

Construire et calculer dans un monde 2D

Florent Becker et Jérôme Durand-Lose



Laboratoire d'Informatique Fondamentale d'Orléans,
Université d'Orléans, Orléans, FRANCE



3 avril 2015 – EJC Informatique Mathématique – Orléans

1 Introduction

2 Trois modèles « euclidiens »

- Règle et compas (Huckenbeck, 1989, 1991)
- Automates de Mondrian (Jacopini and Sontacchi, 1990)
- Dérivée constante par région (Asarin et al., 1995; Bournez, 1999)

3 Machines à signaux

- Introduction et définition
- Malléabilité de l'espace-temps
- Construction et utilisation de fractales
- Calcul analogique

- 1 Introduction
- 2 Trois modèles « euclidiens »
 - Règle et compas (Huckenbeck, 1989, 1991)
 - Automates de Mondrian (Jacopini and Sontacchi, 1990)
 - Dérivée constante par région (Asarin et al., 1995; Bournez, 1999)
- 3 Machines à signaux
 - Introduction et définition
 - Malléabilité de l'espace-temps
 - Construction et utilisation de fractales
 - Calcul analogique

Géométrie euclidienne

Composante à part entière de la dynamique

Dépendance du positionnement initial

Localisation a une importance sémantique

Résultat est lui-même de nature géométrique

Organisation

Trois parties

- **Trois modèles « euclidiens »** → J. D.-L.
modèles continus ou hybrides
- **Machine à signaux** → J. D.-L.
modèle hybride
- **Auto-assemblage** → F. B.
modèle discret

1 Introduction

2 Trois modèles « euclidiens »

- Règle et compas (Huckenbeck, 1989, 1991)
- Automates de Mondrian (Jacopini and Sontacchi, 1990)
- Dérivée constante par région (Asarin et al., 1995; Bournez, 1999)

3 Machines à signaux

- Introduction et définition
- Malléabilité de l'espace-temps
- Construction et utilisation de fractales
- Calcul analogique

1 Introduction

2 Trois modèles « euclidiens »

- Règle et compas (Huckenbeck, 1989, 1991)
- Automates de Mondrian (Jacopini and Sontacchi, 1990)
- Dérivée constante par région (Asarin et al., 1995; Bournez, 1999)

3 Machines à signaux

- Introduction et définition
- Malléabilité de l'espace-temps
- Construction et utilisation de fractales
- Calcul analogique

Contexte

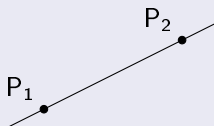
Espace : \mathbb{R}^2

- euclidien de dimension 2

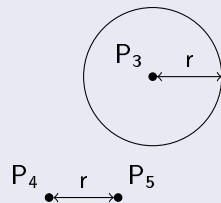
Point



Droite



Cercle



- Variables et automate

Dynamique : programme / automate (1/2)

Opérations de création

- cercle à partir de trois points

Dynamique : programme / automate (1/2)

Opérations de création

- cercle à partir de trois points
- droite à partir de deux points **E**

E Erreur possible

Dynamique : programme / automate (1/2)

Opérations de création

- cercle à partir de trois points
- droite à partir de deux points E
- point comme intersection de deux droite E

E Erreur possible

Dynamique : programme / automate (1/2)

Opérations de création

- cercle à partir de trois points
- droite à partir de deux points **E**
- point comme intersection de deux droite **E**
- point comme intersection de deux cercles **E N**

E Erreur possible

N Non déterminisme

Dynamique : programme / automate (1/2)

Opérations de création

- cercle à partir de trois points
- droite à partir de deux points **E**
- point comme intersection de deux droite **E**
- point comme intersection de deux cercles **E N**
différent d'un point **E**

E Erreur possible

N Non déterminisme

Dynamique : programme / automate (1/2)

Opérations de création

- cercle à partir de trois points
- droite à partir de deux points **E**
- point comme intersection de deux droite **E**
- point comme intersection de deux cercles **E N**
différent d'un point **E**
- point comme intersection d'un cercle et d'une droite **E N**
différent d'un point **E**

E Erreur possible

N Non déterminisme

Dynamique : programme / automate (2/2)

Autres opérations

branchement Si point dans un ensemble (constante unique)
alors aller à telle ou telle ligne

sortie Écrire point ou ligne ou cercle

terminaison Fini

Calcul réussi

- aucune branche Erreur
- toutes les branches
 - se finissent par Fini
 - ont la même sortie (\rightsquigarrow résultat)

Exemple : calcul du milieu (points distincts)

Détecter les points confondus ?

- test avec un singleton

- 1: $c_1 \leftarrow$ Cercle (centre A, rayon $d(A,B)$)
- 2: $c_2 \leftarrow$ Cercle (centre B, rayon $d(A,B)$)
- 3: $p_1 \leftarrow$ Intersection (c_1, c_2)
- 4: $p_2 \leftarrow$ Intersection (c_1, c_2) différente p_1
- 5: $d_1 \leftarrow$ Droite (p_1, p_2)
- 6: $d_2 \leftarrow$ Droite (A, B)
- 7: $p_3 \leftarrow$ Intersection (d_1, d_2)
- 8: Écrire p_3
- 9: Fini

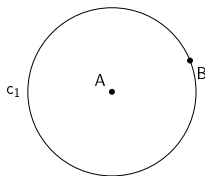


Exemple : calcul du milieu (points distincts)

Détecer les points confondus ?

- test avec un singleton

- 1: $c_1 \leftarrow$ Cercle (centre A, rayon $d(A,B)$)
- 2: $c_2 \leftarrow$ Cercle (centre B, rayon $d(A,B)$)
- 3: $p_1 \leftarrow$ Intersection (c_1, c_2)
- 4: $p_2 \leftarrow$ Intersection (c_1, c_2) différente p_1
- 5: $d_1 \leftarrow$ Droite (p_1, p_2)
- 6: $d_2 \leftarrow$ Droite (A, B)
- 7: $p_3 \leftarrow$ Intersection (d_1, d_2)
- 8: Écrire p_3
- 9: Fini

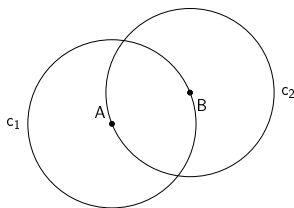


Exemple : calcul du milieu (points distincts)

Détecter les points confondus ?

- test avec un singleton

- 1: $c_1 \leftarrow$ Cercle (centre A, rayon $d(A,B)$)
- 2: $c_2 \leftarrow$ Cercle (centre B, rayon $d(A,B)$)
- 3: $p_1 \leftarrow$ Intersection (c_1, c_2)
- 4: $p_2 \leftarrow$ Intersection (c_1, c_2) différente p_1
- 5: $d_1 \leftarrow$ Droite (p_1, p_2)
- 6: $d_2 \leftarrow$ Droite (A, B)
- 7: $p_3 \leftarrow$ Intersection (d_1, d_2)
- 8: Écrire p_3
- 9: Fini

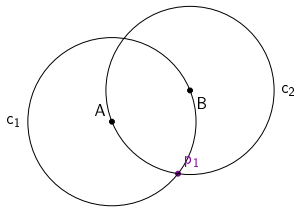
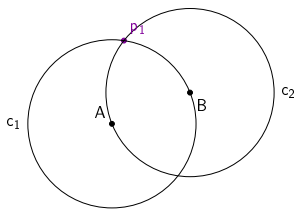


Exemple : calcul du milieu (points distincts)

Détecer les points confondus ?

- test avec un singleton

- 1: $c_1 \leftarrow$ Cercle (centre A, rayon $d(A,B)$)
- 2: $c_2 \leftarrow$ Cercle (centre B, rayon $d(A,B)$)
- 3: $p_1 \leftarrow$ Intersection (c_1, c_2)
- 4: $p_2 \leftarrow$ Intersection (c_1, c_2) différente p_1
- 5: $d_1 \leftarrow$ Droite (p_1, p_2)
- 6: $d_2 \leftarrow$ Droite (A, B)
- 7: $p_3 \leftarrow$ Intersection (d_1, d_2)
- 8: Écrire p_3
- 9: Fini

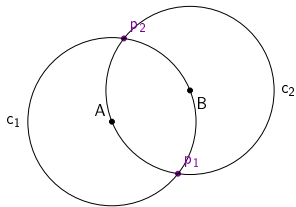
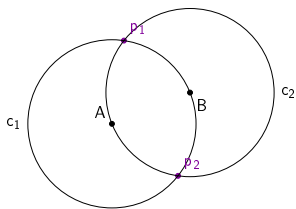


Exemple : calcul du milieu (points distincts)

Détecer les points confondus ?

