

Machines à signaux, analyse récursive et lieux des points d'accumulation

Jérôme Durand-Lose



Laboratoire d'Informatique Fondamentale d'Orléans,
Université d'Orléans, Orléans, FRANCE



MC2, LIP, Lyon — 19 mai 2011

- 1 Des automates cellulaires aux machines à signaux
- 2 Analyse récursive / computable analysis et implatation
- 3 Forcément *c.e.* et *d-c.e.*
- 4 Atteindre tout *c.e.* et *d-c.e.*
- 5 Conclusion

- 1 Des automates cellulaires aux machines à signaux
- 2 Analyse récursive / computable analysis et implatation
- 3 Forcément *c.e.* et *d-c.e.*
- 4 Atteindre tout *c.e.* et *d-c.e.*
- 5 Conclusion

Explicitation de dynamique par des signaux

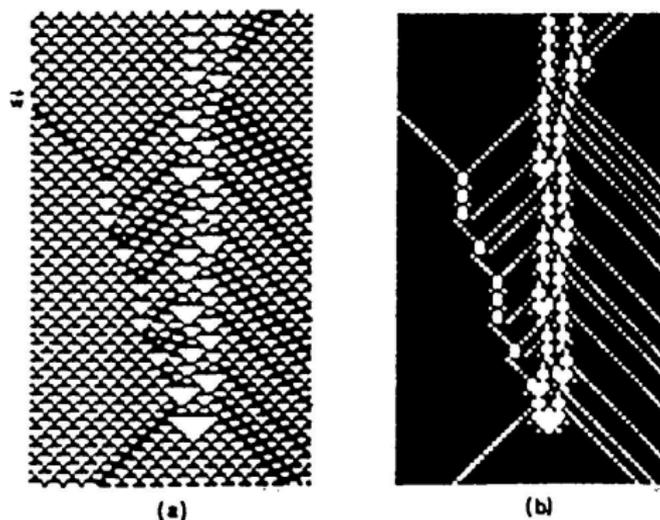
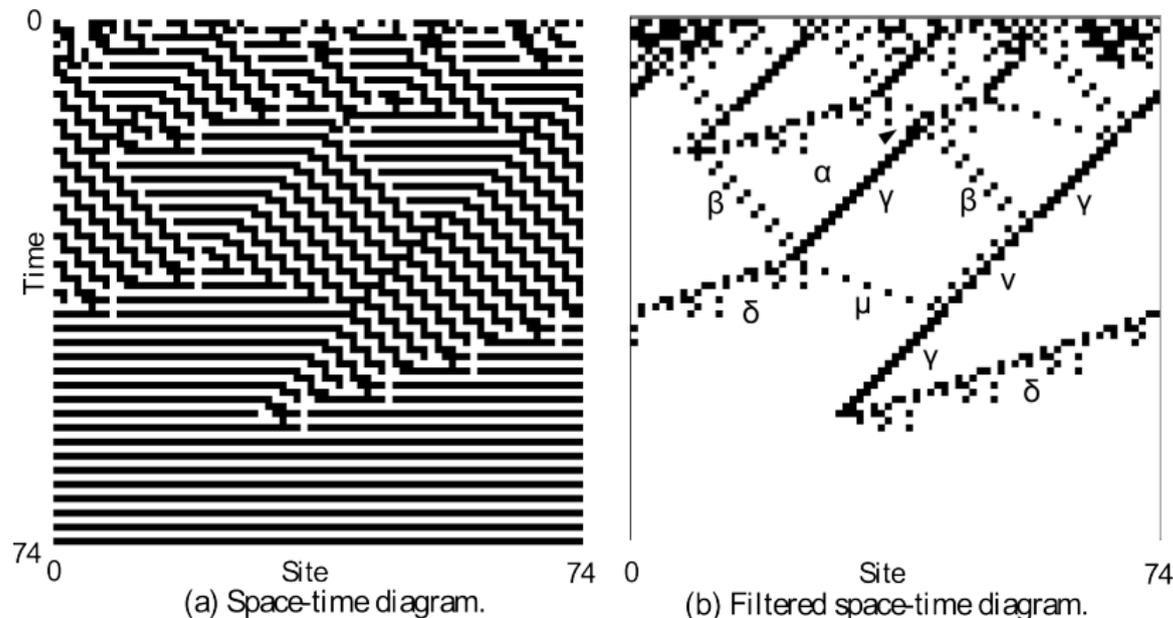


FIG. 7. Rule 54. (a) Annihilation of the radiating particle. (b) The same as (a) with the mapping defined in Fig. 6.

[Boccaro et al., 1991, Fig. 7]

Explicitation de dynamique par des signaux



[Das, Crutchfield, Mitchell 95]

Conception avec signaux

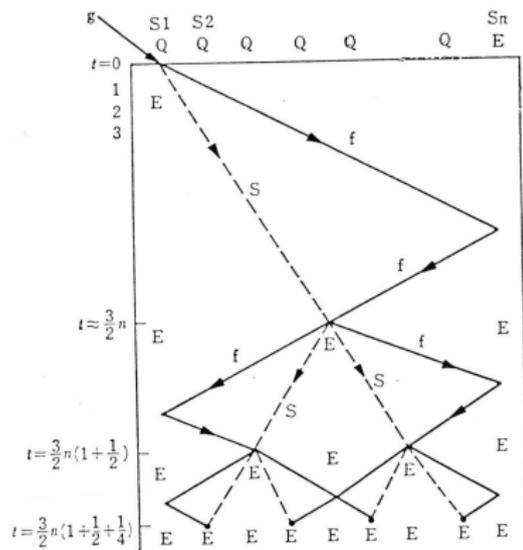


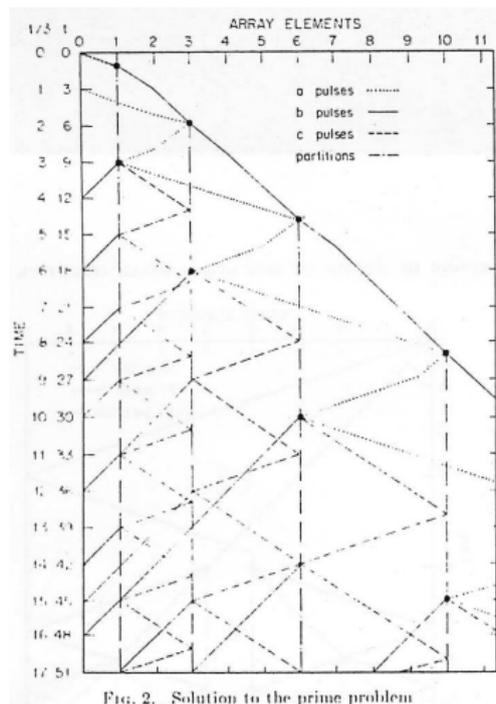
図 3-5 一斉射撃の問題 (連続近似)

