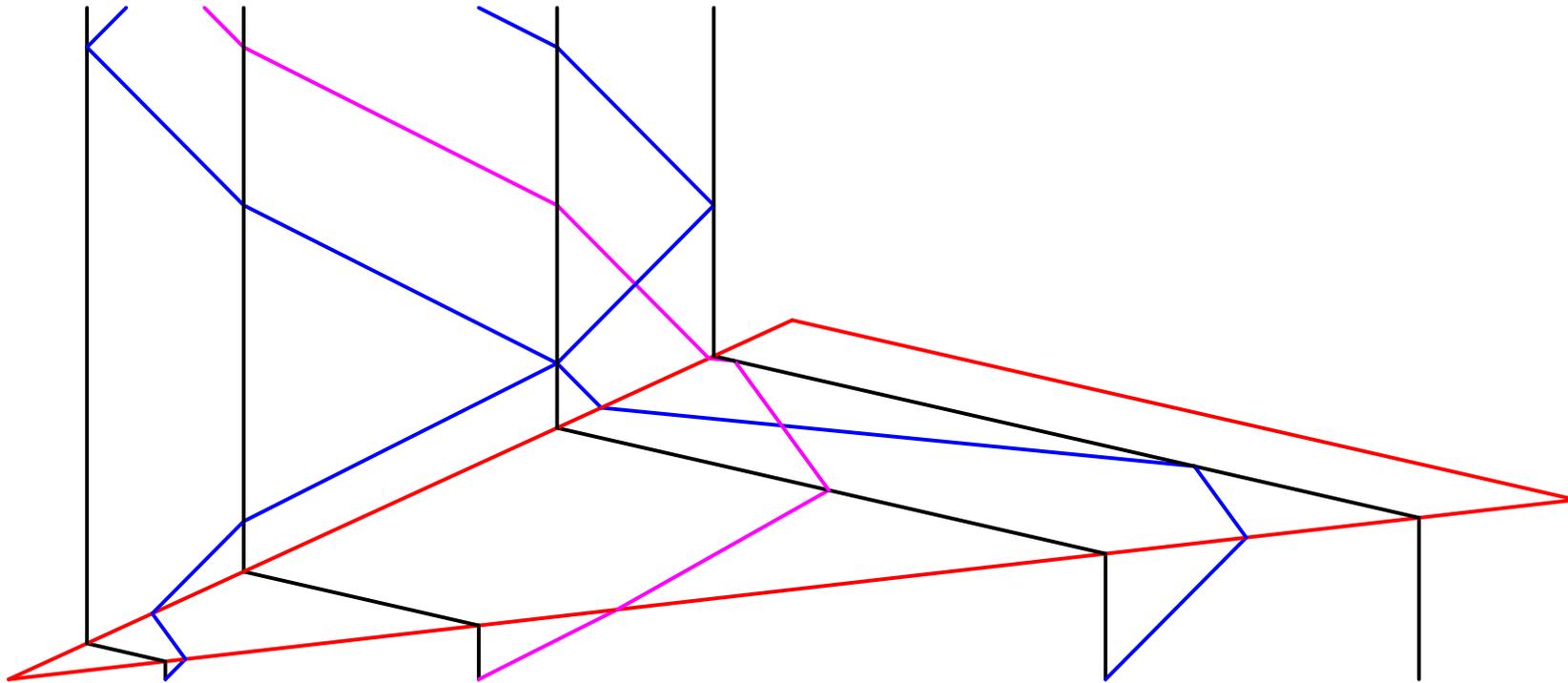
Dilatation



Dilatation



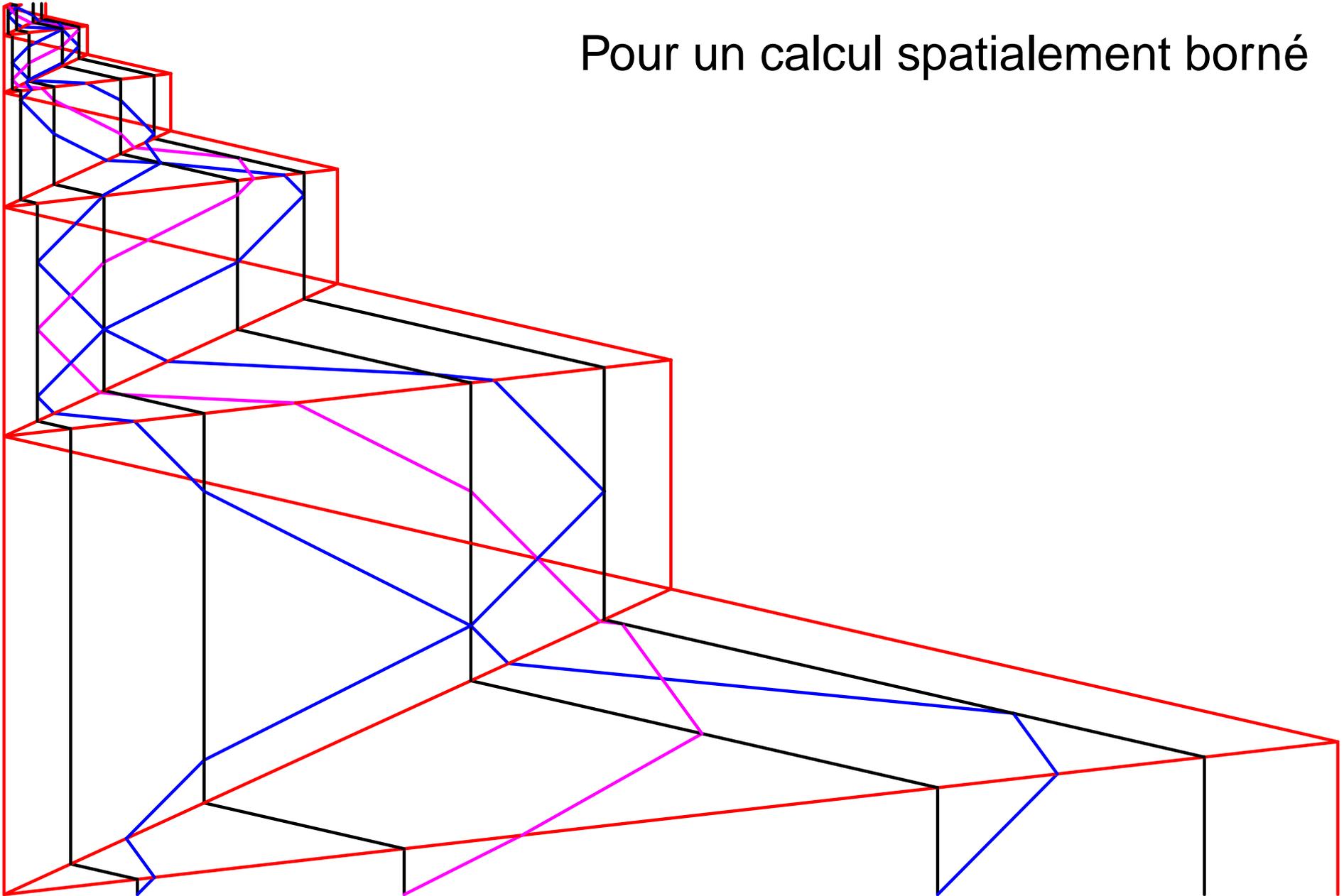