- test avec un singleton

- 1: $c_1 \leftarrow$ Cercle (centre A, rayon $d(A,B)$)
- 2: $c_2 \leftarrow$ Cercle (centre B, rayon $d(A,B)$)
- 3: $p_1 \leftarrow$ Intersection (c_1, c_2)
- 4: $p_2 \leftarrow$ Intersection (c_1, c_2) différente p_1
- 5: $d_1 \leftarrow$ Droite (p_1, p_2)
- 6: $d_2 \leftarrow$ Droite (A, B)
- 7: $p_3 \leftarrow$ Intersection (d_1, d_2)
- 8: Écrire p_3
- 9: Fini

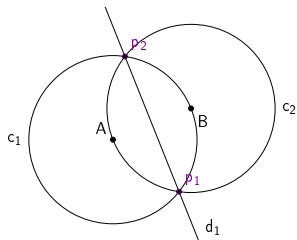
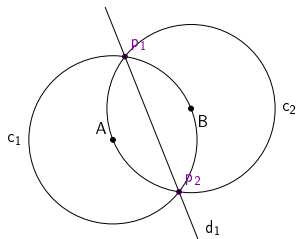


Exemple : calcul du milieu (points distincts)

Détecer les points confondus ?

- test avec un singleton

- 1: $c_1 \leftarrow$ Cercle (centre A, rayon $d(A,B)$)
- 2: $c_2 \leftarrow$ Cercle (centre B, rayon $d(A,B)$)
- 3: $p_1 \leftarrow$ Intersection (c_1, c_2)
- 4: $p_2 \leftarrow$ Intersection (c_1, c_2) différente p_1
- 5: $d_1 \leftarrow$ Droite (p_1, p_2)
- 6: $d_2 \leftarrow$ Droite (A, B)
- 7: $p_3 \leftarrow$ Intersection (d_1, d_2)
- 8: Écrire p_3
- 9: Fini

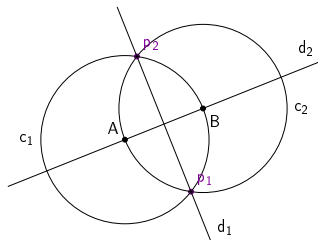
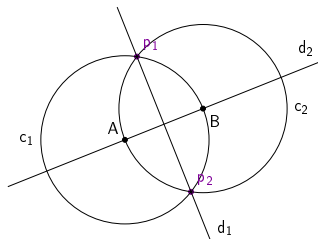


Exemple : calcul du milieu (points distincts)

Détecer les points confondus ?

- test avec un singleton

- 1: $c_1 \leftarrow$ Cercle (centre A, rayon $d(A,B)$)
- 2: $c_2 \leftarrow$ Cercle (centre B, rayon $d(A,B)$)
- 3: $p_1 \leftarrow$ Intersection (c_1, c_2)
- 4: $p_2 \leftarrow$ Intersection (c_1, c_2) différente p_1
- 5: $d_1 \leftarrow$ Droite (p_1, p_2)
- 6: $d_2 \leftarrow$ Droite (A, B)
- 7: $p_3 \leftarrow$ Intersection (d_1, d_2)
- 8: Écrire p_3
- 9: Fini

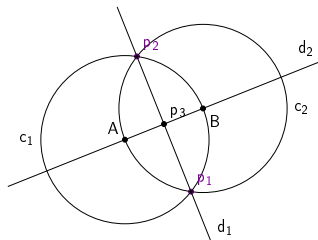
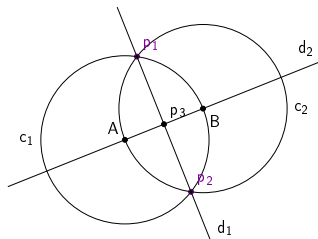


Exemple : calcul du milieu (points distincts)

Détecer les points confondus ?

- test avec un singleton

- 1: $c_1 \leftarrow$ Cercle (centre A, rayon $d(A,B)$)
- 2: $c_2 \leftarrow$ Cercle (centre B, rayon $d(A,B)$)
- 3: $p_1 \leftarrow$ Intersection (c_1, c_2)
- 4: $p_2 \leftarrow$ Intersection (c_1, c_2) différente p_1
- 5: $d_1 \leftarrow$ Droite (p_1, p_2)
- 6: $d_2 \leftarrow$ Droite (A, B)
- 7: $p_3 \leftarrow$ Intersection (d_1, d_2)
- 8: Écrire p_3
- 9: Fini

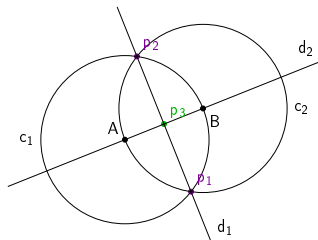
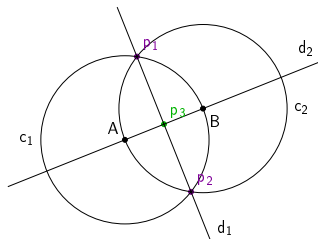


Exemple : calcul du milieu (points distincts)

Détecer les points confondus ?

- test avec un singleton

- 1: $c_1 \leftarrow$ Cercle (centre A, rayon $d(A,B)$)
- 2: $c_2 \leftarrow$ Cercle (centre B, rayon $d(A,B)$)
- 3: $p_1 \leftarrow$ Intersection (c_1, c_2)
- 4: $p_2 \leftarrow$ Intersection (c_1, c_2) différente p_1
- 5: $d_1 \leftarrow$ Droite (p_1, p_2)
- 6: $d_2 \leftarrow$ Droite (A, B)
- 7: $p_3 \leftarrow$ Intersection (d_1, d_2)
- 8: Écrire p_3
- 9: Fini



Exemple : calcul du milieu (points distincts)

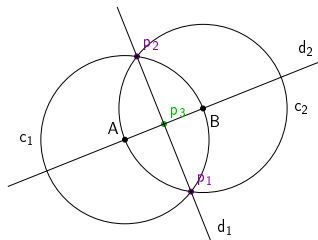
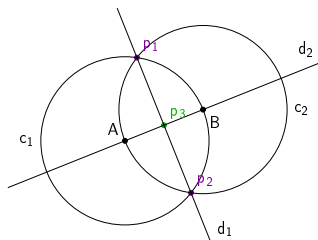
Détecter les points confondus ?

- test avec un singleton

- 1: $c_1 \leftarrow$ Cercle (centre A, rayon $d(A,B)$)
- 2: $c_2 \leftarrow$ Cercle (centre B, rayon $d(A,B)$)
- 3: $p_1 \leftarrow$ Intersection (c_1, c_2)
- 4: $p_2 \leftarrow$ Intersection (c_1, c_2) différente p_1
- 5: $d_1 \leftarrow$ Droite (p_1, p_2)
- 6: $d_2 \leftarrow$ Droite (A, B)
- 7: $p_3 \leftarrow$ Intersection (d_1, d_2)
- 8: Écrire p_3
- 9: Fini

Deux branches

- succès
- même sortie

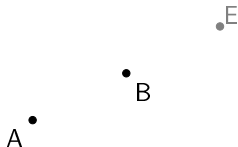


Exercice : doubler vecteur (non nul)...

Problème

Données A et B deux points distincts

Résultat E tel que $\vec{AE} = 2\vec{AB}$



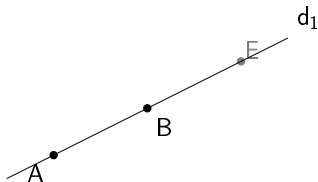
Exercice : doubler vecteur (non nul)...

Problème

Données A et B deux points distincts

Résultat E tel que $\vec{AE} = 2\vec{AB}$

- 2: $d \leftarrow$ Droite (A, B)
- 3: $c \leftarrow$ Cercle (centre B, rayon $d(A,B)$)
- 4: $E \leftarrow$ Intersection (c, d) différente A
- 5: Écrire E
- 6: Fini



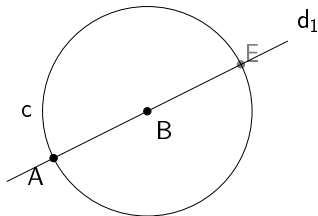
Exercice : doubler vecteur (non nul)...

Problème

Données A et B deux points distincts

Résultat E tel que $\vec{AE} = 2\vec{AB}$

- 2: $d \leftarrow$ Droite (A, B)
- 3: $c \leftarrow$ Cercle (centre B, rayon $d(A,B)$)
- 4: $E \leftarrow$ Intersection (c, d) différente A
- 5: Écrire E
- 6: Fini



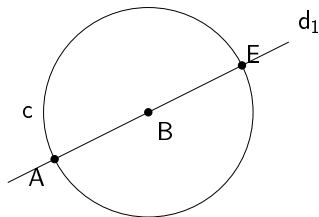
Exercice : doubler vecteur (non nul)...