G	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
8	Q	Q	Q	Q	Q	E
$t=0$	$f's'Ef_0$	Q	Q	Q	Q	E
1	E	Q2f	Q	Q	Q	E
2	E	Q1	Qf	Q	Q	E
3	E	Q&	Q	Qf	Q	E
4	E	Q	Q2	Q	Qf	E
5	E	Q	Q1	Q	Q	$f'Ef$
6	E	Q	QS	Q	$f'Q$	E
7	E	Q	Q	$s'Q'$	Q	E
8	E	Q	$f'S'ESf$	$f's'Esf$	Q	E
9	E	$f'2Q$	E	E	$Q2f$	E
10	$f'Ef$	1Q	E	E	Q1	$f'Ef$
11	E	$f'S'ESf$	E	E	$f's'Esf$	E
12	$s'Ea$	E	$s'Ea$	$s'Ea$	E	$s'Ea$
13	F	F	F	F	F	F

図 3-6 一斉射撃解 (n=6)

Solution de Goto au problème de synchronisation de fusiliers
[Goto, 1966]

Conception avec signaux



Génération des nombres premiers [Fischer, 1965, Fig. 2]

Conception avec signaux

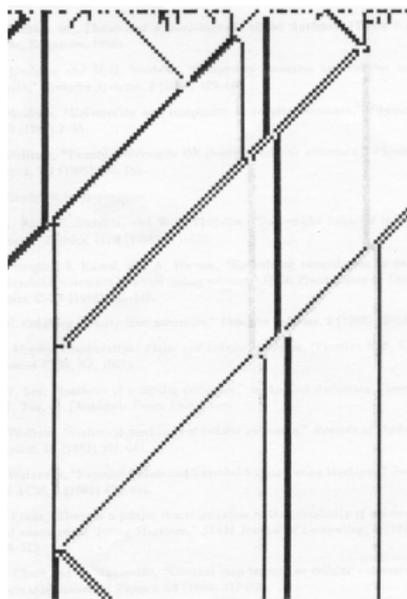


Figure 4: The $k = 4$, $r = 2$ universal cellular automaton of table 4 simulated starting from a random initial state. The symbols 0, 1, \cup , and \vdash are represented by 

Simulation d'une machine de Turing
[Lindgren and Nordahl, 1990, Fig. 4]

Système de programmation à base de signaux discrets

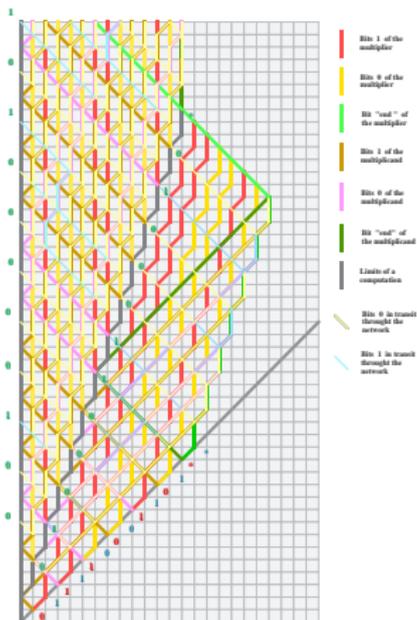


Figure 8: Computing $(n,k)^2$.

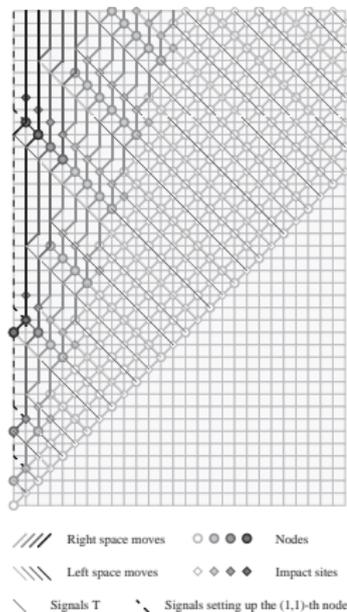


Figure 9: Setting up an infinite family of regular safe grids (the darkness of the grid indicates its rank).

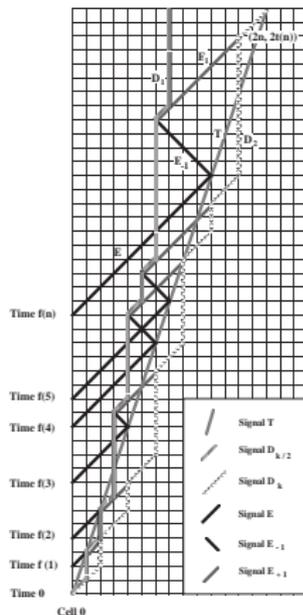
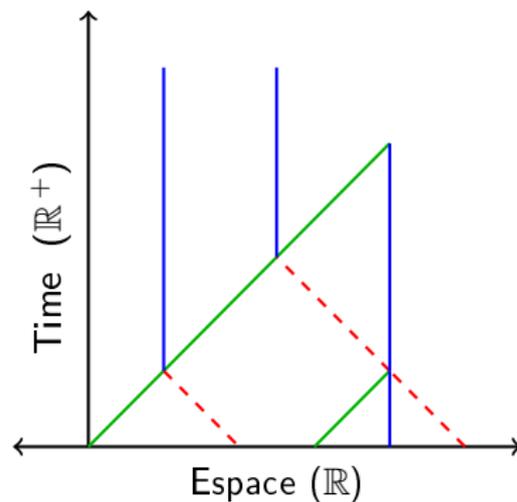
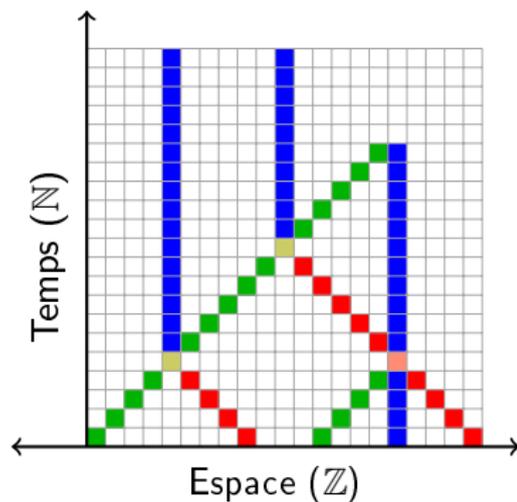


Figure 18: Characterization of the sites $(n, f(n))$.

[Mazoyer, 1996, Fig. 8 and 19] and [Mazoyer and Terrier, 1999, Fig. 18]

Abstraction de la *discrétude*



Vocabulaire

- Signal (méta-signal)
- Collision (règle)

