FACULTÉ DE DROIT ÉCONOMIE & GESTION

2ième SESSION DU SEMESTRE 3 2021-2022

Mention / Parcours / Spécialité : **Licence Economie et Gestion-Majeure Economie**

Année : 2

Intitulé de l'épreuve : **Techniques quantitatives**

Durée de l'épreuve : 2 h 30 Documents autorisés : aucun Matériel autorisé : aucun

⚠ ce sujet comporte **deux pages – il y a 7 exercices**

EX1 : Soient les fonctions f et g définies pour $x \in]\frac{1}{3} ;+\infty[$ par $f(x) = \frac{e^{2x}}{(3x-1)^5}$ et $g(x) = \frac{e^{2x}(6x-17)}{(3x-1)^6}$

1) Montrer que f est une primitive de g sur $I =]\frac{1}{3} ;+\infty[$.

2) Déterminer la primitive sur I de la fonction f qui vaut 4 en 0.

EX2 : Soit la fonction f définie pour x appartenant à $I =]-\frac{5}{2} ;+\infty[$ par $f(x) = \frac{-10x+4}{(2x+5)(x^2+1)}$.

1) Déterminer les réels a ,b et c tels que $f(x) = \frac{a}{2x+5} + \frac{bx+c}{x^2+1}$.

On admettra pour continuer que a = 4 , b = –2 et c = 0.

2) En déduire une primitive de f sur I.

3) Calculer l'intégrale $A = \int_{-2}^{2} \frac{-10x+4}{(2x+5)(x^2+1)} dx$.

4) Calculer l'intégrale $A(a) = \int_{-2}^{a} \frac{-10x+4}{(2x+5)(x^2+1)} dx$ pour réel tout $a \geq -2$.

5) L'intégrale généralisée $\int_{-2}^{+\infty} \frac{-10x+4}{(2x+5)(x^2+1)} dx$ est–elle convergente ? Si oui, que vaut–elle ?

EX3 :

1) Soit x < 9.

Calculer l'intégrale $\int_0^x \frac{t}{(9-t)^{3/2}} dt$ à l'aide d'une intégration par parties ou d'un changement de variable.

2) L'intégrale généralisée de $\int_0^9 \frac{t}{(9-t)^{3/2}} dt$ est–elle convergente ? Si oui, quelle est sa valeur ?

EX 4

1) Déterminer trois réels A, B et C tels que : $p(x) = 5x^2 - 4x + 4 = A \times \left[(Bx+C)^2 + 1\right]$ pour $x \in$ IR.

2) Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \frac{1}{p(x)} = \frac{1}{5x^2-4x+4}$.

a) Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b) L'intégrale $\int_{6/5}^{+\infty} \frac{1}{5t^2-4t+4} dt$ est–elle convergente ? Si oui, donner sa valeur.

EX5 : On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} e^{2x+3} & \text{si } x \leq -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \text{si } -\frac{3}{2} < x \leq 1 \\ \frac{6}{x^4} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On admet que f est une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

1) Calculer $\int_{-1}^{2} f(x)dx$.

2) L'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{-3/2} f(x)\,dx$ est–elle convergente ? Si oui, quelle est sa valeur ?

3) L'intégrale généralisée $\int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$ est–elle convergente ? Si oui, quelle est sa valeur ?

4) L'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ est–elle convergente ? Si oui, quelle est sa valeur ?

EX6 :

1) Calculer, à l'aide du changement de variable, $x = 1+\sqrt{t}$ l' intégrale $A = \int_{4}^{25} \frac{1}{(1+\sqrt{t})^3} dt$.

2) Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale $B = \int_{0}^{1} \arctan(t)dt$.

EX7 :

1) Déterminer le DL_2 en 0 de la fonction $f(x) = \frac{5}{5+x}$.

2) Déterminer le DL_2 en 0 de la fonction $g(x) = \ln(1 + 2x)$.

3) En déduire le DL_2 en 0 de la fonction $h(x) = \frac{5\ln(1+2x)}{5+x}$.

4) Déterminer, en utilisant la question précédente, une valeur approchée de $\frac{5\ln(0,9)}{4,95}$.

5) Que vaut la limite lorsque x tend vers 0 de $\frac{\ln(1+2x)}{x}$?

6) Que vaut la limite lorsque x tend vers 0 de $\frac{h(x)-2x}{x^2}$?

FACULTÉ DE DROIT
ÉCONOMIE & GESTION

UNIVERSITE D'ORLEANS

Sujet d'examen – Session 2 **Licence semestre 4** **Année universitaire 2021-2022**

Intitulé de l'épreuve : **ALGEBRE LINEAIRE** Nom de l'enseignant : **GRUNER-POIGNARD-RAFFINAT**

Mention / Spécialité / Parcours : licence ECONOMIE Année d'études : 2

Durée de l'épreuve : **2 heures 30 min**

Documents autorisés : aucun Matériels autorisés : calculatrices non programmables

SUJET

Toutes les réponses doivent être justifiées.