Problème

Données A et B deux points distincts

Résultat E tel que $\vec{AE} = 2\vec{AB}$

- 2: $d \leftarrow$ Droite (A, B)
- 3: $c \leftarrow$ Cercle (centre B, rayon $d(A,B)$)
- 4: $E \leftarrow$ Intersection (c, d) différente A
- 5: Écrire E
- 6: Fini



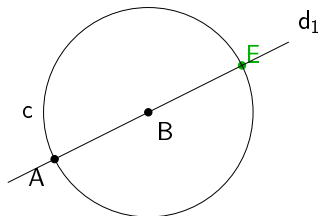
Exercice : doubler vecteur (non nul)...

Problème

Données A et B deux points distincts

Résultat E tel que $\vec{AE} = 2\vec{AB}$

- 2: $d \leftarrow$ Droite (A, B)
- 3: $c \leftarrow$ Cercle (centre B, rayon $d(A,B)$)
- 4: $E \leftarrow$ Intersection (c, d) différente A
- 5: Écrire E
- 6: Fini



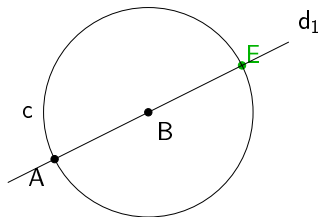
Exercice : doubler vecteur (non nul)...

Problème

Données A et B deux points distincts

Résultat E tel que $\vec{AE} = 2\vec{AB}$

- 2: $d \leftarrow$ Droite (A, B)
- 3: $c \leftarrow$ Cercle (centre B, rayon $d(A,B)$)
- 4: $E \leftarrow$ Intersection (c, d) différente A
- 5: Écrire E
- 6: Fini

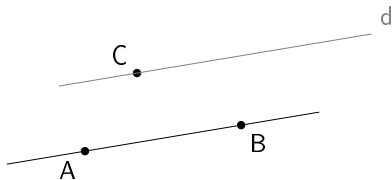


Exercice : parallèle en un point

Problème

Données A, B et C trois points distincts

Résultat d tel que AB est parallèle à d et C appartient à d

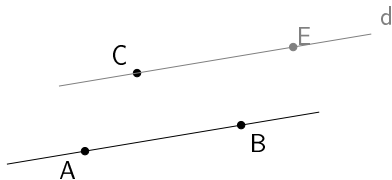


Exercice : parallèle en un point

Problème

Données A, B et C trois points distincts

Résultat d tel que AB est parallèle à d et C appartient à d

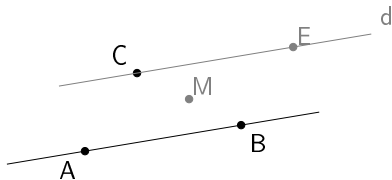


Exercice : parallèle en un point

Problème

Données A, B et C trois points distincts

Résultat d tel que AB est parallèle à d et C appartient à d



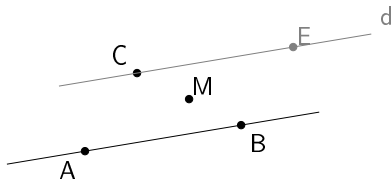
Exercice : parallèle en un point

Problème

Données A, B et C trois points distincts

Résultat d tel que AB est parallèle à d et C appartient à d

- 4: $M \leftarrow \text{MILIEU}(B, C)$
- 5: $E \leftarrow \text{DOUBLE_VECTEUR}(A, M)$
- 6: $d \leftarrow \text{Droite}(C, E)$
- 7: Écrire d
- 8: Fini



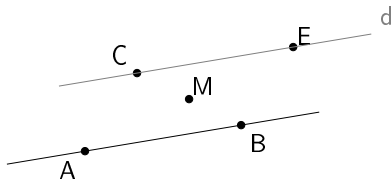
Exercice : parallèle en un point

Problème

Données A, B et C trois points distincts

Résultat d tel que AB est parallèle à d et C appartient à d

- 4: $M \leftarrow \text{MILIEU}(B, C)$
- 5: $E \leftarrow \text{DOUBLE_VECTEUR}(A, M)$
- 6: $d \leftarrow \text{Droite}(C, E)$
- 7: Écrire d
- 8: Fini



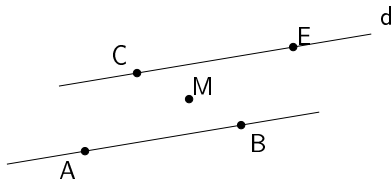
Exercice : parallèle en un point

Problème

Données A, B et C trois points distincts

Résultat d tel que AB est parallèle à d et C appartient à d

- 4: $M \leftarrow \text{MILIEU} (B, C)$
- 5: $E \leftarrow \text{DOUBLE_VECTEUR} (A, M)$
- 6: $d \leftarrow \text{Droite} (C, E)$
- 7: Écrire d
- 8: Fini



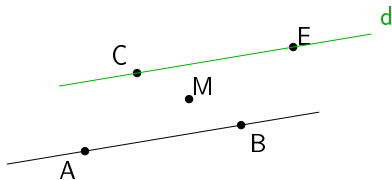
Exercice : parallèle en un point

Problème

Données A, B et C trois points distincts

Résultat d tel que AB est parallèle à d et C appartient à d

- 4: $M \leftarrow \text{MILIEU}(B, C)$
- 5: $E \leftarrow \text{DOUBLE_VECTEUR}(A, M)$
- 6: $d \leftarrow \text{Droite}(C, E)$
- 7: Écrire d
- 8: Fini



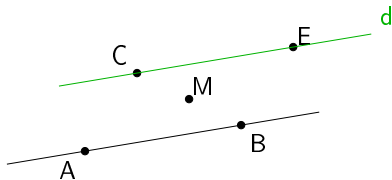
Exercice : parallèle en un point

Problème

Données A, B et C trois points distincts

Résultat d tel que AB est parallèle à d et C appartient à d

- 4: $M \leftarrow \text{MILIEU}(B, C)$
- 5: $E \leftarrow \text{DOUBLE_VECTEUR}(A, M)$
- 6: $d \leftarrow \text{Droite}(C, E)$
- 7: Écrire d
- 8: Fini

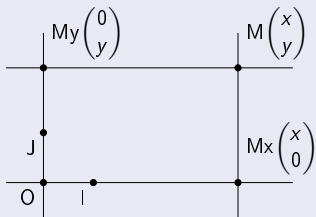


Calculer avec O, I, J et $E=\{O\}$

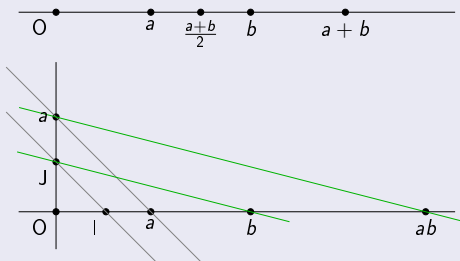
Tout ce qui est exprimable avec des coordonnées fonctions des :

- coordonnées de départ et entiers
- addition, soustraction, multiplication et division

Coordonnées



Addition, multiplication, division



1 Introduction

2 Trois modèles « euclidiens »

- Règle et compas (Huckenbeck, 1989, 1991)
- Automates de Mondrian (Jacopini and Sontacchi, 1990)
- Dérivée constante par région (Asarin et al., 1995; Bournez, 1999)

3 Machines à signaux

- Introduction et définition
- Malléabilité de l'espace-temps
- Construction et utilisation de fractales
- Calcul analogique

Aspect spatial / statique

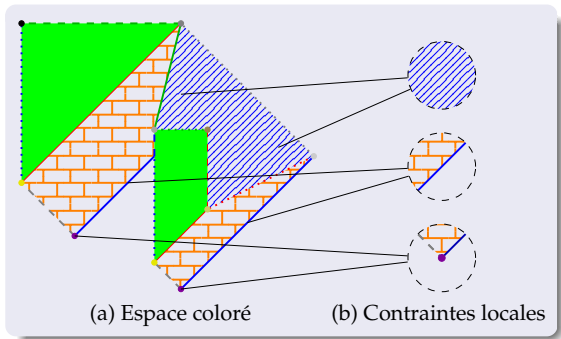
Chaque position

- un état
 \rightsquigarrow une couleur

- Nombre fini de couleurs

Uniformité

- Mêmes *règles* partout
- Même couleur
 \Rightarrow même voisinage



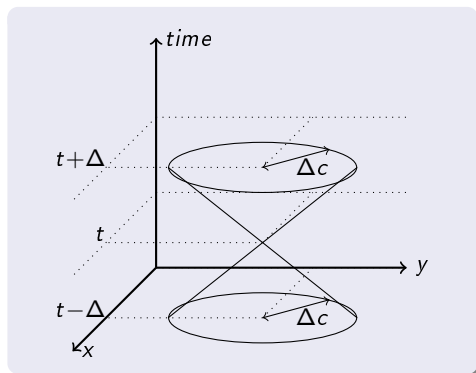
Aspect temporel / dynamique

Vitesse limite (c)

- propagation de l'information

Cône espace temps

- dépendance
- influence



Aspect temporel / dynamique

Vitesse limite (c)

