	Licence EG semestre 4 2020-2021
FACULTÉ DE DROIT ÉCONOMIE & GESTION	***ALGEBRE LINEAIRE*** **Examen session 2** **durée : 1h30** **Documents et calculatrice interdits**

EXERCICE 1 : Soient $\vec{u} = (-2\,;1\,;-1)$, $\vec{v} = (1\,;1\,;2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Soit F le sous espace vectoriel engendré par la famille $\{\vec{u}\ ;\ \vec{v}\}$, c'est-à-dire : $F = \mathrm{Vect}\{\vec{u}\ ;\ \vec{v}\}$.

1) Démontrer que $\{\vec{u}\,;\vec{v}\}$ est une base de F. Quelle est la dimension de F ?
2) a) Déterminer la dimension de $F^{\perp}$.
   b) Démontrer que $\{\vec{w}\}$ avec $\vec{w} = (1\,;1\,;-1)$ est une base de $F^{\perp}$.
3) Démontrer que $\{\vec{u}\ ;\ \vec{v}\ ;\ \vec{w}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On note B la base $(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\ ;\ \vec{w})$
4) Donner une mesure de l'angle $(\vec{u},\vec{v})$.
5) On note C la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   a) Déterminer les matrices de passage de la base C vers la base B et de la base B vers la base C.
   b) Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{k} = (1\,;1\,;8)$ dans la base B.

EXERCICE 2 :
Soit l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par :

$$f\,(x\,;y\,;z) = (-3x + 6y + 3z\,;\,x + 2y - z\,;\,-x + 2y + z;\,4x - 8y - 4z).$$

1) Ecrire la matrice représentant f dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$.
2) Déterminer la dimension de Imf et de Kerf, respectivement image et noyau de l'application linéaire f.
3) f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
4) Déterminer une base de Imf.
5) a) Démontrer que le vecteur $\vec{t} = (3\,;0\,;1\,;-4)$ est dans Imf.
   b) Déterminer un antécédent de $\vec{t}$ par f dans $\mathbb{R}^3$. Peut-on en déterminer un autre (justifier) ?

EXERCICE 3 : Soit A une matrice de format (3 , 3) diagonalisable telle que ses valeurs propres sont :
– 1 de multiplicité 2 et 3 de multiplicité 1.

Une base du sous espace propre associé à la valeur propre – 1 est :
$\{\vec{u}_{-1}\ ;\ \vec{v}_{-1}\}$ avec $\vec{u}_{-1} = (1\,;1\,;0)$ et $\vec{v}_{-1} = (1\,;0\,;1)$.

Une base du sous espace propre associé à la valeur propre 3 est : $\{\vec{u}_3\}$ avec $\vec{u}_3 = (-1\,;1\,;0)$.

1) Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2) Calculer le déterminant de A. A est–elle inversible ?
3) La matrice A^{-1} est-elle diagonalisable ? si oui quelles sont ses valeurs propres ?
4) La matrice 2A est-elle diagonalisable ? si oui quelles sont ses valeurs propres ?
5) La matrice A^4 est-elle diagonalisable ? si oui quelles sont ses valeurs propres ?
6) La matrice A + I est-elle diagonalisable ? si oui quelles sont ses valeurs propres ?