Contraction continue

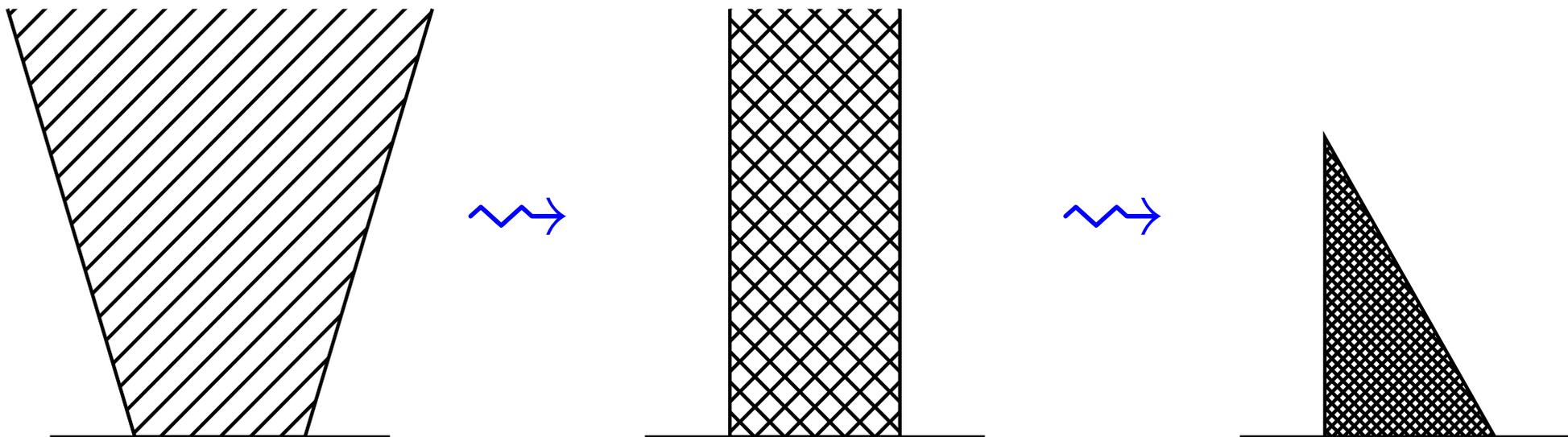


Si le calcul reste borné on peut itérer...