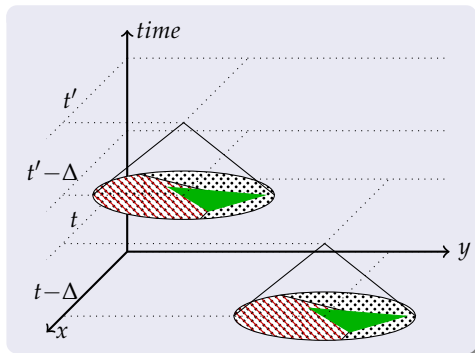
- propagation de l'information

Cône espace temps

- dépendance
- influence

Uniformité (cônes passés)

- Mêmes bases de cône
 \Rightarrow hauts de cône identiques



Aspect temporel / dynamique

Vitesse limite (c)

- propagation de l'information

Cône espace temps

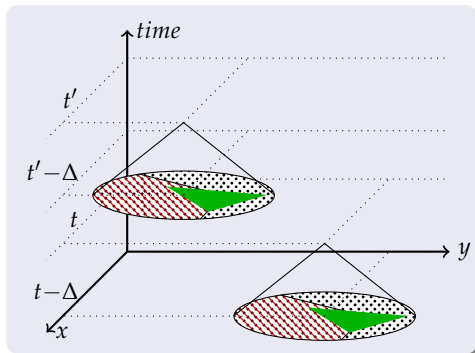
- dépendance
- influence

Uniformité (cônes passés)

- Mêmes bases de cône
⇒ hauts de cône identiques

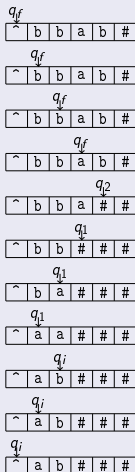
Réversibilité

- De même à rebrousse-temps

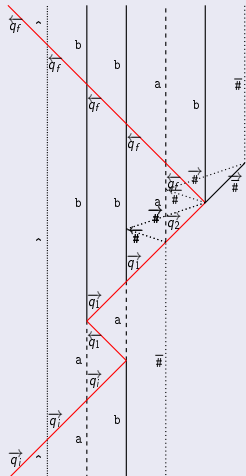


Calculer (au sens de Turing)

Machine de Turing



Simulation



1 Introduction

2 Trois modèles « euclidiens »

- Règle et compas (Huckenbeck, 1989, 1991)
- Automates de Mondrian (Jacopini and Sontacchi, 1990)
- Dérivée constante par région (Asarin et al., 1995; Bournez, 1999)

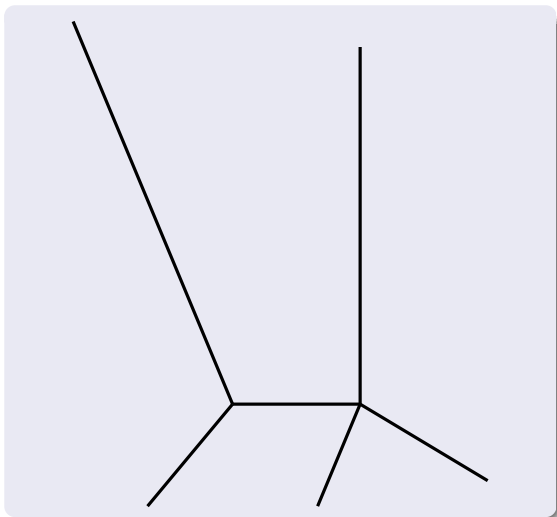
3 Machines à signaux

- Introduction et définition
- Malléabilité de l'espace-temps
- Construction et utilisation de fractales
- Calcul analogique

Système dynamique hybride

Découpage de l'espace

- régions polyédrales



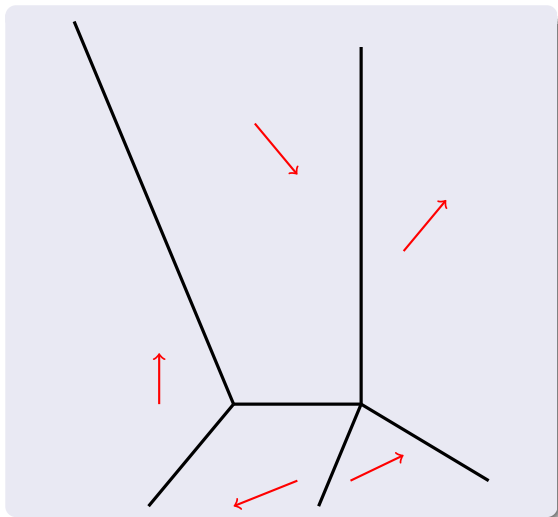
Système dynamique hybride

Découpage de l'espace

- régions polyédrales

Chaque région

- dérivée constante



Système dynamique hybride

Découpage de l'espace

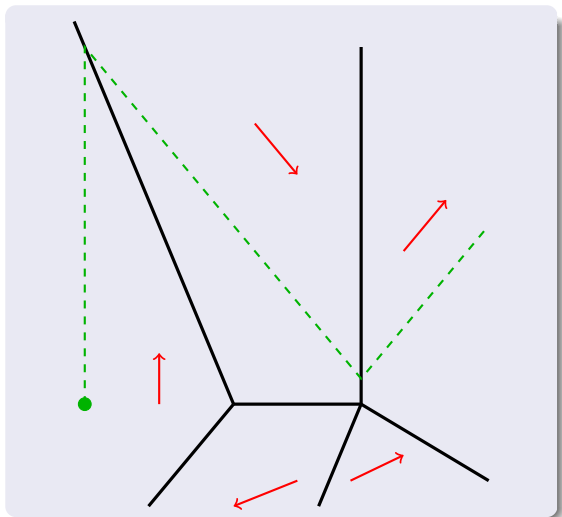
- régions polyédrales

Chaque région

- dérivée constante

Dynamique

- part d'un point et suit la dérivée



Système dynamique hybride

Découpage de l'espace

- régions polyédrales

Chaque région

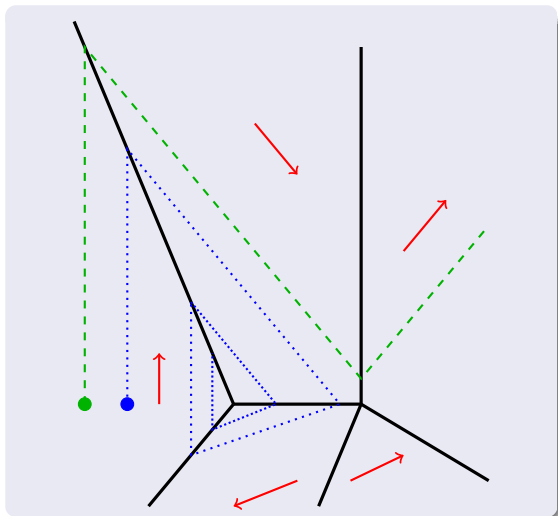
- dérivée constante

Dynamique

- part d'un point et suit la dérivée

Accumulation

- *effet Zénon*



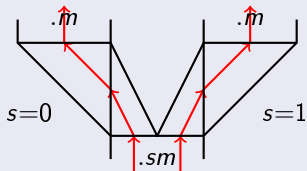
Calculer (au sens de Turing) en dimension 4

Codage d'une configuration de MT

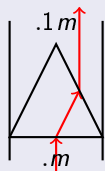
- ruban (m_g, s, m_d) : $g = (0.m_g)_{|\Sigma|}$ et $d = (0.sm_d)_{|\Sigma|}$
- état : hauteur / niveau

Primitives pour $\Sigma = \{0, 1\}$

Aiguillage sur lettre



Empiler 1



Dimension 3

- *gestion* conjointe de m_g

Dimension 4

- *aiguillage* entre les niveaux
- *fusion* des chemins de dimension 2

Monter la hiérarchie arithmétique

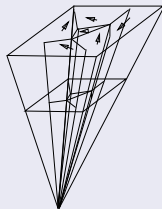
Hiérarchie ?