Exemple : trouver le milieu

Méta-signaux, vitesse

$$M, S(M) = 0$$

M |

M |

Règles de collision

Exemple : trouver le milieu



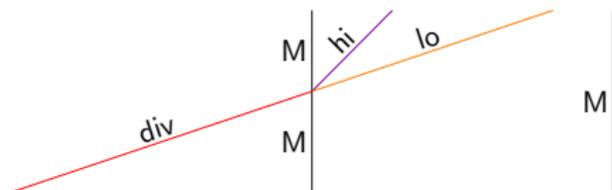
Méta-signaux, vitesse

$$M, S(M) = 0$$

$$\text{div}, S(\text{div}) = 3$$

Règles de collision

Exemple : trouver le milieu



Méta-signaux, vitesse

$$M, S(M) = 0$$

$$\text{div}, S(\text{div}) = 3$$

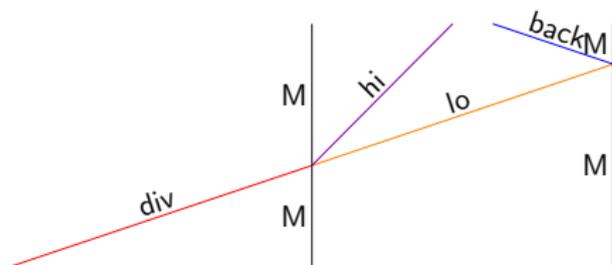
$$\text{hi}, S(\text{hi}) = 1$$

$$\text{lo}, S(\text{lo}) = 3$$

Règles de collision

$$\{ \text{div}, M \} \rightarrow \{ M, \text{hi}, \text{lo} \}$$

Exemple : trouver le milieu



Méta-signaux, vitesse

$$M, S(M) = 0$$

$$\text{div}, S(\text{div}) = 3$$

$$\text{hi}, S(\text{hi}) = 1$$

$$\text{lo}, S(\text{lo}) = 3$$

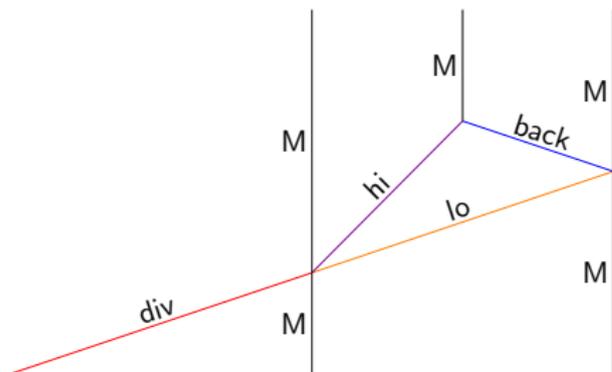
$$\text{back}, S(\text{back}) = -3$$

Règles de collision

$$\{ \text{div}, M \} \rightarrow \{ M, \text{hi}, \text{lo} \}$$

$$\{ \text{lo}, M \} \rightarrow \{ \text{back}, M \}$$

Exemple : trouver le milieu



Méta-signaux, vitesse

$$M, S(M) = 0$$

$$\text{div}, S(\text{div}) = 3$$

$$\text{hi}, S(\text{hi}) = 1$$

$$\text{lo}, S(\text{lo}) = 3$$

$$\text{back}, S(\text{back}) = -3$$

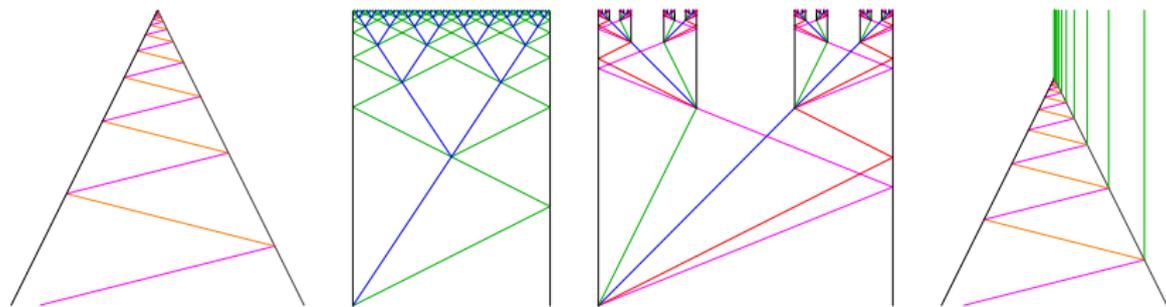
Règles de collision

$$\{ \text{div}, M \} \rightarrow \{ M, \text{hi}, \text{lo} \}$$

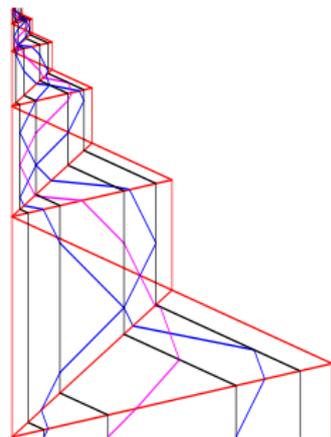
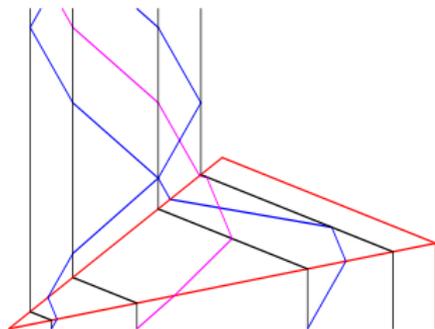
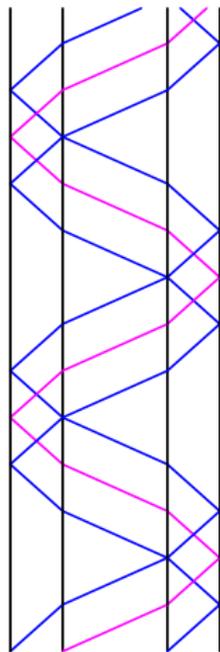
$$\{ \text{lo}, M \} \rightarrow \{ \text{back}, M \}$$

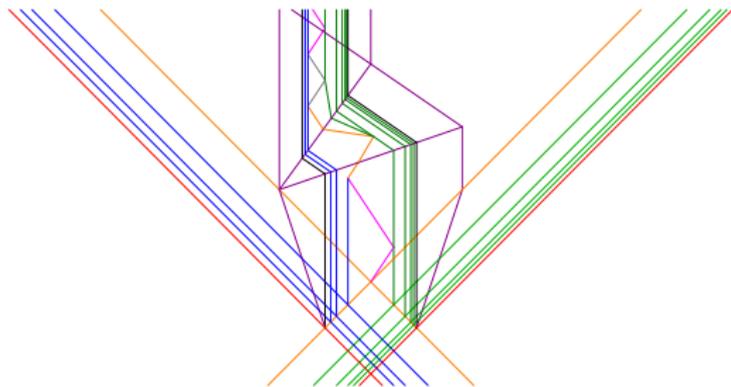
$$\{ \text{hi}, \text{back} \} \rightarrow \{ M \}$$