Contraction à un triangle

Pour un calcul spatialement borné

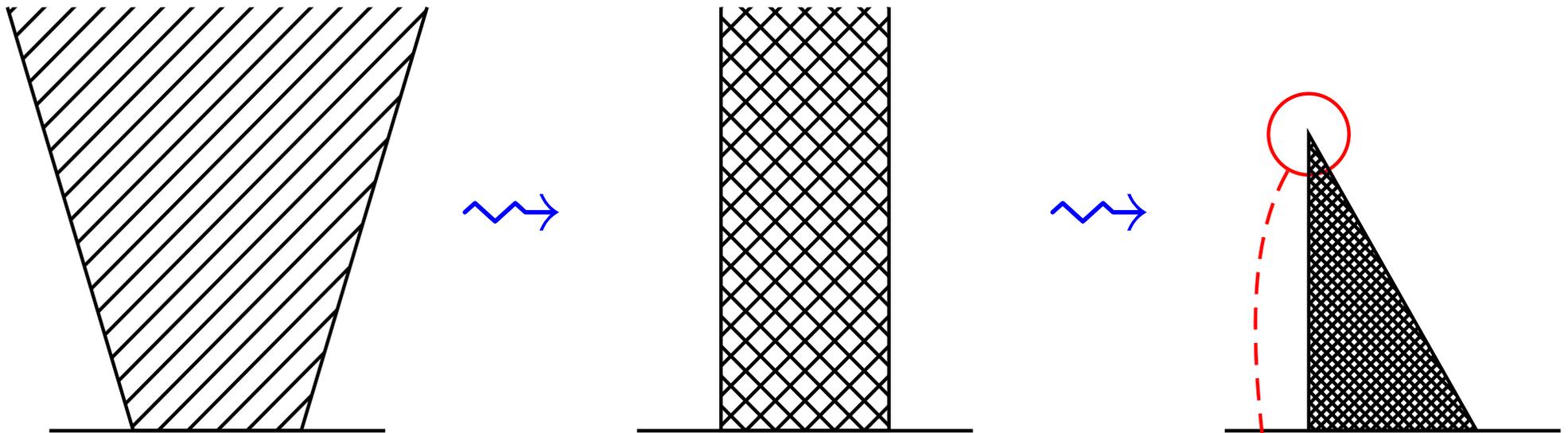




Tout calcul peut être contenu dans un triangle

L'espace et le temps sont « malléables »

Problème



Tout calcul peut être contenu dans un triangle

L'espace et le temps sont « malléables »

Problème Apparition d'un point d'accumulation

Accumulations

Apparition d'une accumulation

Instance

\mathcal{M} : machine à signaux,
 c_0 : configuration initiale finie,
(*Toutes les valeurs sont dans \mathbb{Q}*)

Question

Va-t-il y avoir une accumulation ?

$\exists (x, t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},$

Il y a au moins n collisions dans le
cône de lumière aboutissant à (x, t)

Apparition d'une accumulation

Instance

\mathcal{M} : machine à signaux,
 c_0 : configuration initiale finie,
(Toutes les valeurs sont dans \mathbb{Q})

Question

Va-t-il y avoir une accumulation ?