- Σ_0 : problèmes définissables par $\phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ avec ϕ prédicat récursif
- Σ_d : problèmes définissables par $\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \dots \phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ avec d quantificateurs alternants

Utilisation de l'effet Zénon



Original System
in \mathbb{R}^d



Homogenization
in \mathbb{R}^{d+1}

(Bournez, 1999, fig. 10 p.12)

$d + 2$ dimensions pour décider Σ_d

1 Introduction

2 Trois modèles « euclidiens »

- Règle et compas (Huckenbeck, 1989, 1991)
- Automates de Mondrian (Jacopini and Sontacchi, 1990)
- Dérivée constante par région (Asarin et al., 1995; Bournez, 1999)

3 Machines à signaux

- Introduction et définition
- Malléabilité de l'espace-temps
- Construction et utilisation de fractales
- Calcul analogique

1 Introduction

2 Trois modèles « euclidiens »

- Règle et compas (Huckenbeck, 1989, 1991)
- Automates de Mondrian (Jacopini and Sontacchi, 1990)
- Dérivée constante par région (Asarin et al., 1995; Bournez, 1999)

3 Machines à signaux

- Introduction et définition
- Malléabilité de l'espace-temps
- Construction et utilisation de fractales
- Calcul analogique

Automates cellulaire : utilisation de signaux

Synchronisation d'une ligne de fusiliers (Goto, 1966)

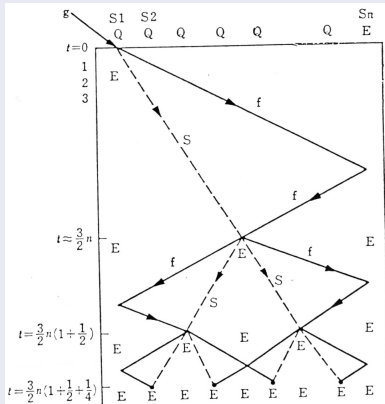


図 3-5 一斉射撃の問題 (連続近似)

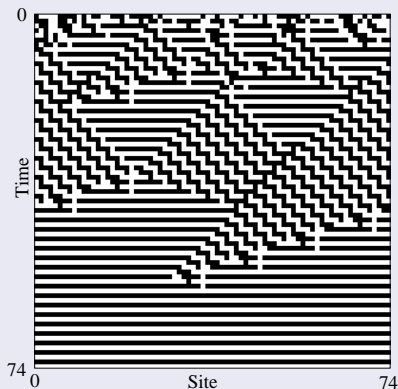
G	s ₁	s ₂	s ₃	s ₄	s ₅	s ₆
g	Q	Q	Q	Q	Q	E
t=0	f's'Est	Q	Q	Q	Q	E
1	E	Q2f	Q	Q	Q	E
2	E	Q1	Qf	Q	Q	E
3	E	Q&	Q	Qf	Q	E
4	E	Q	Q2	Q	Qf	E
5	E	Q	Q1	Q	Q	f'Ef
6	E	Q	QS	Q	f'Q	E
7	E	Q	Q	a'Q'	Q	E
8	E	Q	f'S'Est	f's'Est	Q	E
9	E	f2Q	E	E	Q2f	E
10	f'Ef	1Q	E	E	Q1	f'Ef
11	E	f'S'Est	E	E	f's'Est	E
12	a'Ea	E	a'Ea	a'Ea	E	a'Ea
13	F	F	F	F	F	F

図 3-6 一斉射撃解 (n=6)

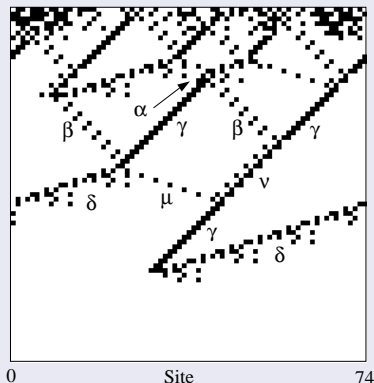
- Automates cellulaires : c.f. voir EJC IM 2014

AC : Analyse en terme de signaux

Das et al. (1995)



(a) Space-time diagram.



(b) Filtered space-time diagram.

AC : Conception avec des signaux

Fischer (1965)

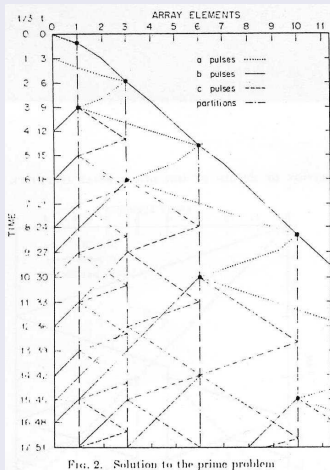
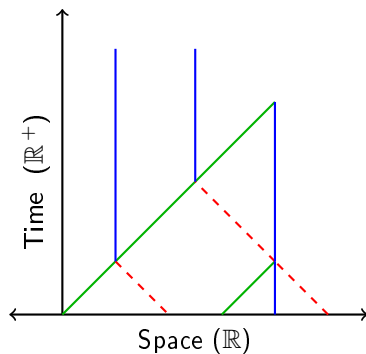
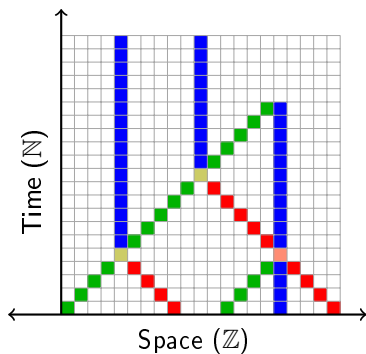


FIG. 2. Solution to the prime problem

Signaux



- Signal (meta-signal)
- Collision (règle)

Vocabulaire et exemple : trouver le milieu

M |

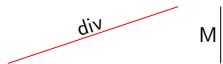
M |

Meta-signaux (vitesse)

M (0)

Règles de collision

Vocabulaire et exemple : trouver le milieu

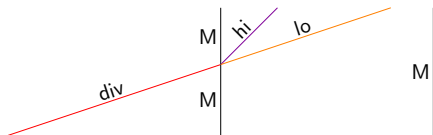


Meta-signaux (vitesse)

M	(0)
div	(3)

Règles de collision

Vocabulaire et exemple : trouver le milieu



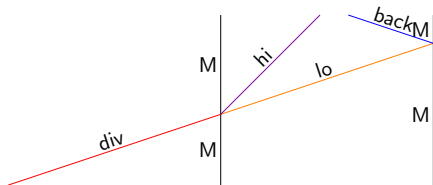
Meta-signaux (vitesse)

M	(0)
div	(3)
hi	(1)
lo	(3)

Règles de collision

$$\{ \text{div}, M \} \rightarrow \{ M, \text{hi}, \text{lo} \}$$

Vocabulaire et exemple : trouver le milieu



Meta-signaux (vitesse)

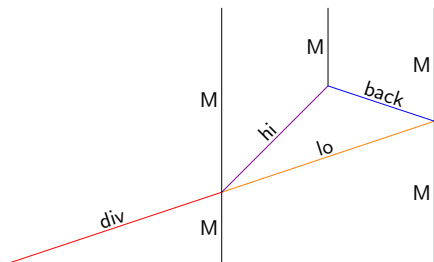
M	(0)
div	(3)
hi	(1)
lo	(3)
back	(-3)

Règles de collision

$$\{ \text{div}, M \} \rightarrow \{ M, \text{hi}, \text{lo} \}$$

$$\{ \text{lo}, M \} \rightarrow \{ \text{back}, M \}$$

Vocabulaire et exemple : trouver le milieu



Meta-signaux (vitesse)

M	(0)
div	(3)
hi	(1)
lo	(3)
back	(-3)

Règles de collision

$$\{ \text{div}, M \} \rightarrow \{ M, \text{hi}, \text{lo} \}$$

$$\{ \text{lo}, M \} \rightarrow \{ \text{back}, M \}$$

$$\{ \text{hi}, \text{back} \} \rightarrow \{ M \}$$

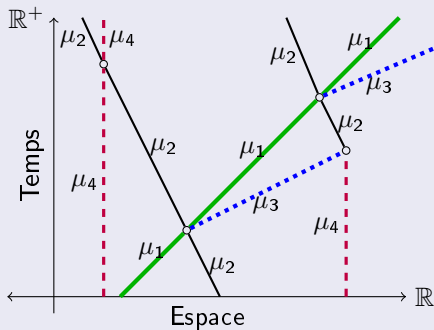
Autre exemple

Nom	Vitesse
μ_1	1
μ_2	$-1/2$
μ_3	3
μ_4	0

$$\{\mu_1, \mu_2\} \rightarrow \{\mu_2, \mu_1, \mu_3\}$$

$$\{\mu_3, \mu_4\} \rightarrow \{\mu_2\}$$

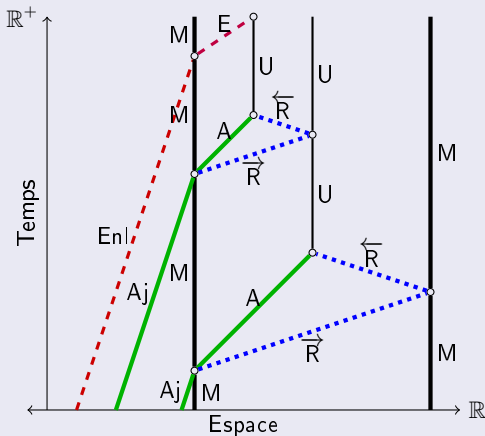
$$\{\mu_4, \mu_2\} \rightarrow \{\mu_2, \mu_4\}$$



Implantation d'une pile

Nom	Vitesse
A_j, Enl	$1/3$
A, E	1
U, M	0
\vec{R}	3
\overleftarrow{R}	-3

$\{A_j, M\} \rightarrow \{M, A, \vec{R}\}$
 $\{\vec{R}, M\} \rightarrow \{\overleftarrow{R}, M\}$
 $\{A, \overleftarrow{R}\} \rightarrow \{U\}$
 $\{\vec{R}, U\} \rightarrow \{\overleftarrow{R}, U\}$
 $\{\text{Enl}, M\} \rightarrow \{M, E\}$
 $\{E, U\} \rightarrow \{\}$

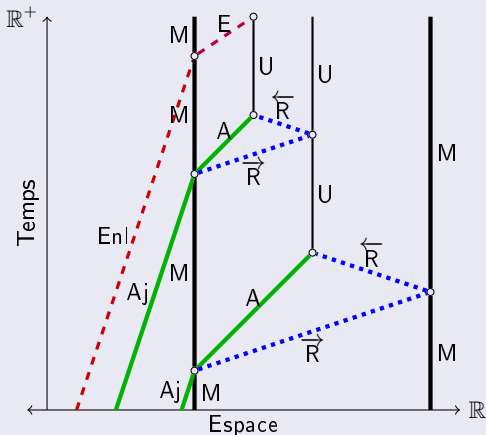


Comment modifier la configuration initiale pour enlever l'autre signal U ?