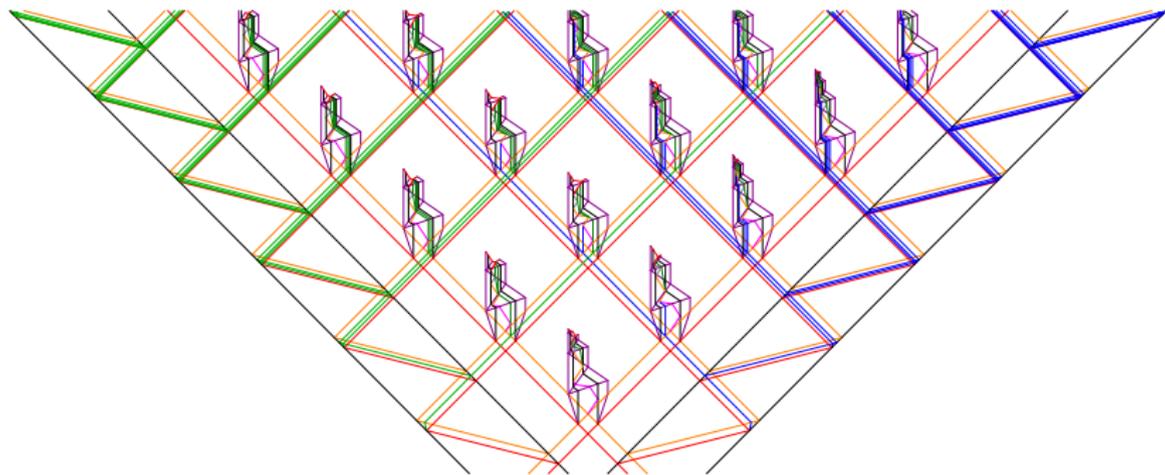
Nouveau type de *monstres*



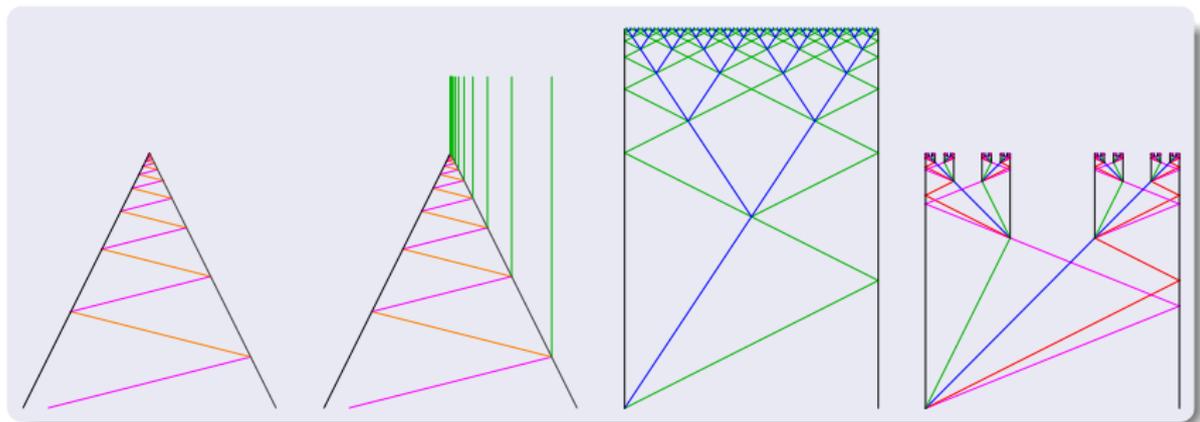
Réduire et borner le temps





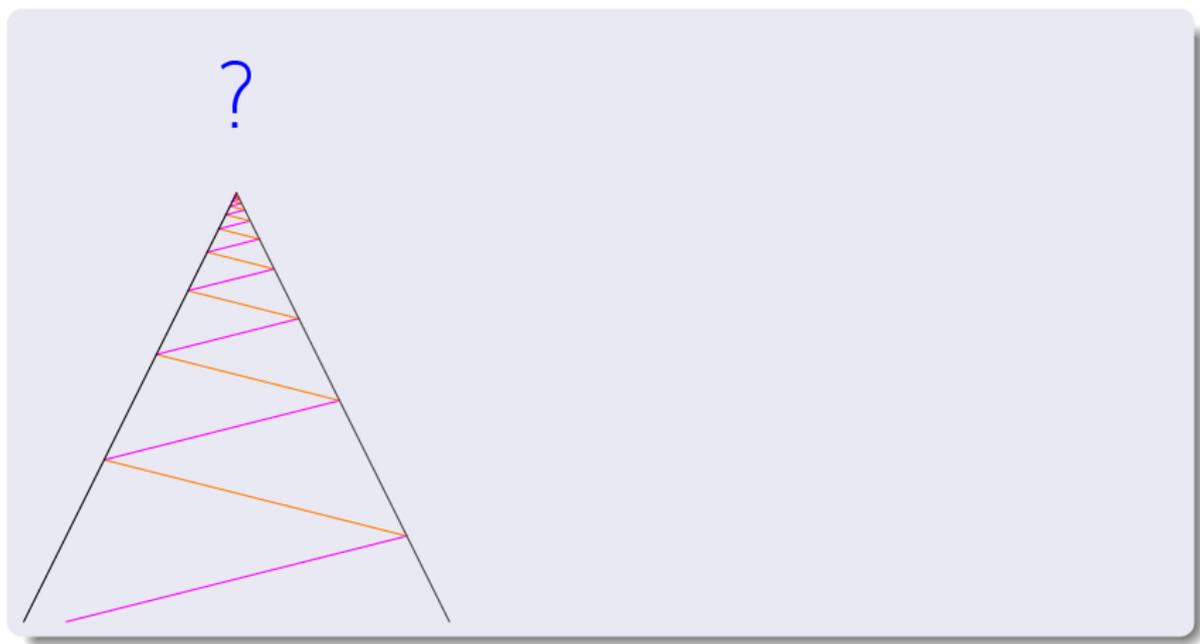


Exemples problématiques

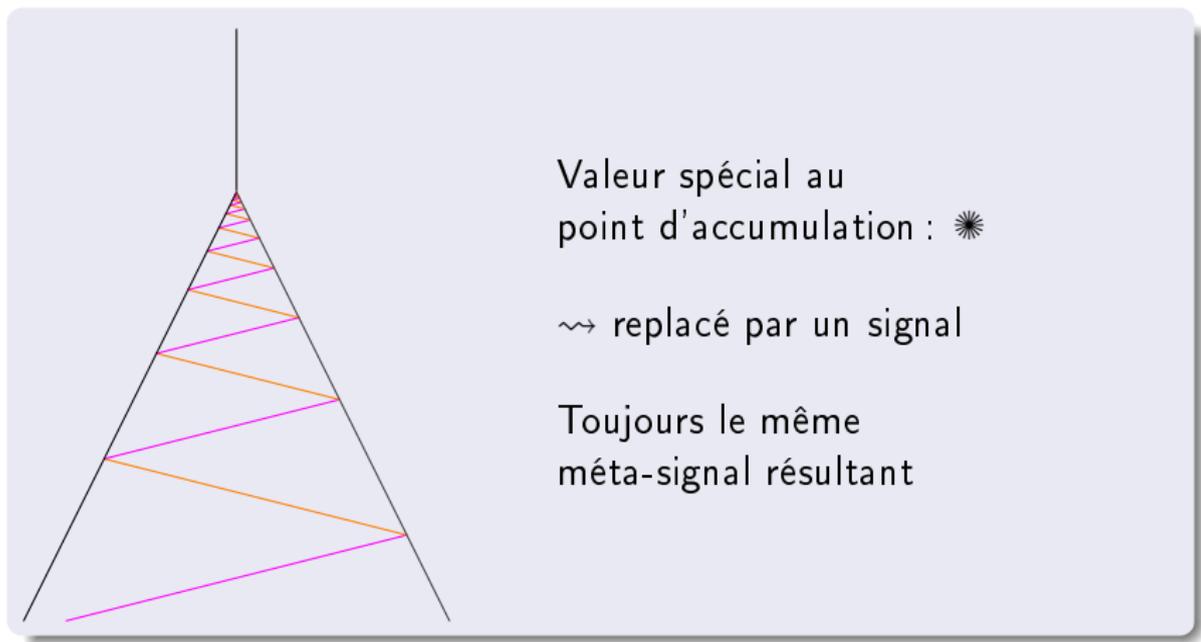


↪ *Machines à signaux étendues*

Accumulations "isolées"



Accumulations "isolées"