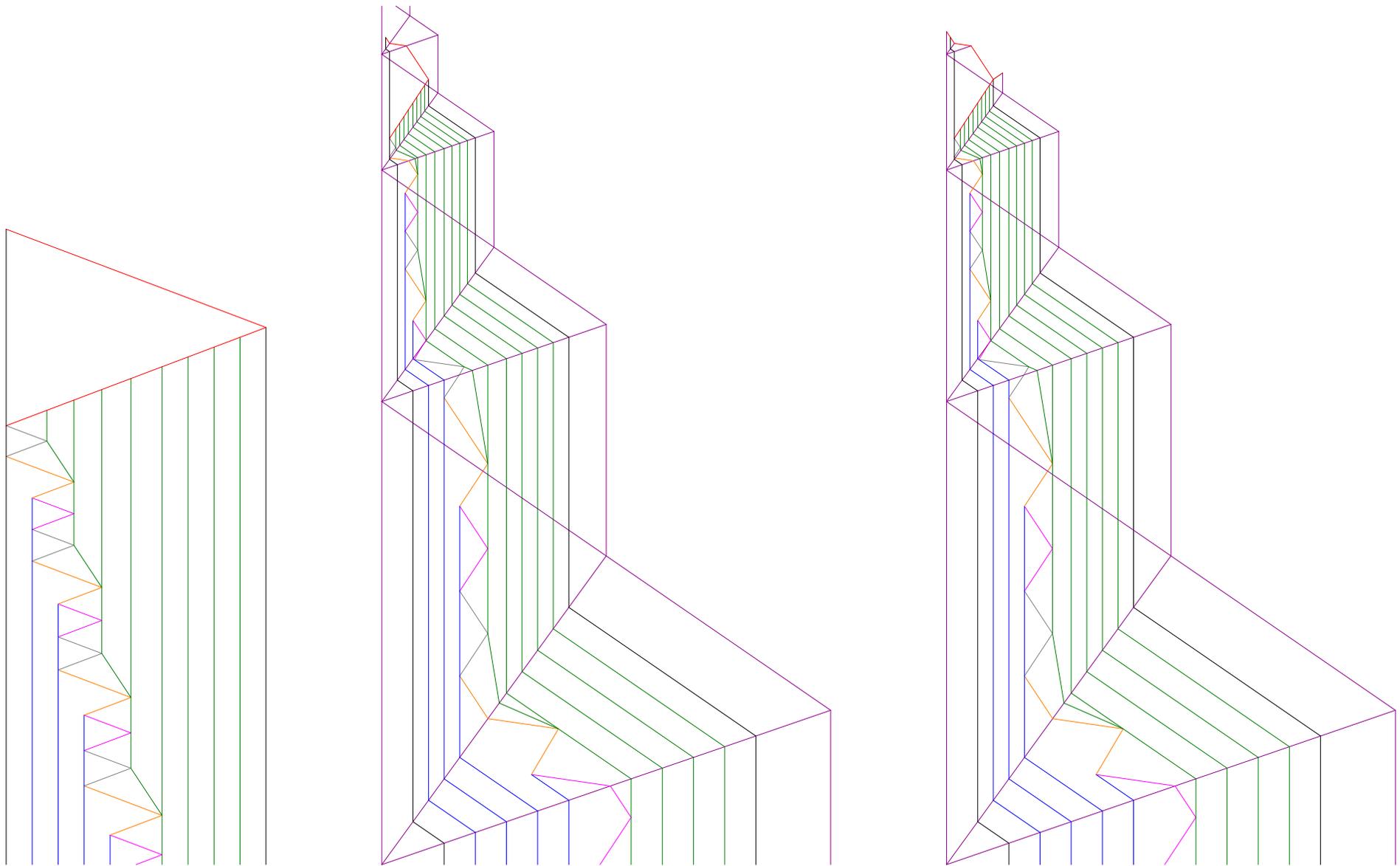
prédicat récuratif
total

$\exists (x, t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},$

Il y a au moins n collisions dans le
cône de lumière aboutissant à (x, t)

\rightsquigarrow dans Σ_2^0 (hiérarchie arithmétique)