Implantation d'une pile

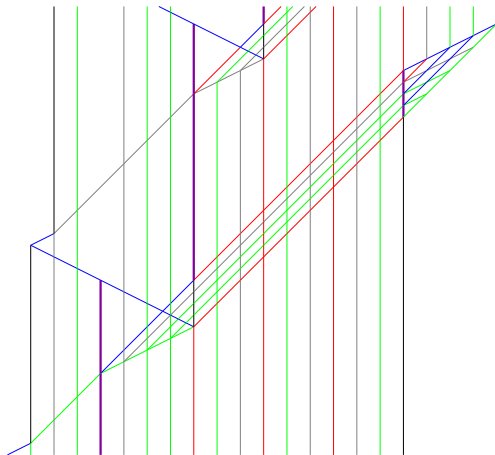
Nom	Vitesse
A_j, Enl	$1/3$
A, E	1
U, M	0
\vec{R}	3
\overleftarrow{R}	-3

$\{A_j, M\} \rightarrow \{M, A, \vec{R}\}$
 $\{\vec{R}, M\} \rightarrow \{\overleftarrow{R}, M\}$
 $\{A, \overleftarrow{R}\} \rightarrow \{U\}$
 $\{\vec{R}, U\} \rightarrow \{\overleftarrow{R}, U\}$
 $\{\text{Enl}, M\} \rightarrow \{M, E\}$
 $\{E, U\} \rightarrow \{\}$

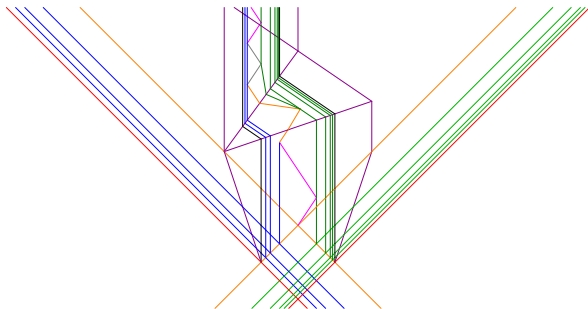


Quelle règle ajouter pour qu'aucun signal Enl ne continue à droite en l'absence de U ?

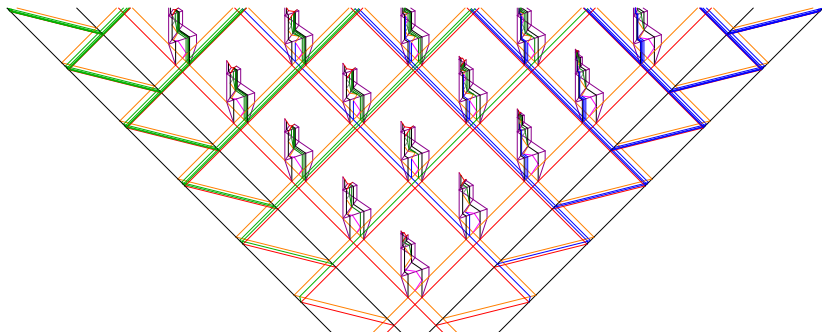
Dynamique complexe



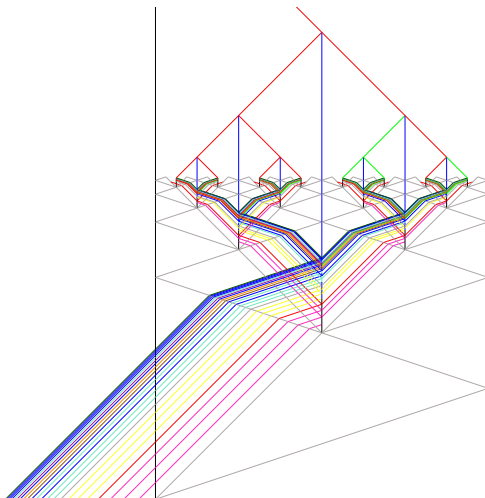
Dynamique complexe



Dynamique complexe



Dynamique complexe



Calculer (au sens de Turing)

Machine de Turing

q_f
 \leftarrow b b a b #

q_f
 \leftarrow b b a b #

q_f
 \leftarrow b b a b #

q_f
 \leftarrow b b a b #

q_2
 \leftarrow b b a # #

q_1
 \leftarrow b b # # #

q_1
 \leftarrow b a # # #

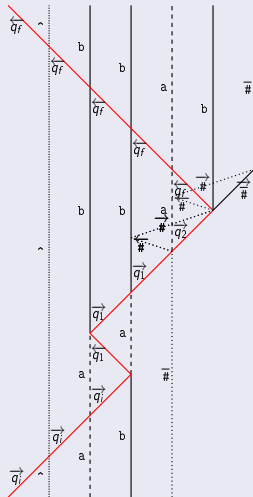
q_1
 \leftarrow a a # # #

q_i
 \leftarrow a b # # #

q_i
 \leftarrow a b # # #

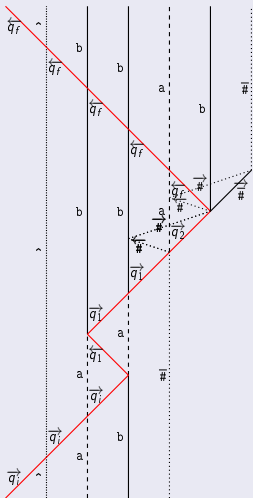
q_i
 \leftarrow a b # # #

Simulation



Calculer (au sens de Turing)

Simulation



Machines rationnelle

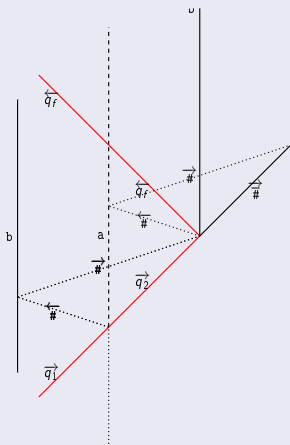
- vitesses $\in \mathbb{Q}$
- positions initiales $\in \mathbb{Q}$
- \Rightarrow coordonnée des collisions $\in \mathbb{Q}$
- implantable exactement

Indécidabilité

- nombre fini de collisions
- apparition d'un méta-signal
- utilisation d'une règle
- disparition des signaux
- participation d'un signal à une collision
- extension sur le coté...

Calculer (au sens de Turing)

Simulation



Exercice

Une nouvelle cellule est toujours ajoutée à la même distance entre les cellules.

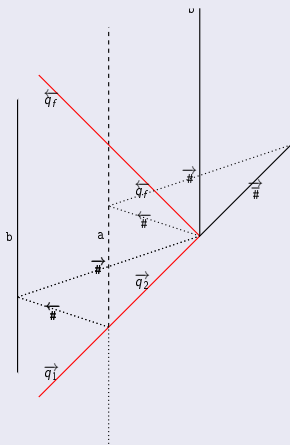
Les signaux correspondant à la tête sont de vitesses 1 et -1 .

Sachant que $\vec{\#}$ est de vitesse 1 et que les vitesses des autres signaux sont de même valeur absolue, que valent les vitesses de $\overleftarrow{\#}$ et $\overrightarrow{\#}$?

Reconnaître une construction à rebrousse-temps pour vérifier le résultat.

Calculer (au sens de Turing)

Simulation



Exercice

Comment changer les vitesses de manière à ce que la distance soit à chaque fois la moitié de la distance précédente ?

Le ruban n'occupe alors qu'une partie bornée de l'espace.