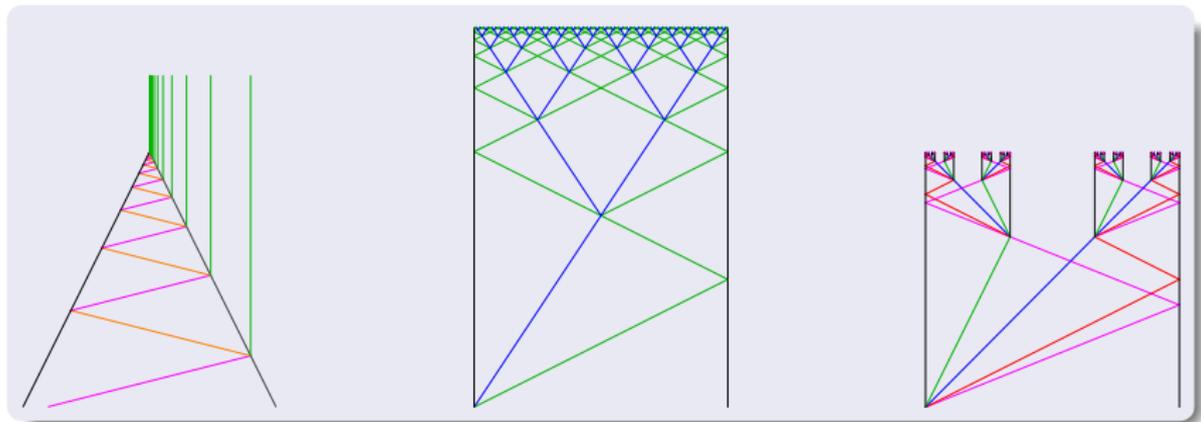


Valeur spécial au
point d'accumulation : *

↪ remplacé par un signal

Toujours le même
méta-signal résultant

Autres accumulations



❄ aux points d'accumulation non isolées

Rien n'émerge de ❄

- 1 Des automates cellulaires aux machines à signaux
- 2 Analyse récursive / computable analysis et implatation
- 3 Forcément *c.e.* et *d-c.e.*
- 4 Atteindre tout *c.e.* et *d-c.e.*
- 5 Conclusion

Principe

Brique de base

- Rationnel + précision \Rightarrow Rationnel + précision
 - moyen de calcul classique
-
- fonction « continue »

Représentation des nombres réels

Machines de Turing de type 2

- suite infinie d'approximation convergente
- représenté comme un mot infini
plus le préfixe est long meilleure est l'approximation

Représentation binaire Signée [Weihrach, 2000, Def. 7.2.4 p.206]

$$\{\bar{1}, 0, 1\}^* \bullet \{\bar{1}, 0, 1\}^\omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n_k n_{k-1} \dots n_0 \bullet d_1 d_2 d_3 \dots d_n \dots \longmapsto \sum_{0 \leq i \leq k} n_i \cdot 2^i + \sum_{1 \leq i} \frac{d_i}{2^i}$$

Retour aux machines à signaux / AGC

Problème: infinité de signaux

- répartis sur la ligne *ou*
- il y a déjà un point d'accumulation

Nombre fini de signaux

- entier: $n_k n_{k-1} \dots n_0$ représenté par $k + 1$ signaux
- reste: ε in $[-1, 1]_{\mathbb{R}}$ représenté par deux signaux parallèles

leur distance est $\sum_{1 \leq i} \frac{d_i}{2^i}$

Exemple $7.45 = 8 - 2 + 1 + .45$



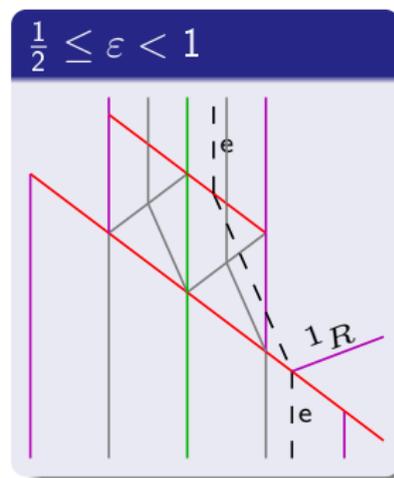
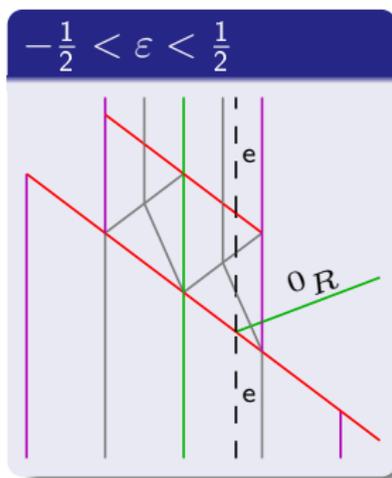
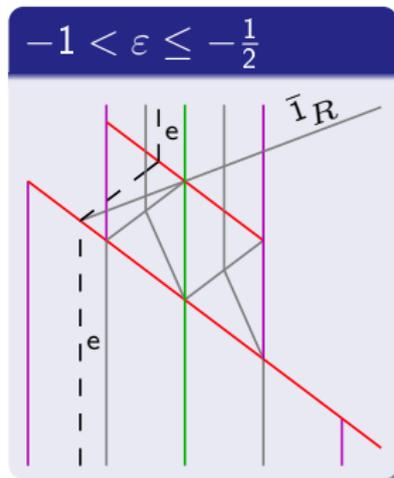
Le traitement de ε est la clé

- le reste est *trivial*

Extraction de bit signé à la demande

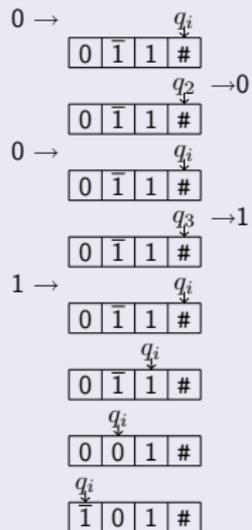
Schéma

- extraire
- recentrer et
- réduire la structure d'approximation



Calcul avec une MT de type 2 avec E/S

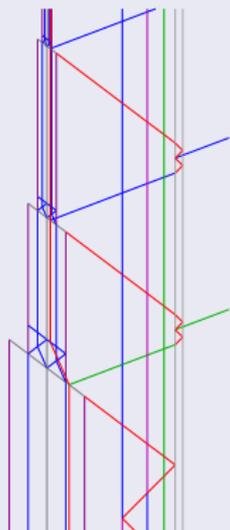
Calcul d'une MT-T2



Premières transitions

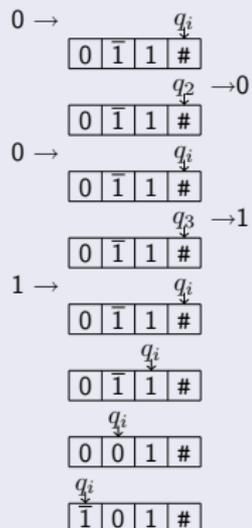


Implantation



Calcul avec une MT de type 2 avec E/S

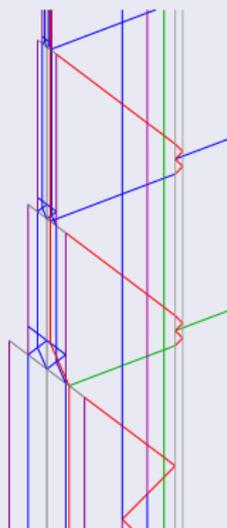
Calcul d'une MT-T2



Premières transitions



Implantation



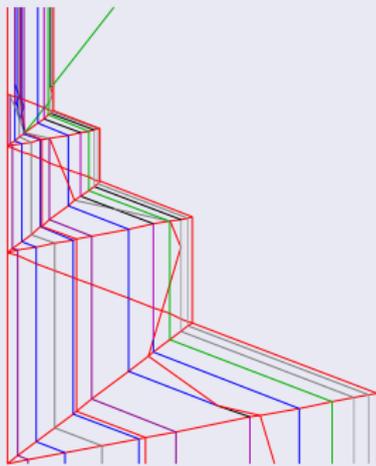
- Durée infinie \Rightarrow toute la séquence
- Résultat dans le codage initial?