Réduction pour Π_1^0 -difficile

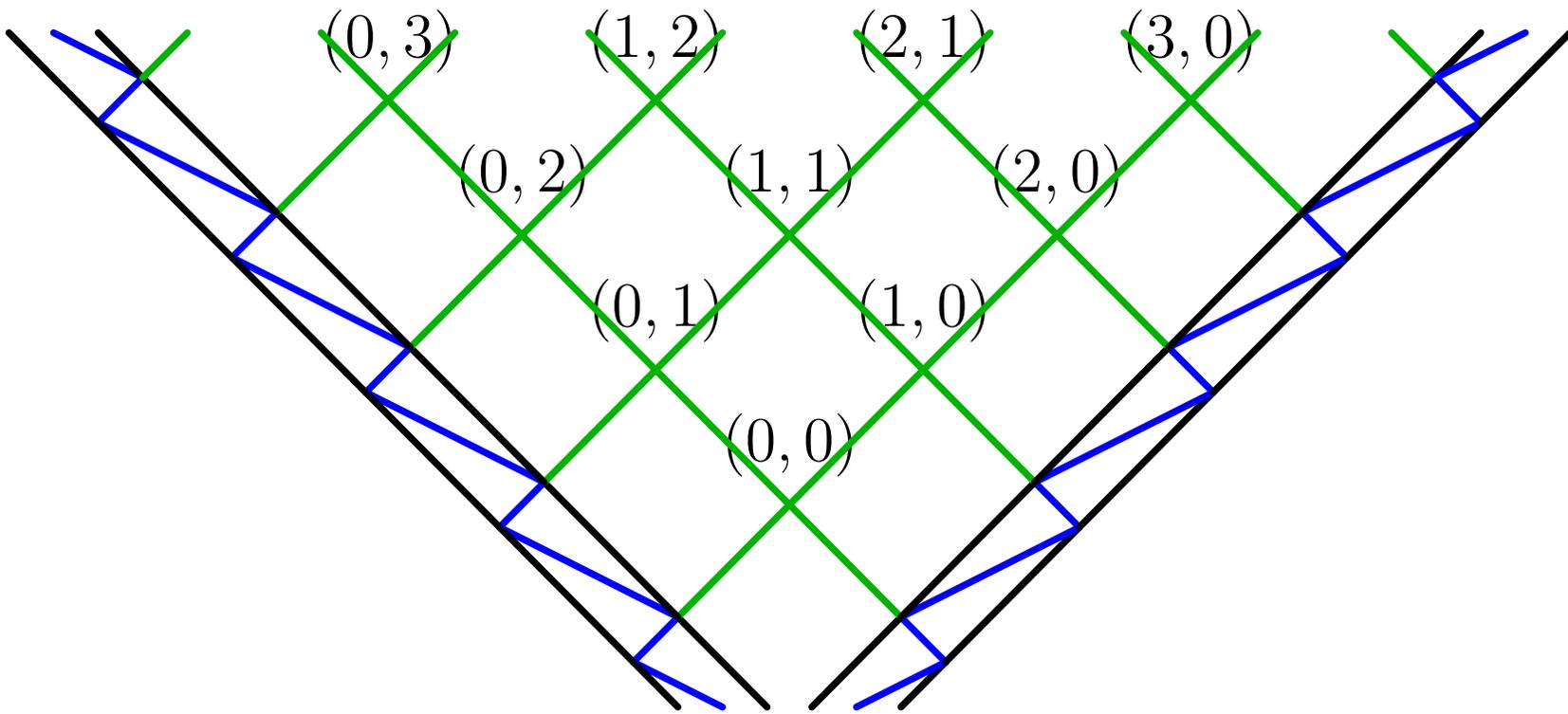


Accumulation \Leftrightarrow L'automate à deux compteurs ne s'arrête pas

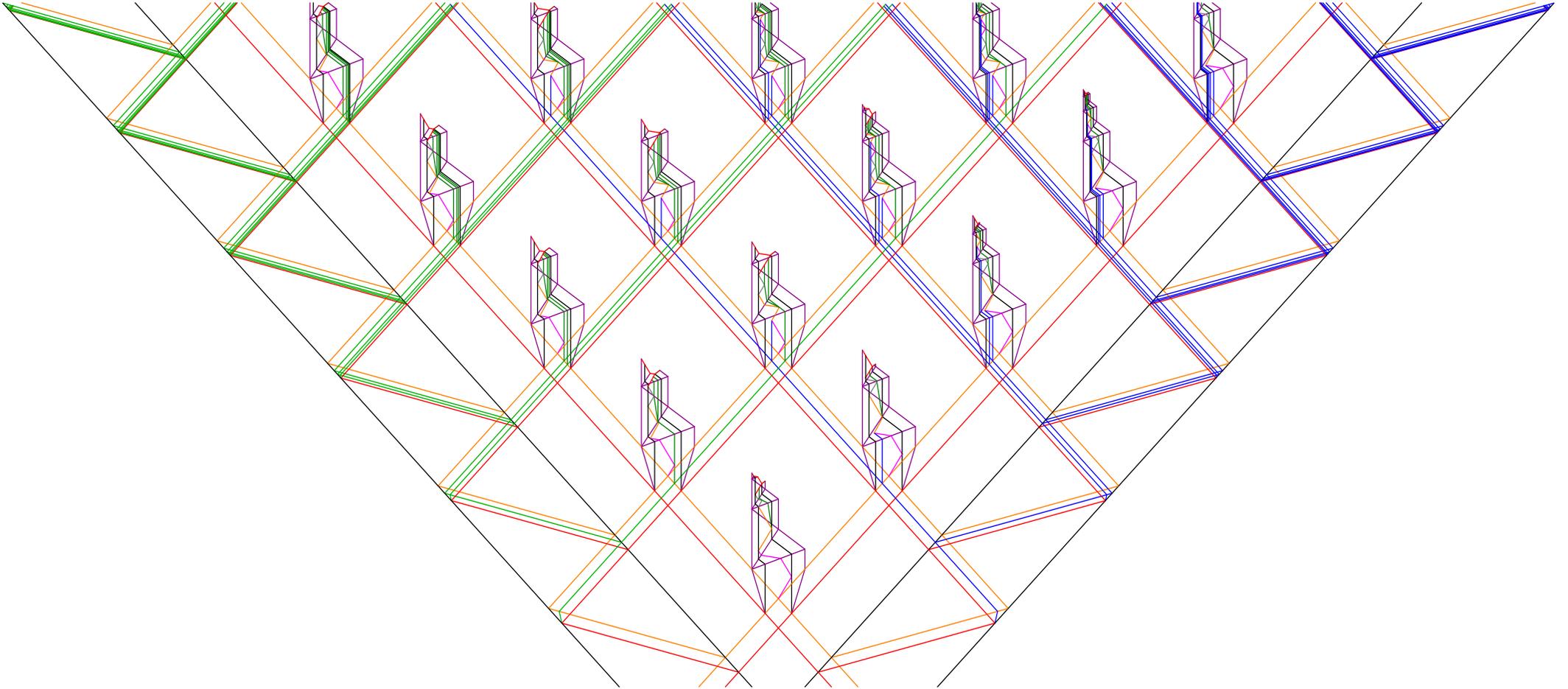
Tester toutes les calculs possibles

Σ_2^0 -complet

Instance
 \mathcal{A} : Automate à deux compteurs,
Question
Existe-t-il un calcul sans fin ?