1 Introduction

2 Trois modèles « euclidiens »

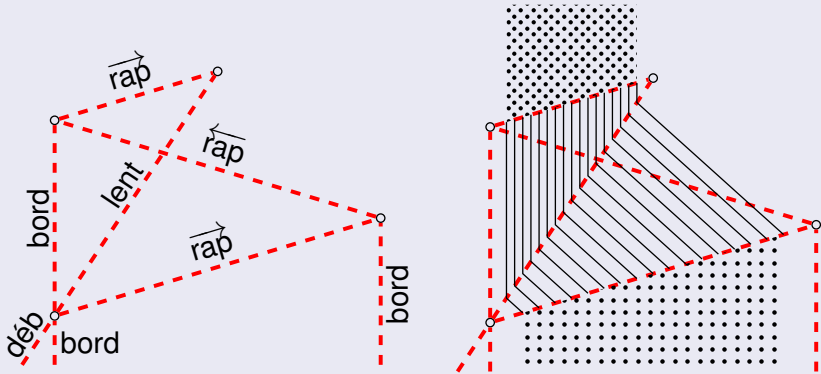
- Règle et compas (Huckenbeck, 1989, 1991)
- Automates de Mondrian (Jacopini and Sontacchi, 1990)
- Dérivée constante par région (Asarin et al., 1995; Bournez, 1999)

3 Machines à signaux

- Introduction et définition
- **Malléabilité de l'espace-temps**
- Construction et utilisation de fractales
- Calcul analogique

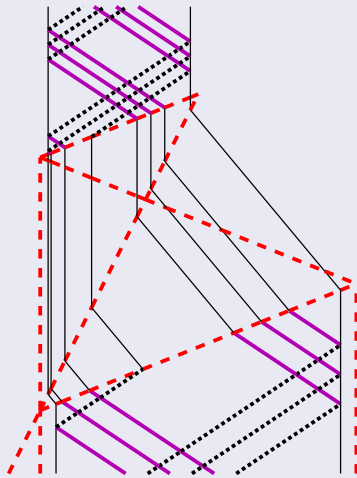
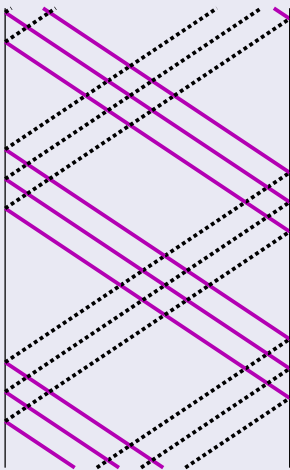
Contraction

Principe



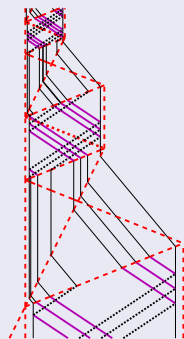
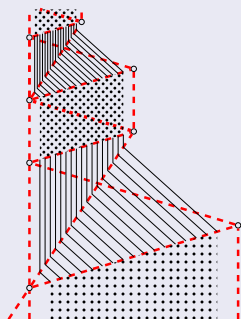
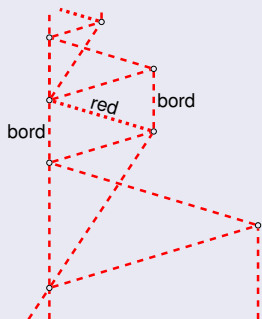
Contraction

Exemple



Contraction itérée

Principe et exemple



Conséquences

Repliement de l'espace

- tout *calcul* partant d'une configuration finie peut être replié dans un espace fini
- une partie non bornée de l'espace-temps est « en bijection » avec une partie bornée

Deux échelles de temps

- temps continu : durée finie
- temps discret (les collisions) : infinité d'instants

Modèle du trou noir : décider de la Halte (et plus)

- enchâssement d'un calcul (Turing), tout résultat sort librement
- à l'extérieur, on attend tranquillement le résultat
- au bout d'un temps *borné et connu*, on a reçu un signal de fin ou il n'y en a pas eu !

1 Introduction

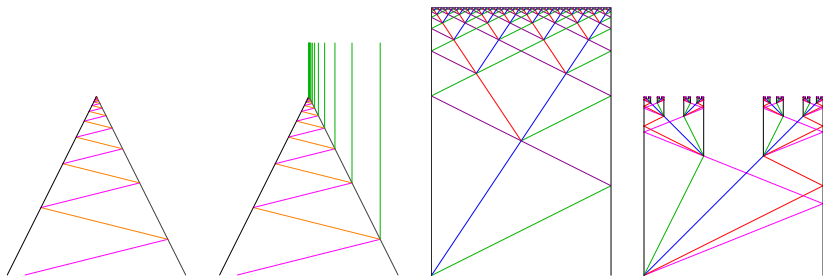
2 Trois modèles « euclidiens »

- Règle et compas (Huckenbeck, 1989, 1991)
- Automates de Mondrian (Jacopini and Sontacchi, 1990)
- Dérivée constante par région (Asarin et al., 1995; Bournez, 1999)

3 Machines à signaux

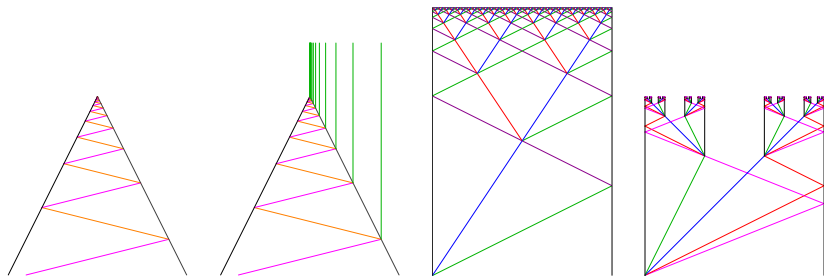
- Introduction et définition
- Malléabilité de l'espace-temps
- Construction et utilisation de fractales
- Calcul analogique

Génération de fractales



Comment limiter une fractale ?

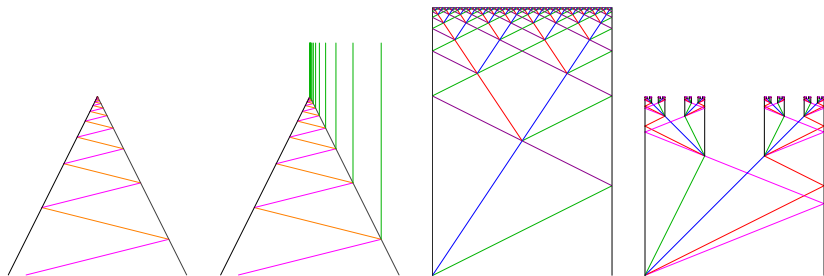
Génération de fractales



Comment limiter une fractale ?

- série de méta-signaux qui servent de compteur unaire (machine *ad hoc*).

Génération de fractales



Comment limiter une fractale ?

- série de méta-signaux qui servent de compteur unaire (machine *ad hoc*).
- propagation d'un ordre disant de produire un niveau de plus. Pour dix niveaux, donner dix fois l'ordre (machine générique).

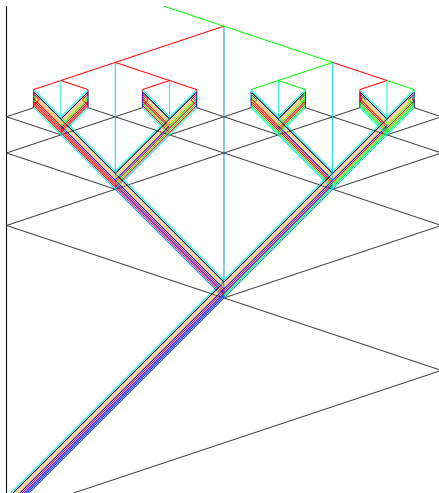
Satisfaction de formules booléennes quantifiées

QSAT

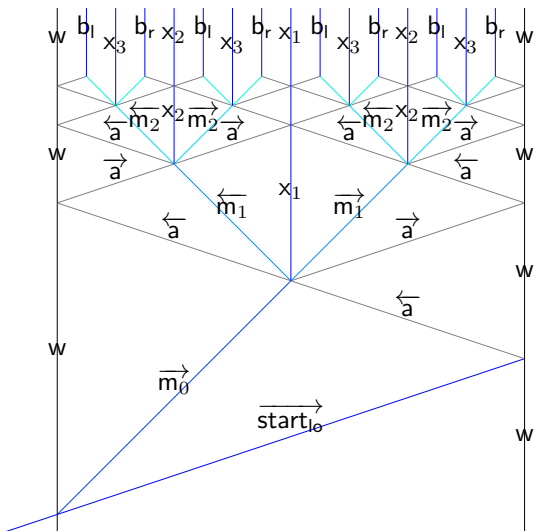
- $\exists x_1 \forall x_2 \forall x_3 x_1 \wedge (\neg x_2 \vee x_3)$

Duchier et al. (2011)

