Machines à signaux et modèles de calcul analogiques

Jérôme Durand-Lose

LABORATOIRE D'INFORMATIQUE FONDAMENTALE D'ORLEANS
Laboratoire d'Informatique Fondamentale d'Orléans,
Université d'Orléans, Orléans, FRANCE

Séminaire du LIAFA, 19 juin 2009
CNRS — Université Paris VII

Contexte

Automates cellulaires

- parallélisme massif, uniforme et synchrone
- prise en compte des contraintes spatiales
- états, cellules / espace, itérations / temps *discrets*

Contexte

Automates cellulaires

- parallélisme massif, uniforme et synchrone
- prise en compte des contraintes spatiales
- états, cellules / espace, itérations / temps *discrets*

Machines à signaux

- abstraction des AC se concentrant sur les signaux
- espace et temps *continus*

Contexte

Automates cellulaires modèle de calcul discret

- parallélisme massif, uniforme et synchrone
- prise en compte des contraintes spatiales
- états, cellules / espace, itérations / temps *discrets*

Machines à signaux modèle de calcul continue et analogique

- abstraction des AC se concentrant sur les signaux
- espace et temps *continus*

Contexte

Automates cellulaires modèle de calcul discret

- parallélisme massif, uniforme et synchrone
- prise en compte des contraintes spatiales
- états, cellules / espace, itérations / temps *discrets*

Machines à signaux modèle de calcul continue et analogique

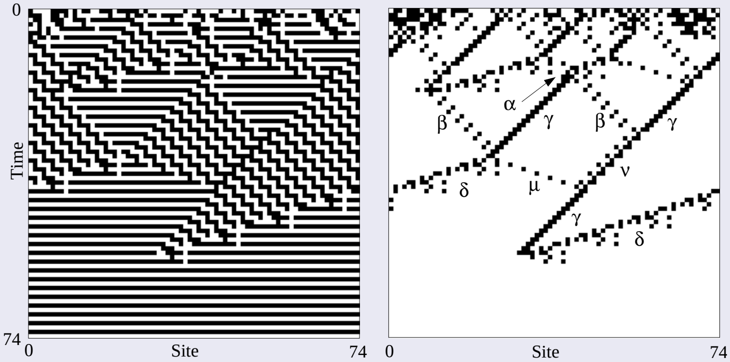
- abstraction des AC se concentrant sur les signaux
- espace et temps *continus*

Liens avec d'autres modèles analogiques

- Modèle de Blum, Shub et Smale [Durand-Lose, 2007, Durand-Lose, 2008]
- Analyse récursive [Durand-Lose, 2009]

Origine de l'approche par signaux

Automates cellulaires — analyse

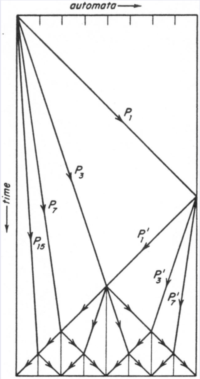


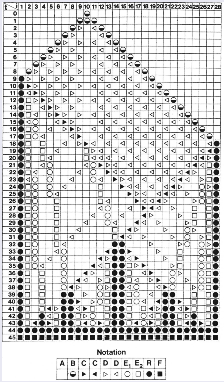
(a) Space-time diagram. (b) Filtered space-time diagram.

[Das et al., 1995, Fig. 1]

Origine de l'approche par signaux

Automates cellulaires — conception

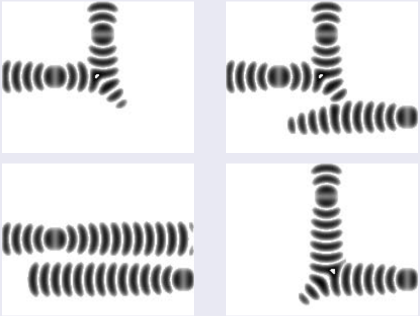




[Varshavsky et al., 1970, Fig 1 and 3]