Structure d'accélération non bornée bloquante

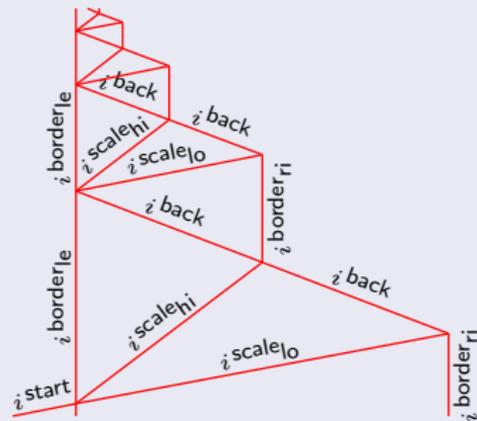
Sortie bloquante



Enchâssée

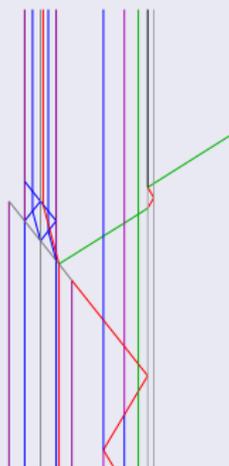


Structure d'accélération

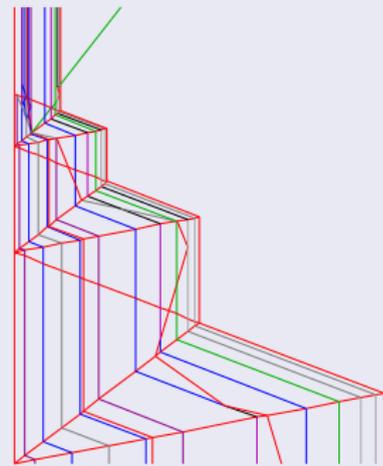


Structure d'accélération non bornée bloquante

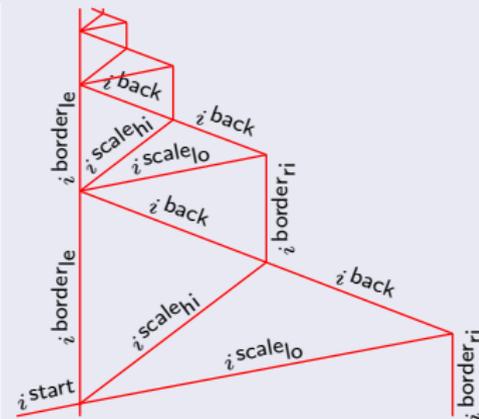
Sortie bloquante



Enchâssée



Structure d'accélération



- structure aboutissant à une accumulation simple
- calcul infini en temps bornée
- implantation du modèle du trou noir

Construction à deux niveaux

Structure interne (déjà vue)

- envoie un *ordre* à la structure externe
- redémarre une fois l'ordre exécuté

Structure externe (à voir)

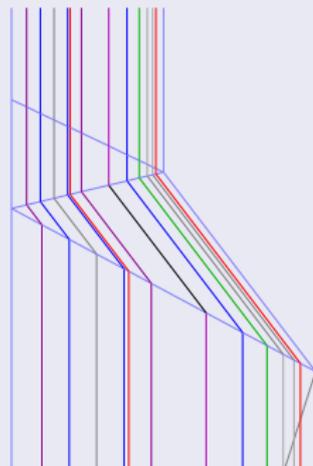
- exécute les ordre les la structure interne et lui rend la main
- produit une accumulation simple là où il faut.

Structure externe

Structure vide

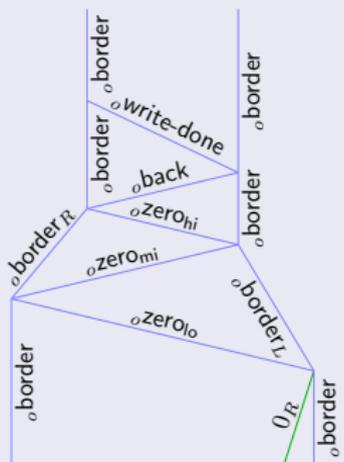


avec des signaux

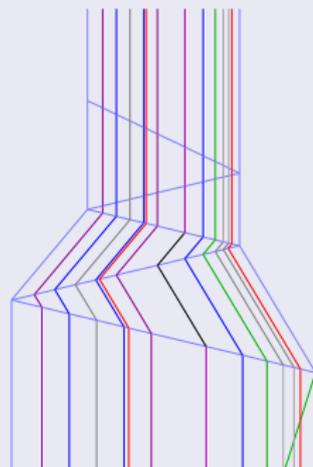


Structure externe

Structure vide

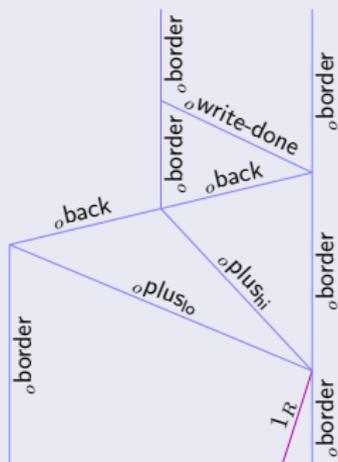


avec des signaux

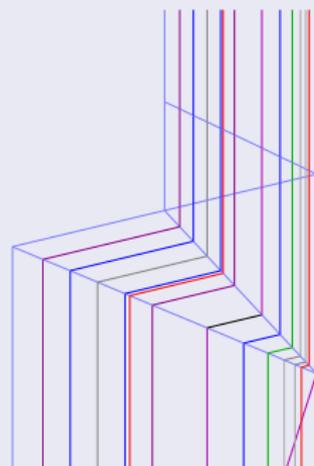


Structure externe

Structure vide

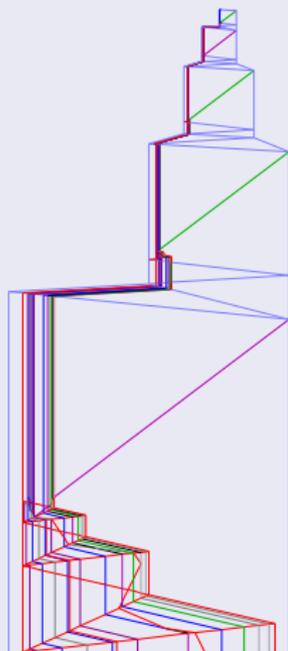


avec des signaux



Tout ensemble

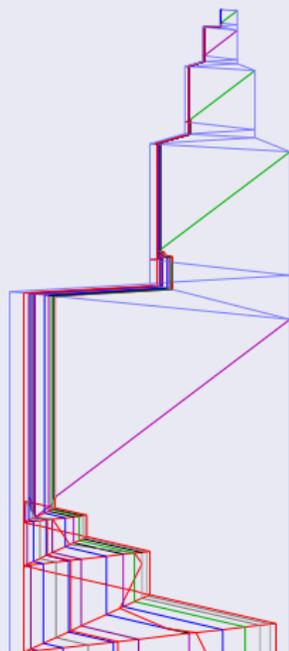
Diagramme entier



- Ordre produit en temps borné garanti grâce à la structure interne
- borne décroît géométriquement

Tout ensemble

Diagramme entier



- Ordre produit en temps borné garanti grâce à la structure interne
- borne décroît géométriquement

Avec une \mathbb{Q} -machine...