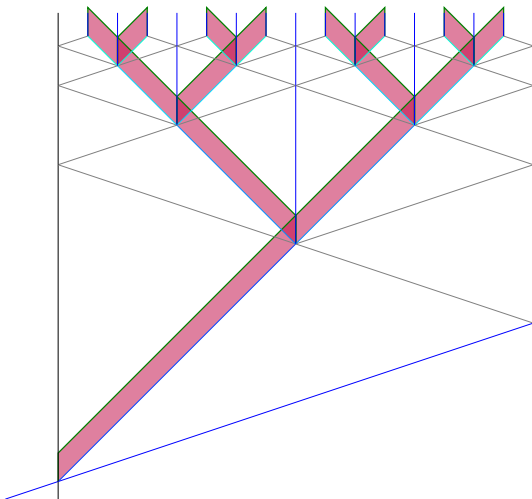
- une formule QSAT
 \rightsquigarrow une machine à signaux



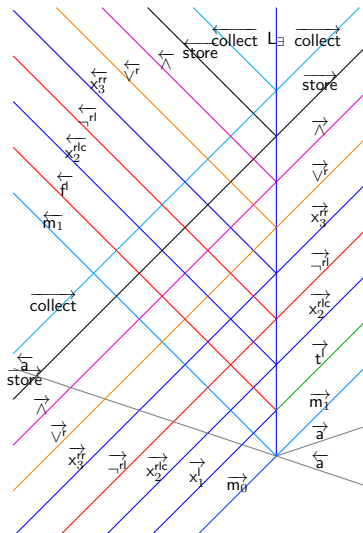
Création de l'arbre de tous les cas



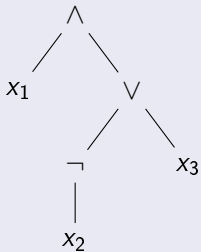
Propagation dans l'arbre



Duplication du faisceau

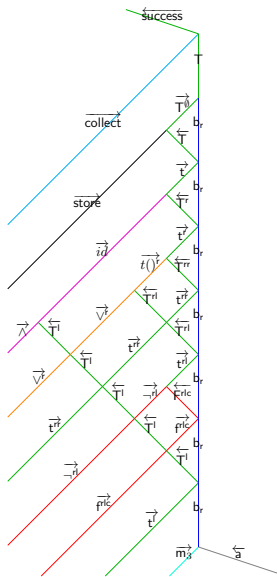


Évaluation de la formule

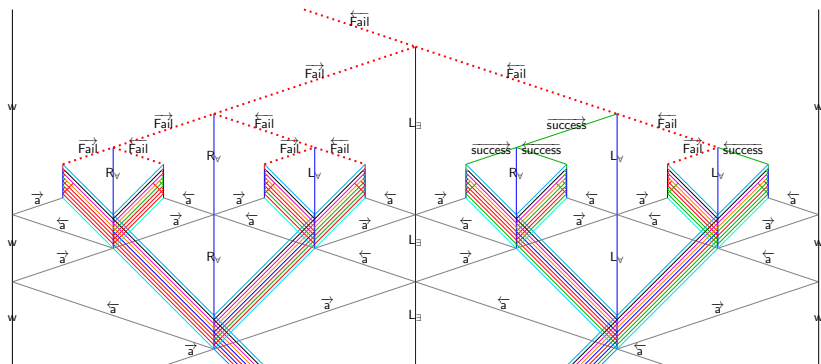


cas :

- x₁ vrai
- x₂ faux
- x₃ vrai



Agrégation du résultat

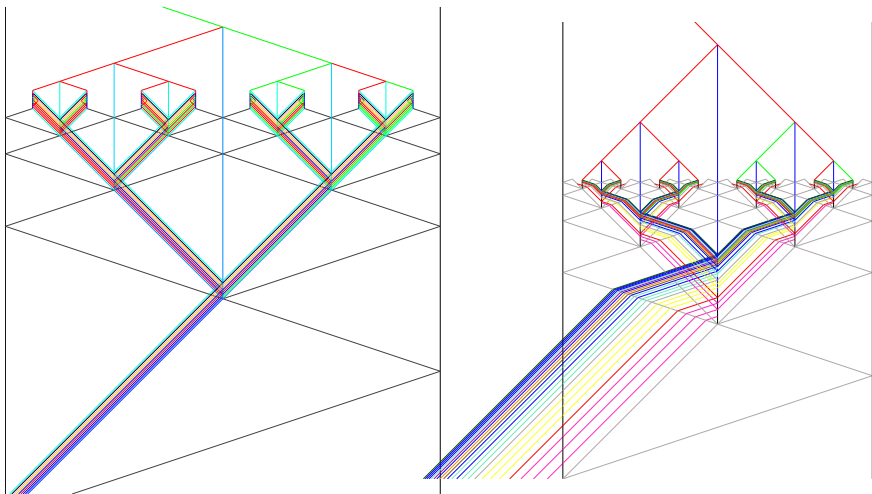


Complexité

- durée constante
- profondeur de collisions quadratique
- largeur de collisions exponentielle

Machine générique pour QSAT (Duchier et al., 2012)

- formule codée uniquement dans la configuration initiale
- durée constante
- profondeur de collisions cubique
- largeur de collisions exponentielle



1 Introduction

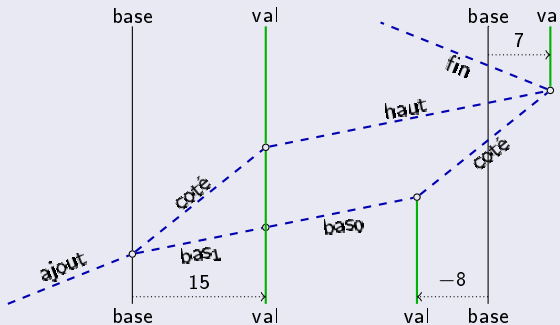
2 Trois modèles « euclidiens »

- Règle et compas (Huckenbeck, 1989, 1991)
- Automates de Mondrian (Jacopini and Sontacchi, 1990)
- Dérivée constante par région (Asarin et al., 1995; Bournez, 1999)

3 Machines à signaux

- Introduction et définition
- Malléabilité de l'espace-temps
- Construction et utilisation de fractales
- Calcul analogique

Calculer avec des nombres réels manipulés tels quels

Addition (valeur \approx distance)

Caractérisation hors accumulation : lin-BSS

- addition, soustraction
- multiplication par une constante
- test de signe, branchement...

- 1 Introduction

- 2 Trois modèles « euclidiens »
 - Règle et compas (Huckenbeck, 1989, 1991)
 - Automates de Mondrian (Jacopini and Sontacchi, 1990)
 - Dérivée constante par région (Asarin et al., 1995; Bournez, 1999)

- 3 Machines à signaux
 - Introduction et définition
 - Malléabilité de l'espace-temps
 - Construction et utilisation de fractales
 - Calcul analogique

- Asarin, E., Maler, O., and Pnueli, A. (1995). Reachability analysis of dynamical systems having piecewise-constant derivatives. *Theoret. Comp. Sci.*, 138(1):35–65.
- Bournez, O. (1999). Achilles and the Tortoise climbing up the hyper-arithmetical hierarchy. *Theoret. Comp. Sci.*, 210(1):21–71.
- Das, R., Crutchfield, J. P., Mitchell, M., and Hanson, J. E. (1995). Evolving globally synchronized cellular automata. In Eshelman, L. J., editor, *International Conference on Genetic Algorithms '95*, pages 336–343. Morgan Kaufmann.
- Duchier, D., Durand-Lose, J., and Senot, M. (2011). Solving Q-SAT in bounded space and time by geometrical computation. In Ganchev, H., Löwe, B., Normann, D., Soskov, I., and Soskova, M., editors, *Models of computability in context, 7th Int. Conf. Computability in Europe (CiE '11) (abstracts and handout booklet)*, pages 76–86. St. Kliment Ohridski University Press, Sofia University.
- Duchier, D., Durand-Lose, J., and Senot, M. (2012). Computing in the fractal cloud: modular generic solvers for SAT and Q-SAT variants. In Agrawal, M., Cooper, B. S., and Li, A., editors, *Theory and*

Applications of Models of Computations (TAMC '12), number 7287 in LNCS, pages 435–447. Springer.

Fischer, P. C. (1965). Generation of primes by a one-dimensional real-time iterative array. *J. ACM*, 12(3):388–394.

Goto, E. (1966). Ōtomaton ni kansuru pazuru [Puzzles on automata]. In Kitagawa, T., editor, *Jōhōkagaku eno michi [The Road to information science]*, pages 67–92. Kyoristu Shuppan Publishing Co., Tokyo.

Huckenbeck, U. (1989). Euclidian geometry in terms of automata theory. *Theoret. Comp. Sci.*, 68(1):71–87.

Huckenbeck, U. (1991). A result about the power of geometric oracle machines. *Theoret. Comp. Sci.*, 88(2):231–251.

Jacopini, G. and Sontacchi, G. (1990). Reversible parallel computation: an evolving space-model. *Theoret. Comp. Sci.*, 73(1):1–46.