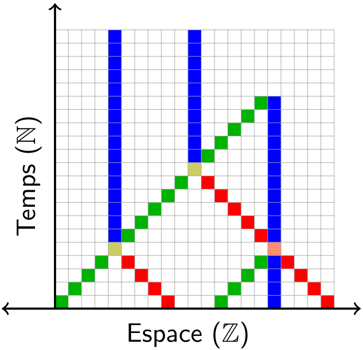
Origine de l'approche par signaux

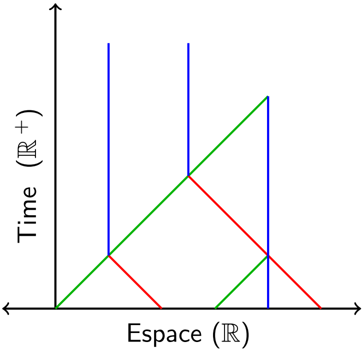
Collision based computing



©2009 A. Adamatzky

Machines à signaux : idéalisation continue

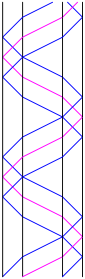


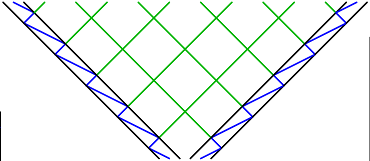


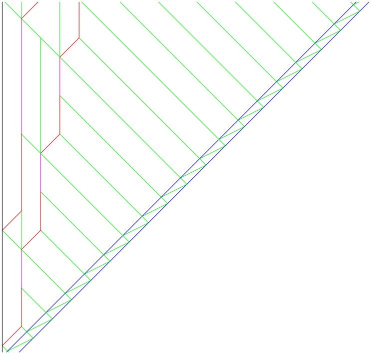
Vocabulaire

- Signal (meta-signal) même méta-signal $\rightsquigarrow$ signaux parallèles
- Collision (règle de)

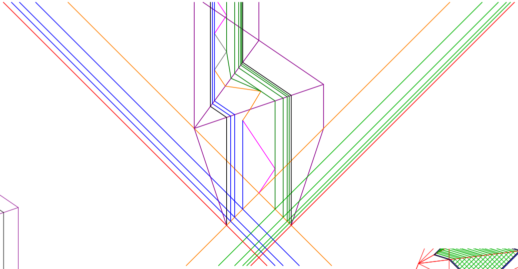
Exemples

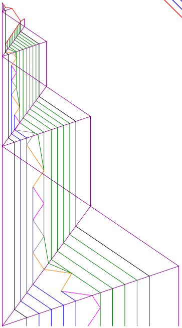


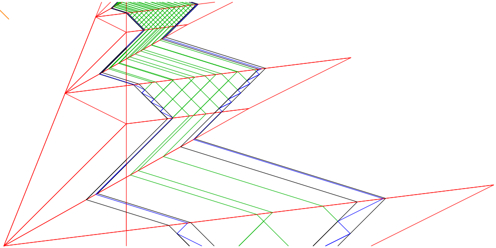




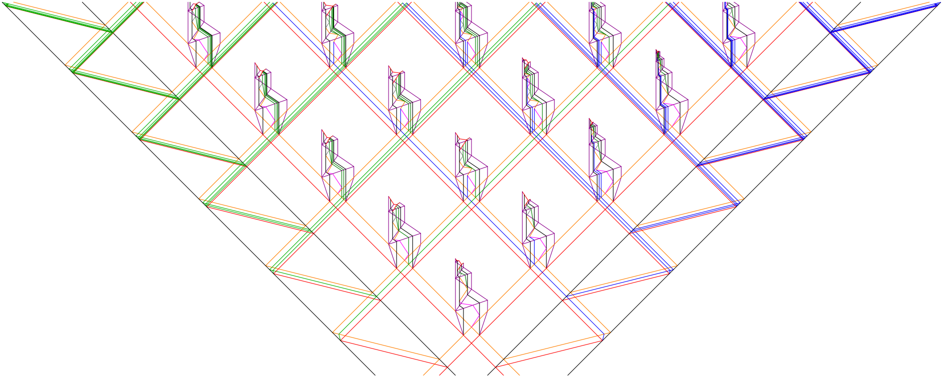
Exemples plus complexes



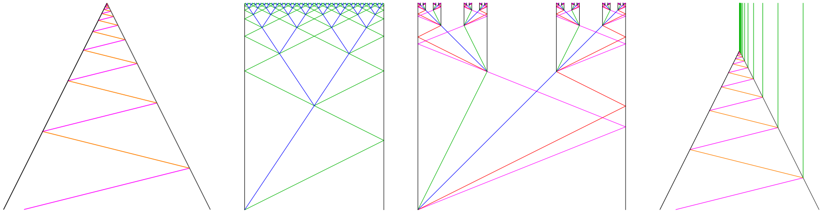




Exemple encore plus complexe



Nouveaux types de *monstres*



Qu'est-ce qu'un nombre réel ?