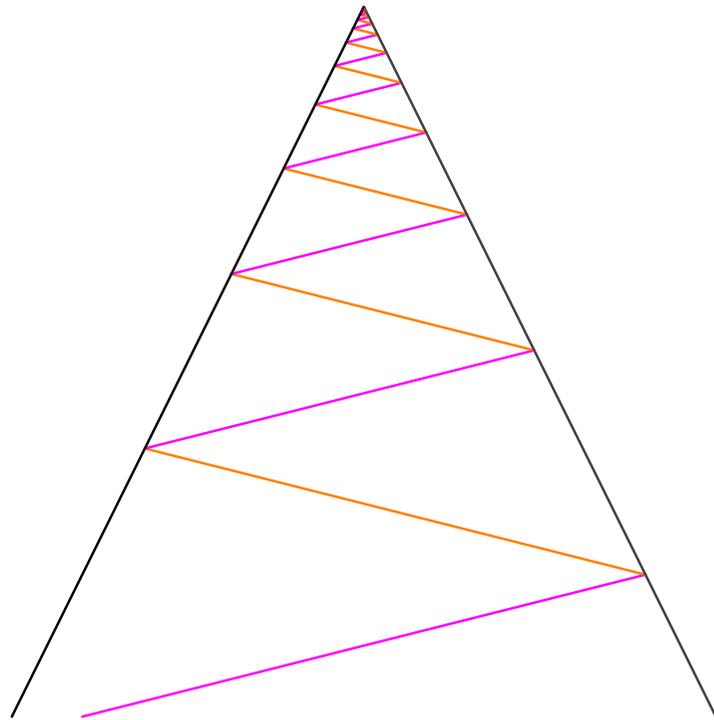
Σ_2^0 -difficile



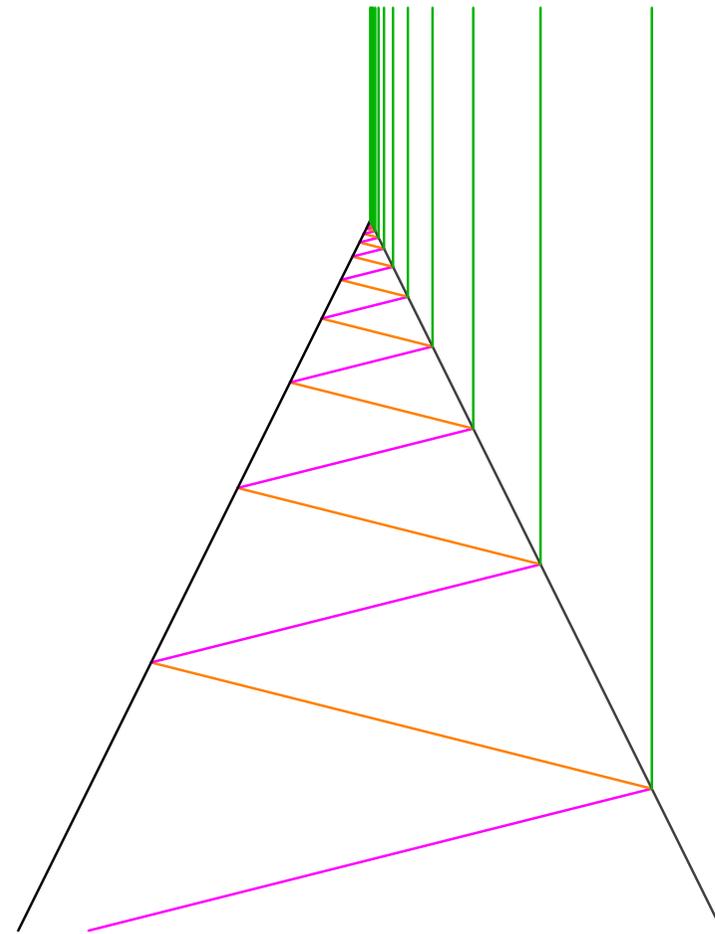
$\rightsquigarrow \Sigma_2^0$ -complet

Accumulations

Accumulations en un point

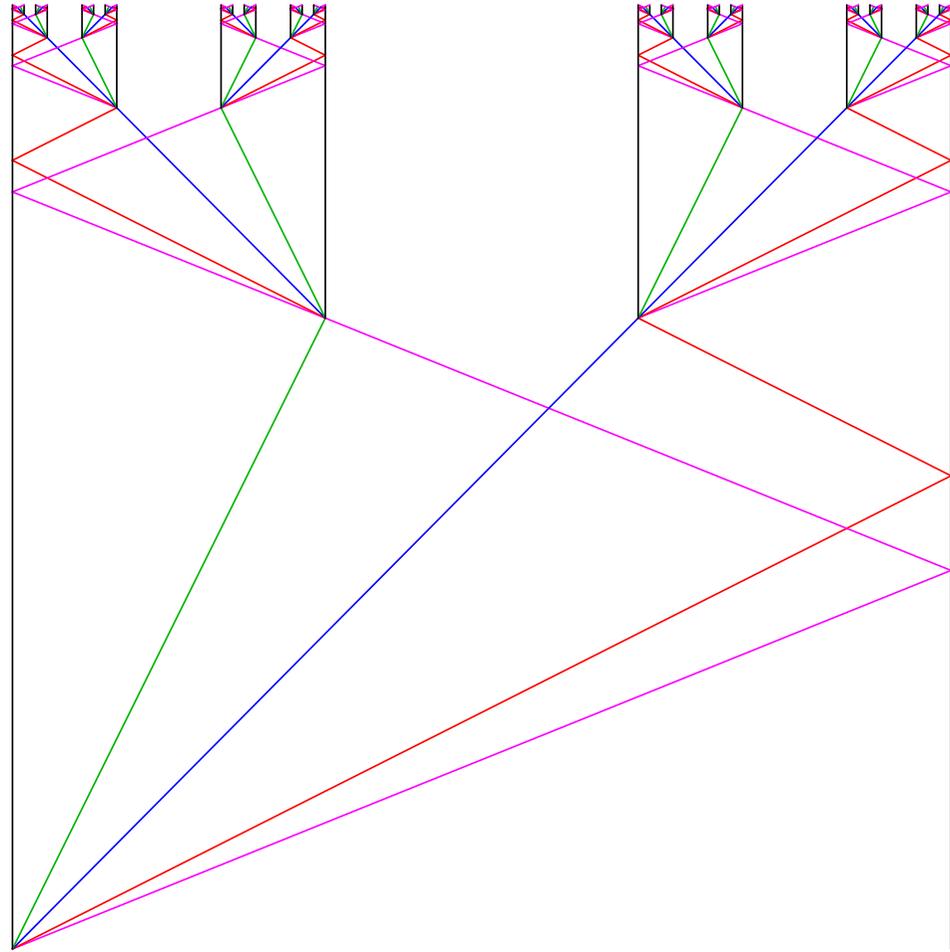