- vitesses et positions initiales dans \mathbb{Q}
- les collisions sont à des positions rationnelles
- possibilité d'accumulation à toute position spatiale qui soit un réel calculable
- est-ce tout?
- et pour les positions temporelles?

- 1 Des automates cellulaires aux machines à signaux
- 2 Analyse récursive / computable analysis et implatation
- 3 Forcément *c.e.* et *d-c.e.***
- 4 Atteindre tout *c.e.* et *d-c.e.*
- 5 Conclusion

Position temporelle

\mathbb{Q} -machine

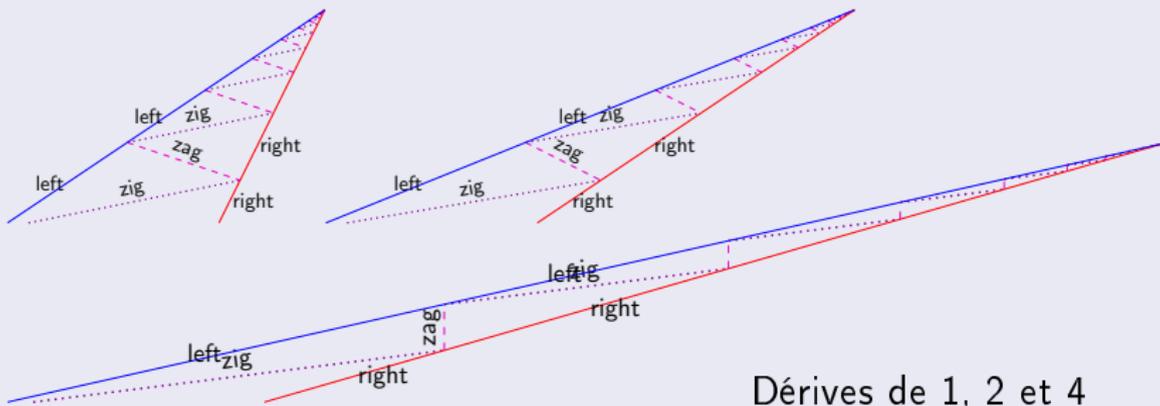
- \mathbb{Q} représentable et manipulable exactement
- simulable par MT (et fait en java)

Simulation à proximité d'une accumulation isolée

- à chaque collision, afficher la date
- suite de rationnels, calculable, croissante et convergente

Position spatiale

Déformations statiques : ajouter une constante à toutes les vitesses



Avec toutes les vitesses positives

- la position du signal le plus à gauche croît et converge
- correction par suppression de la dérive fois la date

Nombre réel *c.e.*

- limite d'une suite de rationnels calculable croissante
- convergence non maîtrisée
- code un ensemble *c.e.*
- non stable pas soustraction

Nombre réel *d-c.e.*

- différence de deux *c.e.*
- forment un corps
- [Ambos-Spies et al., 2000]
ce sont exactement les limites de suites calculables (x_n) qui convergent faiblement effectivement, *i.e.*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_{n+1} - x_n| \text{ converge}$$

- 1 Des automates cellulaires aux machines à signaux
- 2 Analyse récursive / computable analysis et implatation
- 3 Forcément *c.e.* et *d-c.e.*
- 4 Atteindre tout *c.e.* et *d-c.e.*
- 5 Conclusion

Codage adéquat (sans maîtrise de l'approximation)

Pour les *d-c.e.* (sans unicité)

$$x = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{z_i}{2^i}, z_i \in \mathbb{Z}$$

avec la $i \rightarrow z_i$ calculable

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \left| \frac{z_i}{2^i} \right| \text{ converge}$$

- (équivalence par construction, voir papier UC '11)

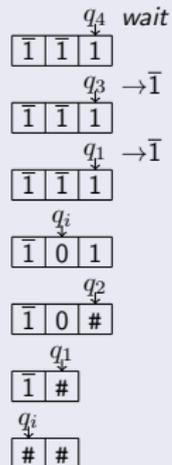
Pour les *c.e.* (sans unicité)

- idem mais $z_i \in \mathbb{N}$ (équivalence... UC '11)