Qu'est-ce qu'un nombre réel ?

Un réel est un « réel », un point c'est tout !

- valeur exacte
- opérations permises selon la structure considérée
  comme anneau $+$, $-$, $\times_{ct}$, $\times$ et test sur signe
  (tout en temps 1)
- modèle de Blum, Shub and Smale
  [Blum et al., 1989, Blum et al., 1998]

Qu'est-ce qu'un nombre réel ?

Un réel est un « réel », un point c'est tout !

- valeur exacte
- opérations permises selon la structure considérée comme anneau $+$, $-$, $\times_{ct}$, $\times$ et test sur signe (tout en temps 1)
- modèle de Blum, Shub and Smale [Blum et al., 1989, Blum et al., 1998]

Une classe d'équivalence des suites de Cauchy rationnelles

- suite infinie de rationnels => mot infini
- préfixe fini => approximation
- valeur exacte / représentation complète en temps infini
- analyse récursive, machines de Turing de type 2, *computable analysis* [Weihrauch, 2000]

Modèles incomparables !

BSS

- peut calculer le signe
- mais pas l'exponentielle

Analyse récursive

- peut calculer l'exponentielle
- ne peut calculer que des fonctions continues

Modèles incomparables !

BSS

- peut calculer le signe
- mais pas l'exponentielle

Analyse récursive

- peut calculer l'exponentielle
- ne peut calculer que des fonctions continues

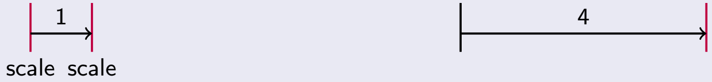
Autres modèles ?

Oui, beaucoup, rarement comparables

pas de thèse de Turing analogique

Représentation

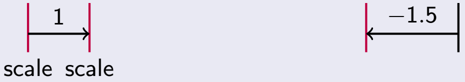
(approche BBS)



Valeur : 4

Représentation

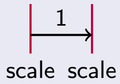
(approche BBS)

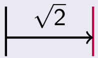


Valeur : -1.5

Représentation

(approche BBS)

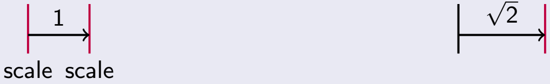




Valeur : $\sqrt{2}$

Représentation

(approche BBS)



Valeur : $\sqrt{2}$

Signe. . .

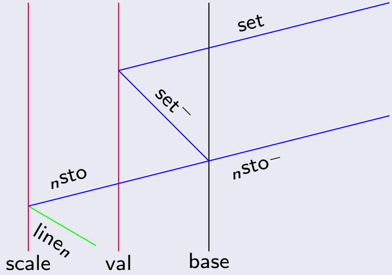
. . . en fonction du premier signal rencontré

Autres fonctions ?

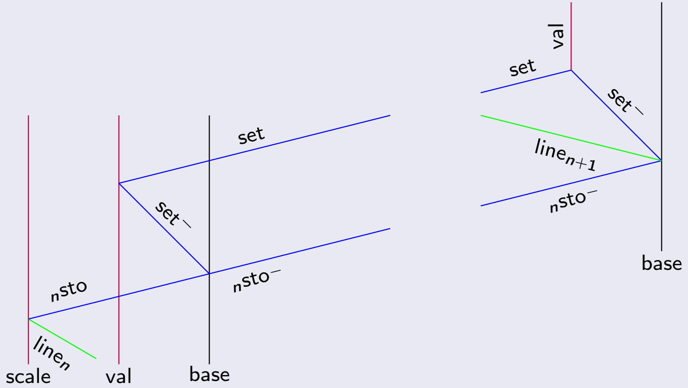
Concentration sur le calcul sur les réels

$\rightsquigarrow$ on passe sur la gestion des variables et autres « détails »