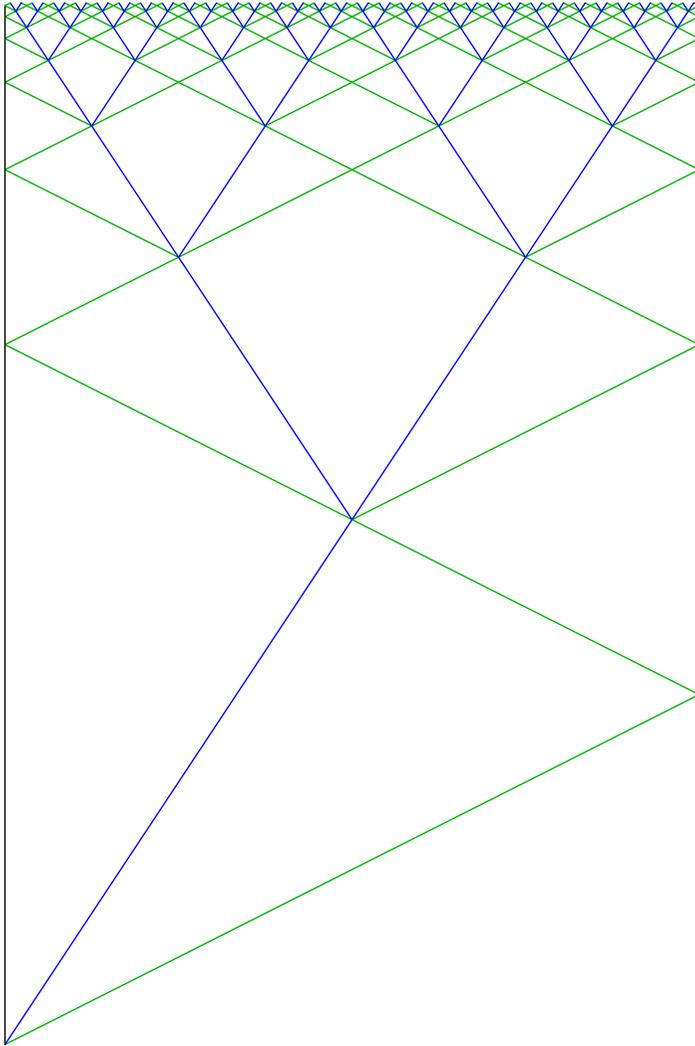


4 méta-signaux 2 règles
Seulement !



Situation gênante

Singularités non isolées

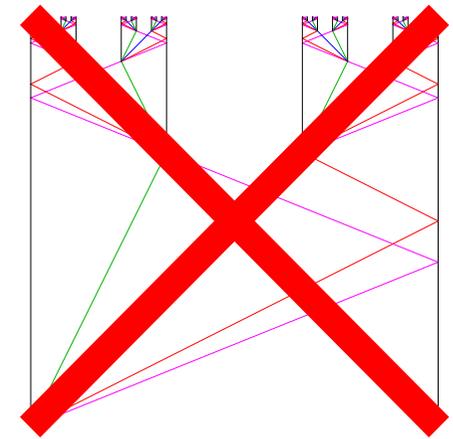
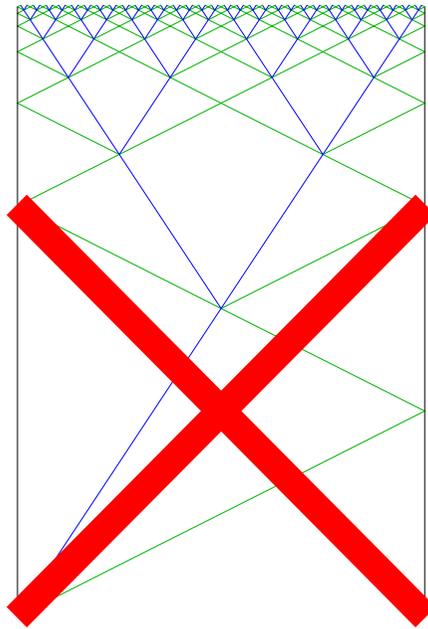
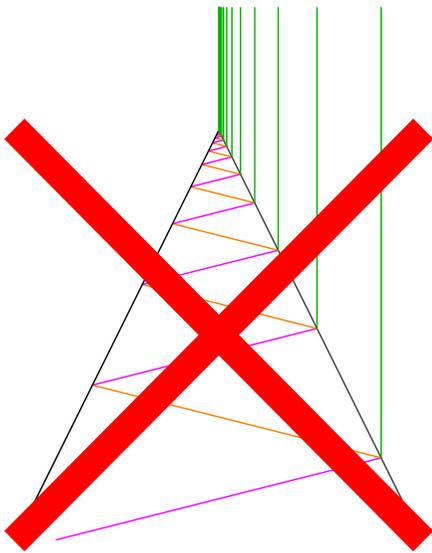