EXERCICE 1 :

Soit $\vec{u} = (1 ; 2 ; -1)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$ et $F = \text{vect}\{\vec{u}\}$. On admet que $\{\vec{u}\}$ est une base de F.

1) Déterminer la dimension de $F^{\perp}$?

2) Soient $\vec{v} = (-3 ; 2 ; 1)$; $\vec{w} = (5 ; 1 ; 7)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Démontrer que $\{\vec{v} ; \vec{w}\}$ est une base de $F^{\perp}$. Est–ce une base de $\mathbb{R}^2$? (justifier)
On admet que $B = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3) Soient $\vec{a} = (5 ; 2)$ et $\vec{b} = (3 ; 1)$. Démontrer que $\{\vec{a} ; \vec{b}\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. On note D la base $(\vec{a} ; \vec{b})$.

4) Soit l'application linéaire g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ telle $g(\vec{a}) = \vec{u}$ et $g(\vec{b}) = -\vec{v}$.

a) Déterminer $Mg_{(B;D)}$,matrice représentant g en prenant D comme base de départ et B comme base d'arrivée.

b) Déterminer $Mg_{(C_3;C_2)}$,matrice représentant g en prenant C_2, base canonique de $\mathbb{R}^2$ comme base de départ et C_3, base canonique de $\mathbb{R}^3$ comme base d'arrivée.

EXERCICE 2 :

Soit l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ telle que la matrice représentant f dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$ est $M = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer $f(x ; y ; z)$ pour tout $(x ; y ; z) \in \mathbb{R}^3$.

2) Déterminer la dimension de Imf et de Kerf, respectivement image et noyau de l'application linéaire f.

3) f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

4) Déterminer une base de Imf.

5) a) Démontrer que le vecteur $\vec{t} = (7 ; 10 ; -4 ; -27)$ est dans Imf.

b) Déterminer un antécédent de $\vec{t}$ par f dans $\mathbb{R}^3$. Peut-on en déterminer un autre (justifier) ?

EXERCICE 3 : Soit A une matrice de format (3 ;3) diagonalisable telle que ses valeurs propres sont :
– 1 de multiplicité 2 et 2 de multiplicité 1.
Une base du sous espace propre associé à la valeur propre – 1 est :
$\{\vec{u}_{-1}\ ;\ \vec{v}_{-1}\}$ avec $\vec{u}_{-1} = (2\ ;1\ ;0)$ et $\vec{v}_{-1} = (0\ ;3\ ;1)$.

Une base du sous espace propre associé à la valeur propre 2 est : $\{\vec{u}_2\}$ avec $\vec{u}_2 = (1\ ;2\ ;0)$.

1) Déterminer le polynôme caractéristique de A.

2) Calculer le déterminant de A. A est–elle inversible ?

3) Déterminer la matrice A.

4) Soit f l'application linéaire représentée, en utilisant au départ et à l'arrivée la base canonique de $\mathbb{R}^3$, par la matrice A.

f est-elle bijective ? Si oui, déterminer l'inverse de f, notée f^{-1}.

(c'est-à-dire déterminer $f^{-1}(x\ ;y\ ;z)$ pour tout $(x\ ;y\ ;z)$ de $\mathbb{R}^3$).

EXERCICE 4 :

Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 2 & -7 & 4 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

1) a) Déterminer le rang de la matrice A + 5I.
b) En déduire que – 5 est valeur propre de A.
c) Déterminer une base du sous espace propre associé à la valeur propre –5, noté E_{-5}.

2) Le vecteur (1 ; 2 ; 3) est-il vecteur propre de A ? Si oui, à quelle valeur propre est-il associé ?(justifier)
Même question pour le vecteur (2 ; 4 ; 1).

3) a) Déterminer le polynôme caractéristique de A.
b) En déduire toutes les valeurs propres de A ainsi que leur multiplicité respective.

4) a) A est-elle diagonalisable ?
b) Si oui, déterminer une matrice D diagonale et P inversible telle que $A = PDP^{-1}$.

5) On considère l' application linéaire g définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par :
et $g(x\ ;y\ ;z) = (8x + 2y - 4z\ ;-4x + 14y - 8z\ ;-6x + 6y - 2z)$

Soit B la matrice représentant l'application linéaire g en prenant comme base de départ et d'arrivée la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
a) Exprimer B en fonction de A.
b) En déduire que B est diagonalisable. Donner ses valeurs propres et leurs multiplicités respectives. (justifier)