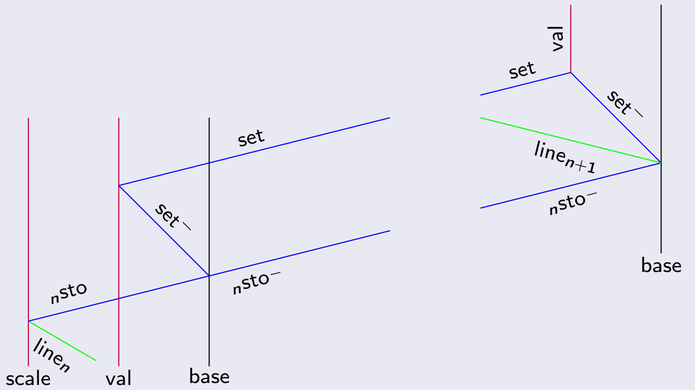
Copier une valeur



Copier une valeur



Copier une valeur

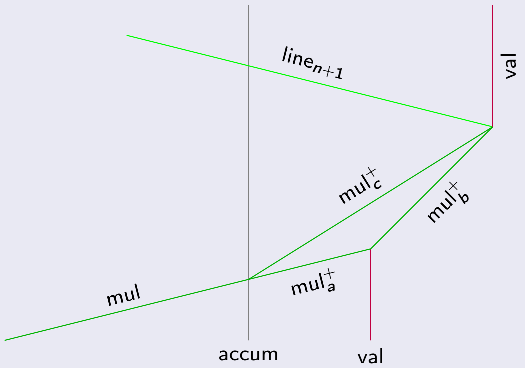


L'addition se fait. . .

. . . en ajoutant à val et non à base

Multiplication par une constante (externe)

Par exemple, par 2



Lien avec BSS linéaire

Théorème [Durand-Lose, 2007]

SM et lin-BSS ont la même puissance de calcul

- en l'absence de toute accumulation

(autre sens non présenté)

Lien avec BSS linéaire

Théorème [Durand-Lose, 2007]

SM et lin-BSS ont la même puissance de calcul

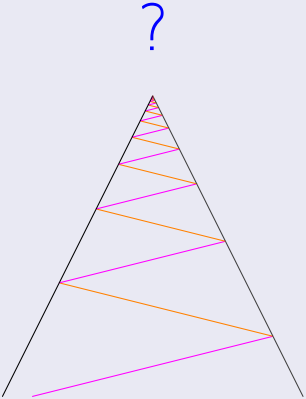
- en l'absence de toute accumulation

(autre sens non présenté)

Et la multiplication interne ?

- impossible sans accumulation
- ¿ accumulation ?
- ¿ et ensuite ?

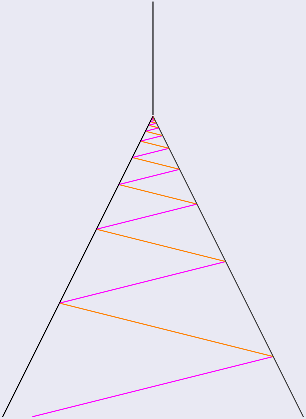
Accumulation simple ?



Simple

Isolée

Accumulation simple ?



Simple

Isolée

$\rightsquigarrow$ remplacée par un signal

Schéma de multiplication

$$0 < y < 1 \quad \begin{cases} y = 0.\mathrm{y}_1\mathrm{y}_2\mathrm{y}_3\dots \\ xy = \sum_{0<i} \mathrm{y}_i \left(\frac{x}{2^i}\right) \end{cases}$$

$$1 \leq y \qquad yx = \left(x2^k\right)\left(\frac{y}{2^k}\right) \text{ avec } 0 < \frac{y}{2^k} < 1$$

