Université d'Orléans **Session de Juin 2018**
Diplôme d'Accès aux Etudes Universitaires

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DAEU B

Durée : 4 heures

Les documents et calculatrices sont autorisés.
Les exercices sont indépendants les uns des autres.

Exercice 1 : Nombres complexes

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$z^2 - 4z + 8 = 0$$

2) On munit le plan complexe du repère orthonormée $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit A le point d'affixe $z_A = 2+2i$ et B le point d'affixe $z_B = 2 + \overline{z_A}$.

a) Donner la forme trigonométrique du nombre complexe $2 + 2i$ puis donner son écriture exponentielle.

b) Démontrer que $z_B = 4 - 2i$

c) Donner la forme algébrique du nombre complexe $\dfrac{z_B}{z_A}$.

Soit I le milieu du segment $[AB]$ et D le point d'affixe $z_D = -2$.

d) Démontrer que $z_I = 3$.

e) Calculer les longueurs AI, DI et AD.

f) Démontrer que le triangle (ADI) est rectangle en A.

h) Déterminer l'affixe du point C de sorte que le quadrilatère ABCD soit un carré.

Exercice 2 : Résolutions d'équations et d'inéquations

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$X^2 - 5X + 6 = 0$$

2) En déduire les solutions réelles de l'équation suivante :

$$(\ln x)^2 - 5 \ln x + 6 = 0$$

3) En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation suivante :

$$(\ln x)^2 - 5\ln x + 6 < 0$$

Exercice 3 : Etude de fonction

Partie I :

1) Etudier le signe de $e^{2x} - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2) Soit g la fonction de la variable réelle définie par :

$$g(x) = e^x - e^{-x}$$

a) Démontrer que : $g(x) = e^{-x}(e^{2x} - 1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) En déduire le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Partie II : Soit f la fonction de la variable réelle définie par :

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

1) Vérifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2) Démontrer que :

$$f(-x) = -f(x) \text{ pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R}.$$

Que peut-on en déduire quand à l'allure de la courbe représentative de la fonction f sur $\mathbb{R}$?

3) Calculer la dérivée de f. On montrera que :

$$f'(x) = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} \text{ pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R}.$$

4) En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

5) Vérifier que :

$$f(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \text{ pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R}.$$

En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Que peut-on en déduire sur l'allure de la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$.

De même vérifier que :

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} - 1} \text{ pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R}.$$

En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$. Que peut-on en déduire sur l'allure de la courbe représentative de f au voisinage de $-\infty$.

6) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$. En déduire que $\alpha = 0$.

7) Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

On note T la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

8) Etude de la position de courbe représentative de f et de sa tangente .

Soit h la fonction définie par :

$$h(x) = f(x) - x \text{ pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R}.$$

a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h(x) = \frac{g(x)}{e^x + e^{-x}}$$

où $g(x) = e^x - e^{-x} - x(e^x + e^{-x})$.

b) Déterminer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ puis en utilisant le résultat de la partie I en déduire les variations de la fonction g puis le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$. En déduire la position relative de la courbe représentative de la fonction f et sa tangente T.

9) a) Vérifier que la fonction $F(x) = \ln(e^x + e^{-x})$ est une primitive de f.

b) Calculer :

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx.$$

Exercice 4 : Probabilités

Une fabrique produit deux types de sachets de ships: l'un au curry et l'autre nature. 80% de sachets de ships au naturel sont produites. L'entreprise assure que la masse de chaque sachet produit est 100 g . Des anomalies sur la chaîne de fabrication font que la masse de certain paquet de ships est inférieure à 100 g.

5 % des ships au curry ont une masse inférieure à 100 g et 2% des ships au naturel ont une masse inférieure à 100g .

On prélève au hasard un sachet dans la production.

On notera C l'évènement : " le paquet de ships prélevé est au curry"; D l'évènement : " le paquet de ships prélevé présente un défaut " et par $\overline{C}$ (resp. $\overline{D}$) l'évènement contraire de C (resp. de D).

1) Représenter l'expérience aléatoire à l'aide d'un arbre pondéré dans lequel on écrira les probabilités.

2) Calculer les probabilités suivantes : $P(C \cap D)$. En déduire $P(D)$.

3) Le paquet de ships tiré pèse moins de 100g. Calculer la probabilité que ce soit un paquet au curry.

Exercice 5 : Probabilités : variables aléatoires

On lance successivement deux fois un dé à 4 faces. Les faces du dé sont numérotées de 1 à 4. Soit X la variable aléatoire égale à la somme des deux chiffres obtenus après les deux lancers.

1) Déterminer l'ensemble des valeurs possibles de X.

2) Calculer $P(X = 2)$ et $P(X = 3)$. En déduire $P(X \geq 4)$.

3) Soit Y la variable aléatoire qui vaut 1 si la somme des faces est supérieure ou égale à 4 et 0 sinon. Vérifier que :

$$P(Y=1)=\frac{13}{16} \quad \text{et} \quad P(Y=0)=\frac{3}{16}.$$

4) Calculer l'espérance de Y.

5) A chaque partie, le joueur mise de 2 euros. Il gagne 5 euros si la somme des faces est supérieure à 4 et ne gagne rien sinon. On note G la variable aléatoire égale au gain à l'issue d'une partie.

Quelles sont les valeurs possibles de G ? En déduire que G peut s'exprimer sous la forme $G = 5Y - 2$ puis l'espérance de la variable G.

Exercice 6 : Primitives-intégrale

1) Déterminer la primitive de la fonction $f : x \mapsto 3x^2 + e^{2x} + \frac{1}{x} + 1$ qui s'annule en 1.

2) Démontrer que la fonction $x \mapsto \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}$ est une primitive de la fonction $x \mapsto x\ln x$.

Calculer

$$\int_1^e x\ln(x)dx.$$

3) On considère I et J les deux réels suivants :

$$I = \int_0^1 \frac{x^4}{x^5+1}dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 \frac{x^9}{x^5+1}dx.$$

a) Déterminer la valeur de I.

b) Démontrer que $I + J = \frac{1}{5}$.

c) En déduire la valeur de J.

Exercice 7 : système d'équations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} xy = 20 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Fin du sujet