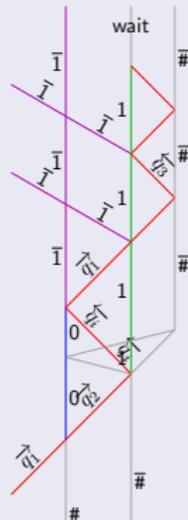
- z_i représenté en unaire signé

Version de la machine qui produit le codage

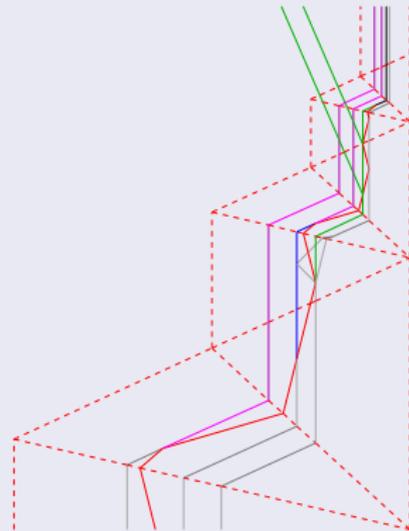
Exécution



Simulation

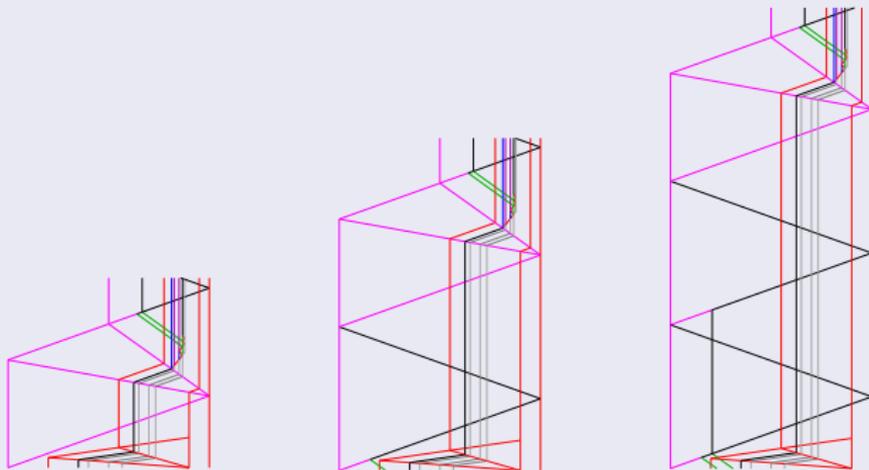


Structure interne avec le control



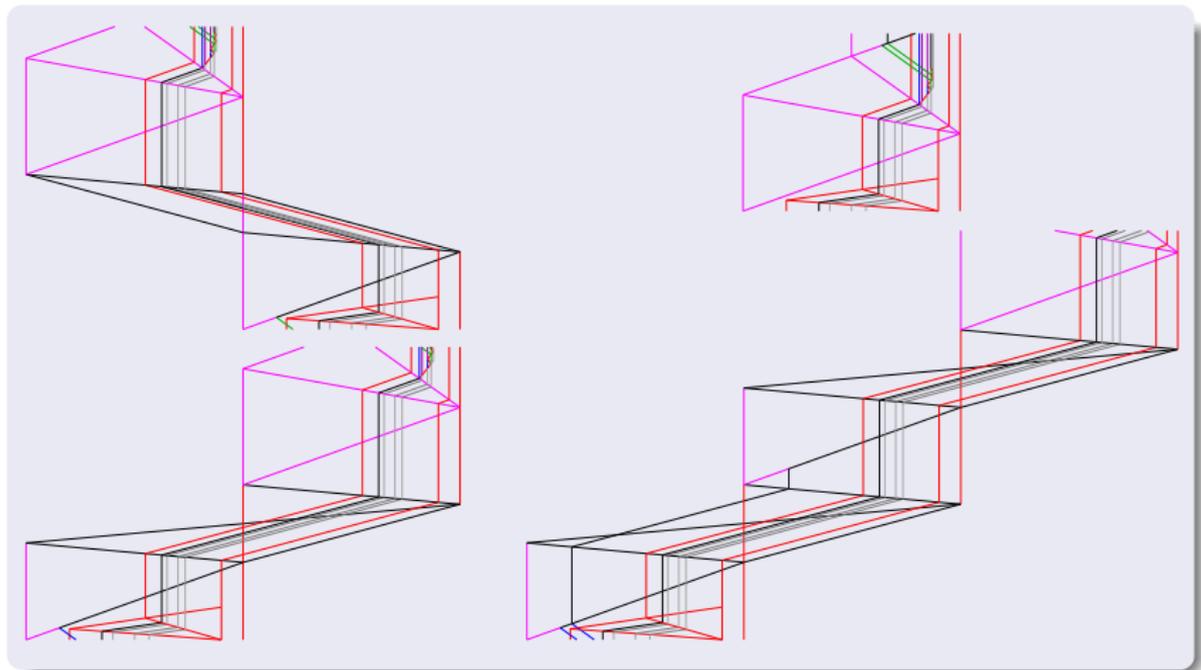
structure qui s'arrête après chaque save / valeur unaire signée

Attendre plus ou moins

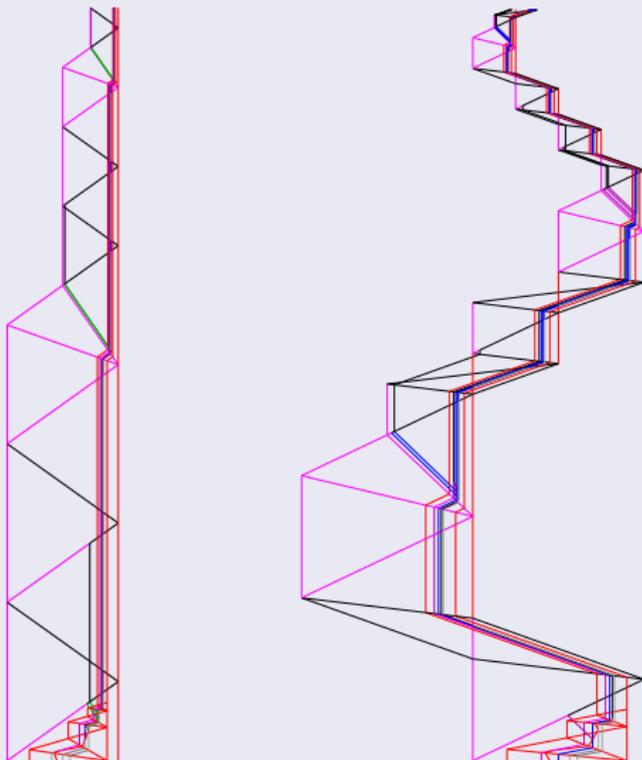


- Délai constant avant d'exécuter l'ordre
- Délai total (calcul et compression) à déduire de la date cible
- OK ce délai est rationnel

Spatialement



Exemples *complets*



- 1 Des automates cellulaires aux machines à signaux
- 2 Analyse récursive / computable analysis et implatation
- 3 Forcément *c.e.* et *d-c.e.*
- 4 Atteindre tout *c.e.* et *d-c.e.*
- 5 Conclusion

Résultats

- Analyse récursive implantée
 - Accumulation à n'importe quelles coordonnées calculables (construction à deux contrôles non présentée)
-
- Accumulations isolées se produisent à de positions spatiales d -c.e. et temporelles and c.e.
 - Toute position spatial d -c.e. est accessible
 - Toute position temporelle c.e. est accessible

Publication

- [Durand-Lose, 2010] Special issue on Unconv. Comp. '09.
- [Durand-Lose, 2011] Unconventional Computation '11

Perspectives

- Ne plus corrélér les positions spatiales et temporelles
 - ou montrer que c'est impossible
-
- Caractériser la puissance de calcul analytique
-
- Accumulations isolées d'ordre supérieur
 - Accumulations non isolées



Ambos-Spies, K., Weihrauch, K., and Zheng, X. (2000).

Weakly computable real numbers.

J. Complexity, 16(4):676–690.



Durand-Lose, J. (2010).

Abstract geometrical computation 5: embedding computable analysis.

Nat. Comput.

Special issue on Unconv. Comp. '09.



Durand-Lose, J. (2011).

Geometrical accumulations and computably enumerable real numbers (extended abstract).

In ??, editor, *Int. Conf. on Unconventional Computation 2011 (UC '11)*, number ?? in LNCS, pages ??–?? Springer.



Fischer, P. C. (1965).

Generation of primes by a one-dimensional real-time iterative array.

J. ACM, 12(3):388–394.



Goto, E. (1966).

Ōtomaton ni kansuru pazuru [Puzzles on automata].

In Kitagawa, T., editor, *Jōhōkagaku eno michi [The Road to information science]*, pages 67–92. Kyoristu Shuppan Publishing Co., Tokyo.



Lindgren, K. and Nordahl, M. G. (1990).

Universal computation in simple one-dimensional cellular automata.

Complex Systems, 4:299–318.



Mazoyer, J. (1996).

Computations on one dimensional cellular automata.

Ann. Math. Artif. Intell., 16:285–309.



Mazoyer, J. and Terrier, V. (1999).

Signals in one-dimensional cellular automata.

Theoret. Comp. Sci., 217(1):53–80.



Weihrach, K. (2000).

Introduction to computable analysis.

Texts in Theoretical computer science. Springer, Berlin.