Zéros et signes se traitent facilement

Récurrence

$$p_n = \sum_{0<i<n} y_i \left(\frac{x}{2^i}\right)$$

$$x_n = \frac{x}{2^n}$$

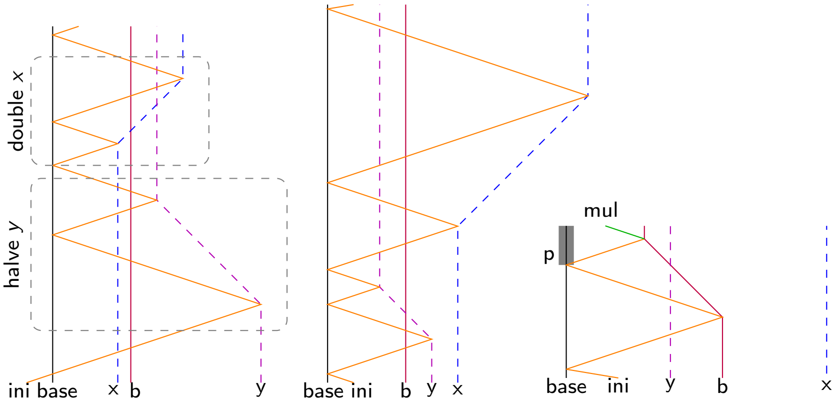
$$y_n = 0.00\ldots0 y_n y_{n+1} y_{n+2} \cdots$$

$$b_n = \frac{1}{2^n}$$

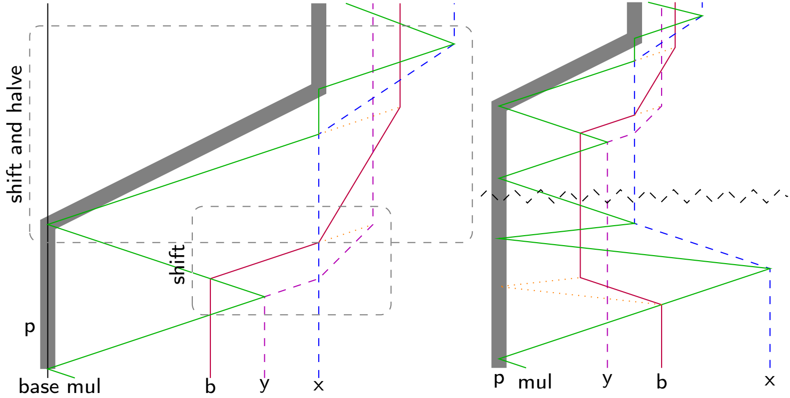
Valeurs suivantes se calculent avec test, somme et division par 2 (multiplication par la constante $\frac{1}{2}$)

- $p_n \to xy$ donc accumulation sur cette limite
- Toutes les autres $\to 0$ et tant mieux !

Normalisation (pour assurer $0 < y < 1$)



Boucle infinie



Analyse récursive

Codage utilisé : *binaire signé*

$$\begin{array}{ccc} \{\bar{1},0,1\}^{*}\bullet\{\bar{1},0,1\}^{\omega} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n_0\bullet d_1 d_2 d_3 \dots d_n \dots & \longmapsto & \nu_{\mathrm{sb}}(n_0) + \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{d_i}{2^i} \end{array}$$

Problème : infinité de signaux

- garder la même représentation
- convertir en un « convoi »
- manipuler et faire un nombre infini d'itérations à une machine de Turing
- reconvertir

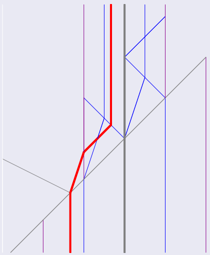
Extraction d'un bit

Extraction de bit signé à la demande

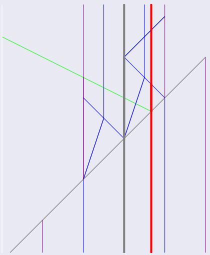
...il va y avoir beaucoup de demandes...

Structure vide

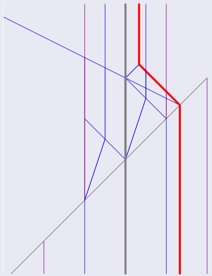
$-1 < \varepsilon < -\frac{1}{2}$



$-\frac{1}{2} < \varepsilon < \frac{1}{2}$



$\frac{1}{2} < \varepsilon < 1$



Voulez-vous une animation ?