Restriction

- Énergie : $\mu \longrightarrow E(\mu) \in \mathbb{N}^*$
- $\forall \rho = \{\mu_i^-\}_i \rightarrow \{\mu_j^+\}_j, \quad \sum E(\mu_i^-) \geq \sum E(\mu_j^+)$
- $E(\text{ configuration }) = \sum E(\text{ signaux présents })$
- Énergie quantifiée et bornée
- Nombre de signaux borné

Effets

- Nombre de signaux sortant d'une accumulation fini
- Toute accumulation « consomme » de l'énergie
- Nombre de points d'accumulation fini



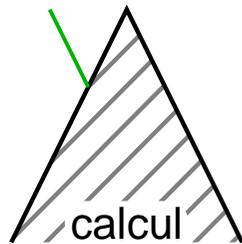
Résolution du récursivement énumérable

Nombre infini d'itérations pendant une durée finie

- On peut encore mener tout calcul au sens de Turing (codage par position)
- On peut encore insérer dans une structure contractante

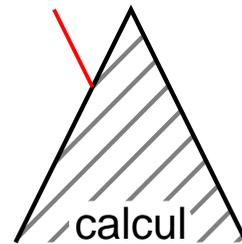
Accepte

Y

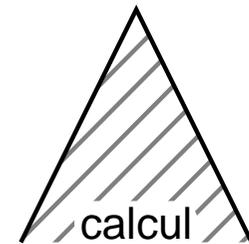


Rejette

N



Ne s'arrête pas

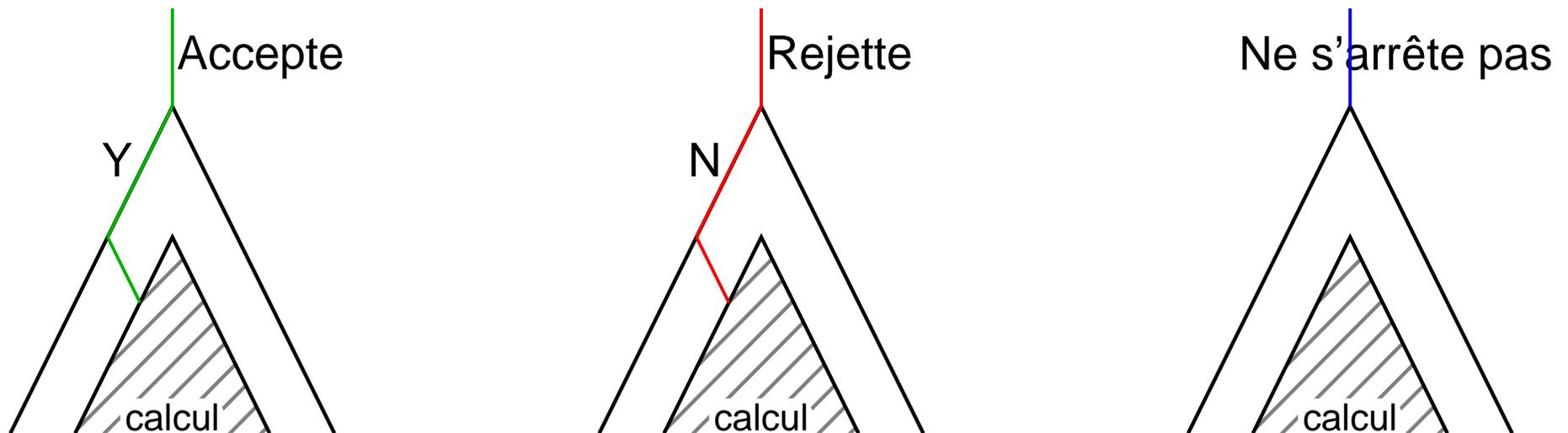


- Ajoute de quoi borner la zone d'accumulation

Résolution du récursivement énumérable

Nombre infini d'itérations pendant une durée finie

- On peut encore mener tout calcul au sens de Turing (codage par position)
- On peut encore insérer dans une structure contractante



- Ajoute de quoi borner la zone d'accumulation
- Lien modèle du trou noir

Conclusion et perspectives

Conclusion

- Modèle de calcul
 - Parallèle
 - Géométrique
 - Espace et temps continus mais valeurs finies (analogique)
 - Turing-universel
- Malléabilité de l'espace-temps
- Accumulations
 - Indécidabilité
 - Traitement partiel
 - Lien modèle du trou noir (ou sur ordinal)

Perspectives

- Positions réelles
 - Oracles quelconques
- Relier à d'autres modèles
 - Compréhension des modèles continus
 - Classes de complexité et de décidabilité continues
- Automates cellulaires
 - Discrétisation automatique
 - Théorèmes de transfert