Simulation d'une machine de Turing dans un espace fini

Calcul d'une MT

b b c a $\overset{q_1}{\#}$

b b c $\overset{q_1}{\#}$

b b $\overset{q_1}{\text{b}}$ #

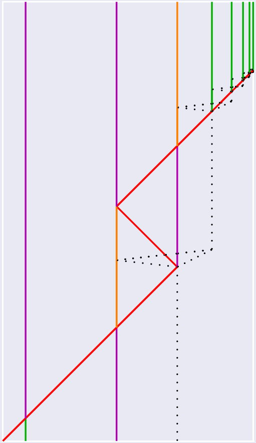
b $\overset{q_1}{\text{c}}$ b #

b c $\overset{q_0}{\#}$

b $\overset{q_0}{\text{b}}$

$\overset{q_0}{\text{a}}$ b

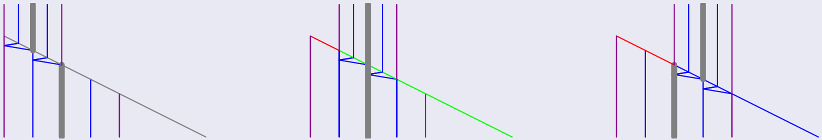
Simulation



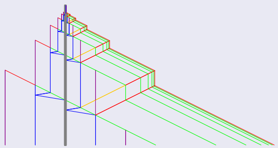
Connexion en mode approximation

- Un signal sort pour demander un bit supplémentaire de l'entrée
- Un signal est envoyé pour préciser la sortie

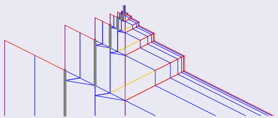
Ajouter un bit au résultat, améliorer la précision



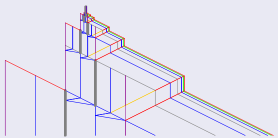
000000



111111

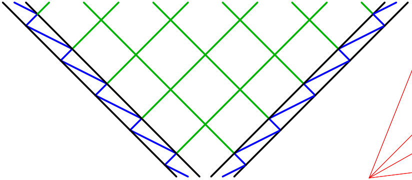


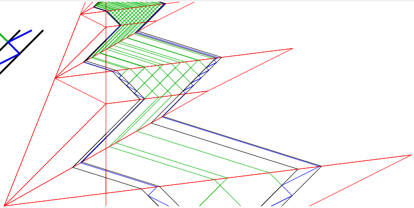
$1\bar{1}1\bar{1}10$



Tout faire en temps fini

Opérateurs permettant de contracter l'espace et le temps tout en gardant des rapports exacts (lien modèle du trou noir)



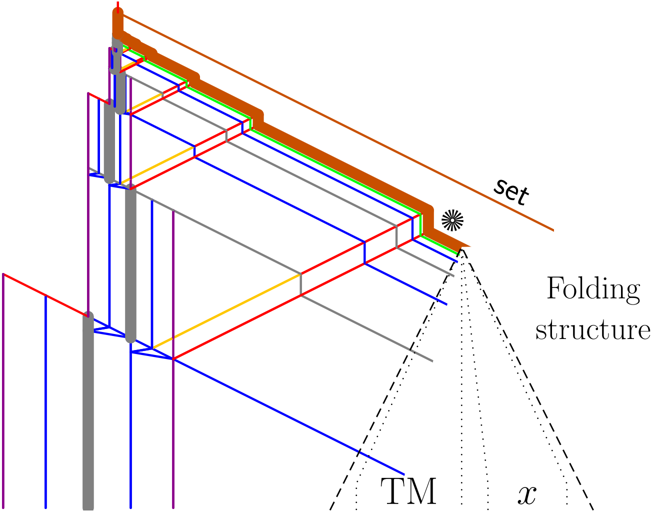


- Entrées : à l'intérieur de la contraction, aucun problème
- Sortie : de plus en plus de signaux $\rightsquigarrow$ création d'un *convoi*

Limite du convoi : accumulation non isolée

toujours présente ne se transformant pas en signal
$\rightsquigarrow$ barrière infranchissable

Schéma global



Liens avec d'autres modèles

- Modèles totalement simulés / implanté / émulé
  - modèle de Blum, Shub and Smale
  - analyse récursive
- (à faire) *Caractériser la puissance analytique* avec des accumulations simples

À faire

- Discrétisation automatique vers un AC
- Explorer les fractales engendrables
- Étudier les complexités (et liens avec les classes habituelles)

Allocation fléchée « thèmes scientifiques prioritaires »

Modèle géométrique du calcul : fractales et barrières de complexité
http://www.univ-orleans.fr/ed/st/alloc2009/pdf/Durand-Lose.pdf

Merci de votre attention